УДК 517.5

Е. С. Синайский

Аппроксимационный метод в одной краевой задаче с частными производными

Изучается возможность совместного применения преобразования Лапласа и a-метода В. К. Дзядыка для построения приближенного решения краевой задачи в случае линейного дифференциального уравнения в частных производных с коэффициентами многочленного типа, зависящими от одной независимой переменной. Установлено существование и единственность приближенного решения в выбранной форме. Получена асимптотическая оценка погрешности приближения.

Вивчається можливість сумісного застосування перетворення Лапласа та a-методу В. К. Дзядика для побудови наближеного розв'язку крайової задачі у випадку лінійного диференціального рівняння в частинних похідних з коефіцієнтами многочленного типу, що залежать від однієї незалежної змінної. Встановлено існування та єдиність наближеного розв'язку у вибраній формі. Одержана асимптотична оцінка похибки наближення.

Динамические задачи механики для одномерных неоднородных тел приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных с коэффициентами, зависящими от пространственной координаты. В линейном случае преобразование Лапласа по временной переменной позволяет образовать обыкновенное дифференциальное уравнение, решением которого, как правило, является некоторая специальная функция. Вследствие того, что параметр преобразования оказывается под знаком такой функции, обратный переход в пространство оригиналов представляет весьма сложную задачу, эффективно реализуемую лишь в отдельных случаях. Сохранение преимуществ операционного подхода возможно в его сочетании с приближенными методами по геометрической координате при условии, что соответствующие аппроксимации имеют простую структуру и хорошую сходимость. Этим требованиям отвечает a-метод В. К. Дзядыка [1], успешно применяемый, в частности, для решения различного типа краевых задач [1—4].

Пусть в области $\Omega=\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t<\infty\}$ существует единственное решение $y(x,t)$ краевой задачи

$$\sum_{s=0}^{k}\sum_{r=0}^{m} a_{sr}(x)\,y^{(k-s,r)}(x,t)=f(x,t), \tag{1}$$

$$\begin{gathered} y^{(j,0)}(0,t)=\varphi_j(t),\quad y^{(0,r)}(x,0)=\psi_r(x),\\ \varphi_j^{(r)}(0)=\psi_r^{(j)}(0),\ j=\overline{0,k-1},\ r=\overline{0,m-1}, \end{gathered} \tag{2}$$

где

$$y^{(j,r)}(x,t)=\frac{\partial^{j+r}y(x,t)}{\partial x^j\partial t^r},\quad f(x,t)=\sum_{i=0}^{n_1} f_i(t)\,x^i,$$

$a_{sr}(x)$ и $\psi_r(x)$ — многочлены по степеням x, $\deg a_{sr}(x)=l_{sr}$, $a_{0m}(x)\geqslant a_0=$ $=\mathrm{const}>0$, $f_i(t)\in C$ (при $m=1$ $f_i(t)\in C^{(1)}$), $\varphi_j(t)\in C^{(m)}$.

Замена $y(x,t)=Y(x,t)+\sum\limits_{j=0}^{m-1}\dfrac{t^j}{j!}\psi_j(x)$, не изменяя структуры уравнения (1), приводит к условиям $Y^{(0,r)}(x,0)=0$, $r=\overline{0,m-1}$. Это позволяет, не умаляя общности, полагать в (2) $\psi_r(x)\equiv 0$, $r=\overline{0,m-1}$.

Допуская, что все функции аргумента t обладают свойствами оригиналов, применим к уравнению (1) и первой группе условий (2) преобразование Лапласа по этой переменной. Получим

$$\sum_{s=0}^{k} a_s(x,p)\,\tilde{y}^{(k-s,0)}(x,p)=\tilde{f}(x,p), \tag{3}$$

$$\tilde{y}^{(j,0)}(0,p)=\tilde{\varphi}_j(p),\quad j=\overline{0,k-1}. \tag{4}$$

Здесь p — параметр преобразования, волнистой чертой отмечены трансформанты соответствующих функций,

$$\tilde{f}(x, p) = \sum_{i=0}^{n_1} x^i \tilde{f}_i(p), \quad a_s(x, p) = \sum_{r=0}^{m} p^r a_{sr}(x), \quad s = \overline{0, k}. \tag{5}$$

Приближенное решение задачи (1), (2) будем искать в форме

$$y_n(x, t) = \sum_{j=0}^{n} b_j(t) x^j, \quad b_j^{(r)}(0) = 0, \quad r = \overline{0, m-1}, \quad j = \overline{0, n}. \tag{6}$$

В уравнение (3) и условия (4) вводим согласованные между собой невязки [4]

$$\sum_{s=0}^{k} a_s(x, p) \tilde{y}_n^{(k-s,0)}(x, p) = \tilde{f}(x, p) - \tilde{\varepsilon}^{(k,0)}(x, p), \tag{7}$$

$$\tilde{y}_n^{(j,0)}(0, p) = \tilde{\varphi}_j(p) - \tilde{\gamma}_j(0, p), \quad j = \overline{0, k-1}, \tag{8}$$

где

$$\tilde{\varepsilon}(x, p) = \sum_{i=1}^{l+1} \tilde{\tau}_i(p) T_{n+i}^*(x), \quad l = \max_{s,r}\{s + 1 + l_{sr}\}, \tag{9}$$

$$T_j^*(x) = \cos j \arccos(2x-1) = \sum_{i=0}^{j} c_i^j x^i \tag{10}$$

— смещенные полиномы Чебышева, а величины $\tilde{\gamma}_j(0, p)$ выражаются через $\tilde{\tau}_i(p)$ из треугольной системы

$$\sum_{i=0}^{j} \tilde{\gamma}_j(0, p) e_i^j(0, p) = \tilde{\varepsilon}^{(j,0)}(0, p), \quad j = \overline{0, k-1}. \tag{11}$$

Соотношения (7), (8) эквивалентны интегральному уравнению [4]

$$a_0(x, p) \tilde{y}_n(x, p) = \int_0^x P(x, \xi, p) \tilde{y}_n(\xi, p) d\xi + \tilde{F}(x, p) - \tilde{\varepsilon}(x, p), \tag{12}$$

где

$$\tilde{F}(x, p) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j}{j!} \sum_{i=0}^{j} e_i^j(0, p) \tilde{\varphi}_i(p) + \int_0^x \frac{(x-\xi)^{k-1}}{(k-1)!} \tilde{f}(\xi, p) d\xi, \tag{13}$$

$$P(x, \xi, p) = \sum_{r=0}^{m} p^r P_r(x, \xi), \quad P_r(x, \xi) = -\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(x-\xi)^j}{j!} e_{-1r}^j(\xi),$$

$$e_i^j(\xi, p) = \sum_{r=0}^{m} p^r e_{ir}^j(\xi), \quad e_{ir}^j(\xi) = \sum_{\nu=0}^{j-i} (-1)^\nu \binom{k+\nu-j-1}{\nu} a_{j-i-\nu,r}^{(\nu)}(\xi). \tag{14}$$

Внеся в (12) согласно (6), (9), (10) выражения для $\tilde{y}_n(x, p)$ и $\tilde{\varepsilon}(x, p)$ и уравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, получим линейную алгебраическую систему $n + l + 2$ уравнений относительно неизвестных $\tilde{b}_j(p)$, $j = \overline{0, n}$, и $\tilde{\tau}_i(p)$, $i = \overline{1, l+1}$.

Теорема 1. *При всяком фиксированном натуральном n существует единственный набор функций $b_j(t) \in C^{(m)}$, $j = \overline{0, n}$, $\tau_i(t) \in C$, $i = \overline{1, l+1}$, лапласовы трансформанты которых находятся из указанной выше алгебраической системы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду (6) величины $\tilde{b}_j(p)$ в равенстве (12) имеют сомножителями степени x не ниже, чем j. Поэтому столбцы определителя $Q(p)$ системы, соответствующие $\tilde{b}_j(p)$, выше главной диагонали содержат нули. Их ненулевые элементы являются многочленами от p степени m. Столбцы, отвечающие $\tilde{\tau}_i(p)$, от p не зависят и ниже главной диагонали имеют нули. Следовательно, $Q(p)$ — многочлен от p степени не выше $m(n+1)$. Сохраним в каждом элементе определителя $Q(p)$ лишь член с наивысшей степенью p. Тем самым из $Q(p)$ выделится детерминантное слагаемое, определяющее степень многочлена $Q(p)$. Первые $n+1$ элементов главной диагонали полученного таким образом определителя равны $p^m a_{0m}(0)$, последующими оказываются величины c_{n+i}^{n+i}, $i=\overline{1, l+1}$,— коэффициенты полиномов (10). Все эти элементы отличны от нуля.

Раскрывая определитель и его миноры по рядам с наибольшим числом нулей, получаем многочлен от p со старшим членом $Mp^{m(n+1)}$, где $M = a_{0m}^{n+1}(0)\prod_{i=1}^{l+1} c_{n+i}^{n+i} \neq 0$. Таким образом, $Q(p)$ — многочлен степени $m(n+1)$. Каждая из величин $\tilde{b}_j(p)$ и $\tilde{\tau}_i(p)$ выражается отношением двух определителей со знаменателем $Q(p)$. Если определитель в числителе раскрыть по столбцу, соответствующему искомой величине, то последняя представится суммой слагаемых вида $\tilde{\sigma}(p)H(p)/Q(p)$, где $\tilde{\sigma}(p)$ — это $p^r\tilde{\varphi}_i(p)$ $(r \leqslant m)$ или $\tilde{f}_i(p)$, а $H(p)$ — многочлен от p.

Для величин $\tilde{b}_j(p)$ $\deg H(p) \leqslant mn$. Поэтому

$$\lim_{p\to\infty} p^{j+1}\frac{H(p)}{Q(p)} = 0, \quad j=\overline{0, m-2}.$$

В пространстве оригиналов дроби $H(p)/Q(p)$ в этом случае соответствует дифференцируемая любое число раз функция $h(t)$ со значениями при $m \geqslant 2$ $h^{(j)}(0)=0$, $j=\overline{0, m-2}$. Оригинал $\sigma(t)$, отвечающий $\tilde{\sigma}(p)$, непрерывен: в качестве $\sigma(t)$ выступают функции $\varphi_i^{(r)}(t)$, $r \leqslant m$, либо $f_i(t)$. Обращение преобразования Лапласа для выражения $\tilde{\sigma}(p)H(p)/Q(p)$ приводит к свертке

$$\chi(t) := \int_0^t h(t-\theta)\,\sigma(\theta)\,d\theta,$$

причем

$$\chi^{(j)}(t) = h^{(m-1)}(0)\,\sigma(t)\,\delta_{jm} + \int_0^t h^{(j)}(t-\theta)\,\sigma(\theta)\,d\theta, \quad j=\overline{0, m},$$

где δ_{im} — символ Кронекера. Отсюда следует, что функции $\chi(t)$ непрерывно дифференцируемы m раз. Тем же свойством будут обладать и функции $b_j(t)$.

Для величин $\tilde{\tau}_i(p)$ $\deg H(p) = m(n+1)$. Из отношения $H(p)/Q(p)$ выделяется целая часть, не зависящая от p, и остаток в виде правильной дроби. Обращением выражения $\tilde{\sigma}(p)H(p)/Q(p)$ будет непрерывный оригинал вида

$$c\sigma(t) + \int_0^t h(t-\theta)\,\sigma(\theta)\,d\theta, \quad c = \text{const}.$$

Следовательно, функции $\tau_i(t)$ непрерывны.

В классе непрерывных функций соответствие между оригиналами и их лапласовыми трансформантами однозначно. В силу этого функции $b_j(t)$ и $\tau_i(t)$ рассмотренной здесь процедурой определяются единственным образом. Теорема 1 доказана.

Заметим, что алгебраическую систему с неизвестными $\tilde{b}_j(p)$, $\tilde{\tau}_i(p)$ можно строить непосредственно по соотношениям (7), (8), (11) ввиду их эквивалентности уравнению (12).

При $\tilde{\varepsilon}(x, p) \equiv 0$ переход в (12) к оригиналам дает равносильную (1), (2) интегральную формулировку рассматриваемой задачи.

Теорема 2. *Многочлены $y_n(x, t)$ из (6), коэффициенты $b_j(t)$ которых отыскиваются по соотношениям (7)—(11), в области Ω приближают решение задачи (1), (2) так, что $\forall t \geqslant 0$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\Delta_n(x, t) := y(x, t) - y_n(x, t) = O(n^{-k}), \quad n \to \infty. \tag{15}$$

Доказательство. При $\tilde{\varepsilon}(x, p) \equiv 0$ уравнение (12) имеет решение $\tilde{y}(x, p)$ — трансформанту искомой функции $y(x, t)$. Вычитая из этого уравнения равенство (12) с $\tilde{\varepsilon}(x, p) \not\equiv 0$, получаем

$$\tilde{\Delta}_n(x, p) = \int\limits_0^x \frac{P(x, \xi, p)}{a_0(x, p)} \tilde{\Delta}_n(\xi, p)\, d\xi + \frac{\tilde{\varepsilon}(x, p)}{a_0(x, p)}. \tag{16}$$

Согласно (5) и (14) $a_0(x, p)$ и $P(x, \xi, p)$ — многочлены от p степени m и $\leqslant m$ соответственно. В общем случае

$$P(x, \xi, p)/a_0(x, p) = g(x, \xi) + \tilde{h}(x, \xi, p), \tag{17}$$

где $\tilde{h}(x, \xi, p)$ — правильная относительно p дробь. Функция $g(x, \xi)$ непрерывна как результат деления некоторого многочлена от x и ξ на многочлен $a_{0m}(x)$, не имеющий нулей на отрезке $[0, 1]$, при $0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant 1$. Многочлен от p $a_0(x, p)$ в качестве старшего коэффициента имеет функцию $a_{0m}(x) \neq 0$. Поэтому при достаточно большом $p_0 > 0$ в области $\operatorname{Re} p > p_0$ многочлен $a_0(x, p)$ при $x \in [0, 1]$ не имеет нулей. Непрерывные по x и ξ дроби $\tilde{h}(x, \xi, p)$ и $1/a_0(x, p)$ в этой области являются аналитическими функциями p. Им соответствуют непрерывные по t оригиналы $h(x, \xi, t)$ и $A_0(x, t)$. Равенство (16) в пространстве оригиналов имеет вид

$$\Delta_n(x, t) = \int\limits_0^x g(x, \xi)\, \Delta_n(\xi, t)\, d\xi + \int\limits_0^t A_0(x, t - \theta)\, \varepsilon(x, \theta)\, d\theta +$$
$$+ \int\limits_0^x \int\limits_0^t h(x, \xi, t - \theta)\, \Delta_n(\xi, \theta)\, d\xi d\theta. \tag{18}$$

Воспользуемся теперь связью оригинала со значениями его лапласовой трансформанты в точках действительной оси [5].

Пусть $\rho > 0$ — некоторое фиксированное число и

$$\Phi_n(x, t) := e^{-(\rho - 1/2)t}(1 - e^{-t})^{1/2} \Delta_n(x, t). \tag{19}$$

Заменой $t = -2 \ln \cos \dfrac{\theta}{2}$ получаем $V_n(x, \theta) := \Phi_n\left(x, -2 \ln \cos \dfrac{\theta}{2}\right)$. Функция $\Delta_n(x, t)$ при $0 \leqslant t < \infty$ непрерывно дифференцируема по t m раз, $m > 1$, и согласно (18) $\Delta_n(x, t) = O(t)$, если $t \to 0$. Это обеспечивает ограниченность производной $V_n^{(0,1)}(x, \theta)$ при $\theta = 0$. Выбирая число ρ достаточно большим, можно добиться ограниченного изменения функций $V_n(x, \theta)$ и $V_n^{(0,1)}(x, \theta)$ на всем промежутке $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. При этом функция $V_n(x, \theta)$ допускает разложение в ряд Фурье [6]

$$V_n(x, \theta) = v_0/2 + \sum_{j=1}^{\infty} v_j \cos j\theta, \quad v_j = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} V_n(x, \theta) \cos j\theta\, d\theta, \tag{20}$$

причем существует постоянная B_n, не зависящая от x и j такая, что

$$|v_0| < B_n, \quad |v_j| < B_n/j^2, \ j = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Переходя в (20) к переменной t, ввиду (19) имеем

$$\Phi_n(x, t) = v_0/2 + \sum_{j=1}^{\infty} v_j T_j^*(e^{-t}), \quad v_j = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \Delta_n(x, t)\, e^{-\rho t} T_j^*(e^{-t})\, dt. \tag{22}$$

С учетом (10) и (22) получаем

$$v_j = \frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{j} c_i^j \int_0^{\infty} e^{-(i+\rho)t}\Delta_n(x, t)\, dt = \frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{j} c_i^j \tilde{\Delta}_n(x, i+\rho). \tag{23}$$

Положим $\rho > p_0$, где p_0 — абсцисса абсолютной сходимости трансформанты $\tilde{\Delta}_n(x, p)$. При всяком действительном значении $p = i + \rho$ $\tilde{\Delta}_n(x, p)$, являясь решением уравнения (16), с ростом n ведет себя как величина $O(n^{-k})$ [1]. Ввиду (23) тем же свойством обладают коэффициенты v_j. Вместе с (21) это позволяет утверждать, что существует абсолютная постоянная A такая, что $|v_0| < A/n^k$, $|v_j| < A/j^2 n^k$, $j = 1, 2, \ldots$. Так как $T_n^*(e^{-t})| \leqslant 1$, то ряд в (22) мажорируется числовым рядом

$$\frac{A}{n^k}\left(1/2 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\right) = A_1/n^k, \quad A_1 = \text{const}.$$

Ввиду (19) отсюда следует утверждение (15). Теорема 2 доказана.

Замечание. В краевой задаче для уравнения (1) с условиями

$$\sum_{j=0}^{k}[\alpha_{ij} y^{(j,0)}(0, t) + \beta_{ij} y^{(j,0)}(1, t)] = u_i(t) \quad i = \overline{1, k}, \quad y^{(0,r)}(x, 0) = 0,$$

$$r = \overline{0, m-1},$$

где α_{ij}, β_{ij} — заданные числа, $u_i(t)$ — заданные функции, приближенное решение в форме (6) посредством преобразования Лапласа также может быть найдено по схеме, рассмотренной в [4]. Свойство (15) в этом случае доказывается аналогично.

1. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1988.— 304 с.
2. *Островецкий Л. А.* Решение по *А*-методу многоточечных краевых задач // Некоторые вопр. теории аппроксимации функций.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 94—100.
3. *Бурлаченко В. П., Романенко Ю. И.* О приближении по методу В. К. Дзядыка решения задачи Гурса с многочленными коэффициентами // Теория функций и ее прил.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979.— С. 50—60.
4. *Синайский Е. С.* Аппроксимационный метод в одной краевой задаче для линейного дифференциального уравнения с многочленными коэффициентами // Укр. мат. журн.— 1988.— 40, № 2.— С. 248—253.
5. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа.— М. : Наука, 1974.— 224 с.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т.— М.: Наука, 1966.— Т. 3.— 656 с.

Днепропетр. гор. ин-т

Получено 17.10.88