УДК 519.21

Д. Алимов

Об эргодичности одного марковского процесса пуассоновского типа

Доказывается эргодичность марковского процесса пуассоновского типа с отражением в нуле.

Доводиться ергодичність марківського процесу типу Пуассона з відбиттям у нулі.

Настоящая статья является продолжением статьи [1] и в ней используются те же обозначения. В [1] рассмотрен однородный марковский процесс ξ_t, $t \geqslant 0$, принимающий неотрицательные вещественные значения, локальные переходные вероятности которого за малое время Δ ($\Delta \downarrow 0$) определяются соотношениями

$$x \xrightarrow{\Delta} x+y: \ \frac{\lambda F(dy)}{ax+b}\Delta + 0(\Delta), \quad x \geqslant 0,$$

$$x \to x-\Delta: \ 1-\frac{\lambda}{ax+b}\Delta + 0(\Delta), \quad x > 0,$$

$$0 \xrightarrow{\Delta} 0: \ 1-\frac{\lambda}{b}\Delta + 0(\Delta),$$

где $a > 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$; $F(dy)$ — распределение вероятностей на $(0, \infty)$. В [1] для процесса ξ_t, $t \geqslant 0$, установлены точные формулы переходных вероятностей в терминах функции $Q(t, z) = M \exp(-z\xi_t/(a\xi_t + b))$, а также найдены стационарные распределения этого процесса в предположении, что они существуют. Эти точные формулы, как для переходных вероятностей, так и для стационарного распределения имеют вид

$$\tilde{Q}(s, z) = \frac{1}{a} e^{\frac{b}{a}z} (z-s)^{\frac{\lambda}{a}(\varphi(s)-1)} \int_s^z \exp\left\{-\frac{b}{a}u + \frac{\lambda}{a}\int_u^z L(w, s)\, d\omega\right\} \times$$

$$\times \frac{e^{-ux_0} - u\tilde{P}(s)}{(u-s)^{\frac{\lambda}{a}(\varphi(s)-1)+1}}\, du, \tag{1}$$

$$\tilde{P}(s)=\frac{\int\limits_s^{+\infty}\exp\left\{-\left(\frac{b}{a}+x_0\right)u-\frac{\lambda}{a}\int\limits_0^u L(w,s)\,dw\right\}(u-s)^{\frac{\lambda}{a}(1-\varphi(s))-1}\,du}{\int\limits_s^{+\infty}\exp\left\{-\frac{b}{a}u-\frac{\lambda}{a}\int\limits_0^u L(w,s)\,dw\right\}(u-s)^{\frac{\lambda}{a}(1-\varphi(s))-1}\,u\,du}, \quad (2)$$

где

$$\tilde{Q}(s,z)=\int\limits_0^{\infty}e^{-st}Q(t,z)\,dt,\quad \tilde{P}(s)=\int\limits_0^{\infty}e^{-st}P(\xi_t=0)\,dt,$$

$$L(z,s)=\frac{\varphi(z)-\varphi(s)}{z-s},\quad \varphi(z)=\int\limits_0^{\infty}e^{-zy}F(dy).$$

В настоящей статье докажем существование предела

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t Q(u,z)\,du=\lim_{s\to 0}s\tilde{Q}(s,z).$$

Теорема. *Если* $\mu=\int\limits_0^{\infty}yF(dy)<\infty$, *то для всех* $z\geqslant 0$

$$\lim_{s\to 0}s\tilde{Q}(s,z)=\frac{P_0}{a}\int\limits_z^{\infty}\exp\left\{\frac{b}{a}(z-u)-\frac{\lambda}{a}\int\limits_z^u L(w,0)\,dw\right\}du, \quad (3)$$

где

$$P_0=\lim_{s\to 0}s\tilde{P}(s)=\left[1+\frac{\lambda}{a}\mu\int\limits_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{b}{a}u+\frac{\lambda}{a}\int\limits_0^u L(w,0)\,dw\right\}du\right]^{-1}. \quad (4)$$

Доказательство. Перепишем формулы (1) и (2) в более удобном виде

$$\tilde{Q}(s,z)=\frac{1}{a}e^{\frac{b}{a}z}(z-s)^{-k(s)}\int\limits_s^z e^{-c_0u}H_z(u,s)\frac{e^{-ux_0}-u\tilde{P}(s)}{(u-s)^{-k(s)+1}}\,du, \quad (5)$$

$$\tilde{P}(s)=\frac{\int\limits_s^{+\infty}e^{-cu}H_0(u,s)(u-s)^{k(s)-1}\,du}{\int\limits_c^{+\infty}e^{-c_0u}H_0(u,s)(u-s)^{k(s)-1}u\,du}, \quad (6)$$

где

$$H_z(u,s)=\exp\left\{-\frac{\lambda}{a}\int\limits_z^u L(w,s)\,dw\right\},\quad k(s)=\frac{\lambda}{a}(1-\varphi(s))\geqslant 0,$$

$$c=\frac{b}{a}+x_0,\quad c_0=\frac{b}{a}.$$

Умножим обе части формулы (6) на s и сделаем замену переменной $u=v+s$. Тогда будем иметь

$$s\tilde{P}(s)=\frac{s\int\limits_0^{+\infty}e^{-c(v+s)}H_0(v+s,s)\,v^{k(s)-1}dv}{\int\limits_0^{+\infty}e^{-c_0(v+s)}H_0(v+s,s)\,v^{k(s)-1}(v+s)\,dv}$$

или

$$\frac{1}{s\tilde{P}(s)} = e^{x_0 s}\left[\frac{\int\limits_0^{+\infty} e^{c_0 v} H_0(v+s,\, s)\, v^{k(s)} dv}{s\int\limits_0^{+\infty} e^{-cv} H_0(v+s,\, s)\, v^{k(s)-1}\, dv} + \right.$$

$$\left. + \frac{s\int\limits_0^{+\infty} e^{-c_0 v} H_0(v+s,\, s)\, v^{k(s)-1}\, dv}{s\int\limits_0^{+\infty} e^{-cv} H_0(v+s,\, s)\, v^{k(s)-1}\, dv}\right]. \tag{7}$$

Докажем теперь, что справедливо равенство

$$\lim_{s\to 0} s\int\limits_0^{+\infty} e^{-cv} H_0(v+s,\, s)\, v^{k(s)-1}\, dv = \frac{a}{\lambda\mu}. \tag{8}$$

В самом деле,

$$s\int\limits_0^{+\infty} e^{-cv} H_0(v+s,\, s)\, v^{k(s)-1}\, dv = \frac{s}{k(s)}\int\limits_0^{+\infty} e^{-cv} H_0(v+s,\, s)\, dv^{k(s)}.$$

Интегрируя это соотношение по частям, получаем

$$\frac{s}{k(s)}\int\limits_0^{+\infty} e^{-cv} H_0(v+s,\, s)\, v^{k(s)}\left[c + \frac{\lambda}{a} L(v+s,\, s)\right] dv.$$

Так как $\lim\limits_{s\to 0}\frac{s}{k(s)} = \frac{a}{\lambda\mu}$, то предел последнего выражения при $s\to 0$ равен

$$\frac{a}{\lambda\mu}\int\limits_0^{+\infty} e^{-cv} H_0(v,\, 0)\left[c + \frac{\lambda}{a} L(v,\, 0)\right] dv = -\frac{a}{\lambda\mu}\int\limits_0^{+\infty} d\left(e^{-cv} H_0(v,\, 0)\right) = \frac{a}{\lambda\mu}.$$

Справедливость (8) доказана.

Переходя в (7) к пределу при $s\to 0$ и учитывая формулу (8), имеем

$$\lim_{s\to 0} s\tilde{P}(s) = \left[1 + \frac{\lambda}{a}\mu\int\limits_0^{+\infty}\exp\left\{-\frac{b}{a}v - \frac{\lambda}{a}\int\limits_0^{v} L(w,\, 0)\, dw\right\} dv\right]^{-1}.$$

Перейдем к доказательству формулы (3), для чего в (5) сделаем замену переменной, полагая $u = v + s$. Тогда получаем

$$s\tilde{Q}(s,\, z) = \frac{1}{a} e^{x_0 s}(z-s)^{-k(s)}\left[s\int\limits_0^{z-s} e^{-cv} H_z(v+s,\, s)\, v^{k(s)-1} dv - s\tilde{P}(s)\, \times\right.$$

$$\left.\times \int\limits_0^{z-s} e^{-c_0 v} H_z(v+s,\, s)\, v^{k(s)} dv - s^2\tilde{P}(s)\int\limits_0^{z-s} e^{-cv} H_z(v+s,\, s)\, v^{k(s)-1}\, dv\right]. \tag{9}$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве формулы (8), имеем

$$\lim_{s\to 0} s\int\limits_0^{z-s} e^{-cv} H_z(v+s,\, s)\, v^{k(s)-1} dv = \frac{a}{\lambda\mu}\exp\left\{\frac{\lambda}{a}\int\limits_0^{z} L(w,\, 0)\, dw\right\}. \tag{10}$$

Чтобы получить формулу (3), достаточно перейти в (9) к пределу при $s\to 0$ и учесть формулы (4) и (10). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Полученная формула для стационарного распределения по виду отличается от аналогичной формулы, полученной в [1]. Но с помощью элементарных выкладок можно показать эквивалентность этих формул.

1. *Алимов Д.* Об одном полунепрерывном марковском процессе пуассоновского типа // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 2.— С. 244—247.

Туркм. политехн. ин-т Получено 10.11.88