УДК 519.21

С. А. Алиев

О сходимости ветвящихся процессов Беллмана — Харриса

Получена предельная теорема о сходимости последовательности нормированных ветвящихся процессов Беллмана — Харриса к процессу Иржины (ветвящийся процесс с непрерывным фазовым пространством).

Одержана гранична теорема про збіжність послідовності нормованих розгалужених процесів Белмана—Харіса до процесу Іржини (розгалужений процес з неперервним фазовим простором).

Вначале кратко опишем процессы Беллмана — Харриса. Процесс начинается с одной частицы нулевого возраста, имеющей случайное время жизни l с распределением вероятности $G(t)=P\{l\leqslant t\}$. В конце жизни частица с вероятностью p_k, $k=0, 1, 2, \ldots$, превращается в k новых частиц нулевого возраста. Предполагается, что вероятности p_k не зависят от возраста частицы в момент ее превращения и от числа других существующих частиц. Процесс продолжается до тех пор, пока существует хотя бы одна частица. Таким образом, ветвящийся процесс Беллмана — Харриса определяется функцией распределения времени жизни $G(t)$ и производящей функцией $h(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ числа «потомков» одной частицы. Процесс Беллмана — Харриса, у которого время жизни тождественно равно единице, будет процессом Гальтона — Ватсона.

В [1], использовав двойное неравенство между производящей функцией процесса Беллмана — Харриса и производящей функцией числа частиц в n-м поколении соответствующего процесса Гальтона — Ватсона, получена предельная теорема о сходимости нормированных процессов Беллмана — Харриса к критическому ветвящемуся процессу Иржины.

Напомним, что процессом Иржины называется однородный марковский процесс $\mu(\tau)$, $\tau\geqslant 0$, с непрерывным временем, принимающий вещественные неотрицательные значения, если

$$M[e^{\lambda\mu(\tau)}\mid\mu(0)=x]=e^{xK(\tau,\lambda)},$$

где $\lambda\leqslant 0$, $x\geqslant 0$, а $K(\tau,\lambda)$ при каждом $\tau\geqslant 0$ — логарифм преобразования Лапласа некоторого безгранично делимого распределения в $[0,\infty)$.

В настоящей статье на основе результатов [2] получена предельная теорема о сходимости нормированных процессов Беллмана — Харриса к процессу Иржины. Сформулируем эти теоремы для уравнения восстановления

$$f_n(t)=g_n(t)+\int\limits_0^t f_n(t-u)\,dM_n(u).$$

Предположим, что последовательность $M_n(t)$ слабо сходится к $M(t)$, т. е.

$$\int\limits_0^{\infty} q(t)\,dM_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int\limits_0^{\infty} q(t)\,dM(t),$$

какова бы ни была непрерывная ограниченная функция $q(t)$.

Теорема 1. *Пусть последовательность борелевских функций $g_n(t)$, $n=1, 2, \ldots$, равномерно интегрируема по Риману на $[0,\infty)$ и $g_n(t)\to$*

$g(t)$ *при* $n \to \infty$. *Тогда, если*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_n \int_t^\infty y dM_n(y) = 0$$

и функция распределения $M(t)$ *нерешетчатая, то*

$$f_n(t) \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ t\to\infty \\ t(m_n-1)\to c}]{} \frac{1}{a} e^{c/a} \int_0^\infty g(y)\, dy,$$

где $m_n = M_n[0, \infty) \to 1$, $a = \int_0^\infty t dM(t)$.

Обозначим $V_r = \{(n, t) : | t (m_n - 1) | \leqslant \tau\}$ для всякого $r > 0$.

Теорема 2. *Пусть последовательность борелевских функций* $g_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, *такова, что для некоторого* $\gamma \geqslant 0$

a) $\sup_{(n,t)\in V_r} \frac{|g_n(t)|}{1+t^\gamma} < \infty$; $\frac{1}{t^\gamma} g_n(t) \to \varphi(v)$, $n \to \infty$, $t \to \infty$, $t(m_n - 1) \to v$.

Тогда, если $\sup_n \int_t^\infty y dM_n(y) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, *то*

$$\frac{1}{t^{\gamma+1}} f_n(t) \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ t\to\infty \\ t(m_n-1)\to c}]{} \frac{1}{a} \int_0^1 \varphi(c(1-y))(1-y)^\gamma e^{cy/a} dy.$$

Замечание. В [2] вместо условия а) приведено более жесткое условие

$$\sup_n \sup_{t\geqslant 0} \frac{|g_n(t)|}{1+t^\gamma} < \infty,$$

хотя при доказательстве используется именно условие а).

Теперь сформулируем основной результат. Пусть $\xi_n(t)$, $t \geqslant 0$,— последовательность ветвящихся процессов Беллмана — Харриса с производящей функцией числа частиц в момент времени t

$$F_n(t, z) = M[z^{\xi_n(t)} \mid \xi_n(0) = 1],$$

$G_n(t)$ — функция распределения времени жизни одной частицы в n-м процессе, $h_n(z)$ — производящая функция числа непосредственных потомков одной частицы в n-м процессе. Производящая функция $F_n(t, z)$ удовлетворяет следующему нелинейному интегральному уравнению:

$$F_n(t, z) = z(1 - G_n(t)) + \int_0^t h_n(F_n(t-u, z))\, dG_n(u). \tag{1}$$

Введем следующие условия:

a$_1$) существуют такие нормирующие постоянные $b_n \uparrow \infty$, что

$$nb_n[h_n(e^{\lambda/b_n}) - e^{\lambda/b_n}] \xrightarrow[n\to\infty]{} H(\lambda) \tag{2}$$

при $\lambda \leqslant 0$ со всеми производными по λ при $\lambda = 0$;

a$_2$) $G_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} G(t)$ в каждой точке непрерывности нерешетчатой вероятностной функции распределения $G(t)$;

a$_3$) $\sup_n \int_t^\infty s dG_n(s) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

Следующая теорема частично обобщает один из результатов [3].

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* $a_1) - a_3)$. *Тогда одномерные распределения процессов* $\mu_n(t) = \xi_n(nt)/b_n$ *при условии* $\xi_n(0) = [xb_n]$

слабо сходятся к одномерным распределениям стохастически непрерывного процесса Иржины $\mu(t)$ *с* $\mu(0)=x$ *и кумулянтой* $H(\lambda)/a$, *где* $a=\int\limits_0^\infty t dG(t)$.

Доказательство. Достаточно проверить

$$\{F_n(nt, e^{\lambda/b_n})\}^{[xb_n]} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{xK(t,\lambda)}, \tag{3}$$

где $K(t, \lambda)$ определяется из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial K(t, \lambda)}{\partial t}=\frac{1}{a} H(K(t, \lambda)), \quad K(0, \lambda)=\lambda.$$

Заметим, что соотношение (3) эквивалентно следующему:

$$b_n[F_n(nt, e^{\lambda/b_n})-1] \xrightarrow[n\to\infty]{} K(t, \lambda). \tag{4}$$

Доказательство проведем методом моментов. Для этого будем дифференцировать соотношения (1), (2), (4).

Сначала продифференцируем соотношение (2)

$$n[h_n'(e^{\lambda/b_n})-e^{\lambda/b_n}] \xrightarrow[n\to\infty]{} H'(\lambda).$$

Если положить $\lambda=0$, то получим $n(h_n'(1)-1)\to H'(0)=c$. Очевидно, $h_n'(1)\to 1$ при $n\to\infty$.

Продифференцируем (2) два раза и положим $\lambda=0$

$$\frac{n}{b_n}[h_n''(1)+h_n'(1)-1] \xrightarrow[n\to\infty]{} H''(0).$$

Так как $n(h_n'(1)-1)\to c$, то отсюда получаем

$$\frac{n}{b_n} h_n''(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} H''(0).$$

Дифференцируя соотношение (2) m раз и полагая $\lambda=0$, получаем следующее соотношение:

$$\frac{n}{b_n^{m-1}} h_n^{(m)}(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} H^{(m)}(0), \quad m=2, 3, \dots . \tag{5}$$

Если продифференцировать соотношение (4) m раз, положив $\lambda=0$, то получится

$$\frac{1}{b_n^{m-1}} F_n^{(m)}(nt, 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} K^{(m)}(t, 0). \tag{6}$$

Теперь продифференцируем соотношение (1)

$$F_n'(t, z)=1-G_n(t)+\int\limits_0^t h_n'(F_n(t-u, z)) F_n'(t-u, z) dG_n(u).$$

Если положим $z=1$, то получим следующее уравнение типа восстановления:

$$F_n'(t, 1)=1-G_n(t)+h_n'(1)\int\limits_0^t F_n'(t-u, 1) dG_n(u).$$

Применим теорему 1. Если обозначить

$$f_n(t)=F_n'(t, 1), \quad g_n(t)=1-G_n(t), \quad M_n(u)=h_n'(1) G_n(u),$$

то из условий $a_1)-a_2)$ вытекает, что все условия теоремы 1 выполняются. Заметим, что

$$M(t)=\lim_{n\to\infty} M_n(t)=\lim_{n\to\infty} h_n'(1)\,G_n(t)=G(t),\quad m_n=h_n'(1).$$

Тогда по теореме 1 $F_n'(t,1)\to e^{c/a}$ при $n\to\infty$, $t\to\infty$, $t(h_n'(1)-1)\to c$ и, так как $n(h_n'(1)-1)\to c$, то $F_n'(nt,1)\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{ct/a}$. Продифференцируем соотношение (1) два раза

$$F_n''(t,z)=\int_0^t h_n''(F_n(t-u,z))[F_n'(t-u,z)]^2\,dG_n(u)+$$

$$+\int_0^t h_n'(F_n(t-u,z))\,F_n''(t-u,z)\,dG_n(u).$$

Положим $z=1$ и умножим обе части на n/b_n

$$\frac{n}{b_n}F_n''(t,1)=\frac{n}{b_n}h_n''(1)\int_0^t [F_n'(t-u,1)]^2\,dG_n(u)+$$

$$+\frac{n}{b_n}h_n'(1)\int_0^t F_n''(t-u,1)\,dG_n(u).$$

Обозначим

$$f_n(t)=\frac{n}{b_n}F_n''(t,1),\quad g_n(t)=\frac{n}{b_n}h_n''(1)\int_0^t [F_n'(t-u,1)]^2\,dG_n(u).$$

Учитывая соотношение (5) и асимптотику для $F_n'(nt,1)$, получаем

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ t\to\infty\\ t(m_n-1)\to v}} g_n(t)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ t\to\infty\\ t(m_n-1)\to v}}\frac{n}{b_n}h_n''(1)\int_0^1 [F_n'(t(1-u),1)]^2\,dG_n(tu)=H''(0)\,e^{2v/a}.$$

Таким образом, все условия теоремы 2 выполняются при $\gamma=0$ и $\varphi(v)=H''(0)\,e^{2v/a}$. Тогда по теореме 2

$$\frac{1}{t}f_n(t)=\frac{n}{tb_n}F_n''(t,1)\xrightarrow[\substack{n\to\infty\\ t\to\infty\\ t(h_n'(1)-1)\to c}]{} H''(0)\,e^{c/a}\,\frac{e^{c/a}-1}{c}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{b_n}F_n''(nt,1)\xrightarrow[n\to\infty]{} H''(0)\,e^{ct/a}\,\frac{e^{ct/a}-1}{c}. \tag{7}$$

Заметим, что предельные значения выражений $F_n'(nt,1)$ и $\frac{1}{b_n}F_n''(nt,1)$ — соответственно первый момент и дисперсия процесса Иржины с кумулянтой $H(\lambda)/a$.

Продифференцируем соотношения (1) три раза. Полагая $z=1$ и умножая обе части на n/b_n^2, получаем следующее уравнение типа восстановления:

$$\frac{n}{b_n^2}F_n'''(t,1)=\frac{n}{b_n^2}h_n'''(1)\int_0^t [F_n'''(t-u,1)]^3\,dG_n(u)+\frac{3n}{b_n^2}h_n''(1)\times$$

$$\times\int_0^t F_n''(t-u,1)\,F_n'(t-u,1)\,dG_n(u)+\frac{n}{b_n^2}h_n'(1)\int_0^t F_n'''(t-u,1)\,dG_n(u).$$

Учитывая соотношения (5), (7) и рассуждая так же, как и выше, получаем

$$\frac{1}{b_n^2} F_n'''(nt, 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} H'''(0)\, e^{ct/a} \frac{e^{ct/a}-1}{2c} + 3[H''(0)]^2 e^{ct/a} \frac{(e^{ct/a}-1)^2}{2c^2}.$$

Дифференцируя соотношение (1) m раз, полагая $z=1$ и умножая обе стороны на n/b_n^{m-1}, имеем

$$\frac{n}{b_n^{m-1}} F_n^{(m)}(t, 1) = \frac{n}{b_n^{m-1}} h_n'(1) \int_0^t F_n^{(m)}(t-u, 1)\, dG_n(u) + \frac{n}{b_n^{m-1}} R_m(t, u),$$

где $R_m(t, u)$ — интеграл многочлена от производных $F_n^{(k)}(t-u, 1)$ для $k \leqslant m-1$.

Применяя теорему 2 и рассуждая так же, как и при $m=2, 3$, отсюда получаем следующее:

$$\frac{1}{b_n^{m-1}} F_n^{(m)}(nt, 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} H^{(m)}(0)\, e^{ct/a} \frac{e^{(m-1)ct/a}-1}{(m-1)c} + Q_m(t), \tag{8}$$

где $Q_m(t)$ — многочлен от производных $H^{(k)}(0)$, $k \leqslant m-1$.

Теперь рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial K(t, \lambda)}{\partial t} = \frac{1}{a} H(K(t, \lambda)), \quad K(0, \lambda) = \lambda. \tag{9}$$

Продифференцируем обе части этого уравнения по λ и положим $\lambda = 0$. Получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial K'(t, 0)}{\partial t} = \frac{c}{a} K'(t, 0), \quad K'(0, 0) = 0, \quad c = H'(0).$$

Решая его, находим

$$K'(t, 0) = e^{ct/a}.$$

Продифференцируем обе части уравнения (9) два раза и положим $\lambda = 0$

$$\frac{\partial K''(t, 0)}{\partial t} = \frac{c}{a} K''(t, 0) + \frac{1}{a} H''(0)[K'(t, 0)]^2,$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial K''(t, 0)}{\partial t} = \frac{c}{a} K''(t, 0) + \frac{H''(0)}{a} e^{2ct/a}.$$

Отсюда имеем

$$K''(t, 0) = H''(0)\, e^{ct/a} \frac{e^{ct/a}-1}{c}.$$

Дифференцируя уравнение (9) три раза и полагая $\lambda = 0$, получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial K'''(t, 0)}{\partial t} = \frac{c}{a} K'''(t, 0) + \frac{H'''(0)}{a}[K'(t, 0)]^3 + \frac{3H''(0)}{a} K''(t, 0),$$

$$\frac{\partial K'''(t, 0)}{\partial t} = \frac{c}{a} K'''(t, 0) + \frac{H'''(0)}{a} e^{3ct/a} + \frac{3[H''(0)]^2}{a} e^{ct/a} \frac{e^{ct/a}-1}{c};$$

$$K'''(t, 0) = H'''(0)\, e^{ct/a} \frac{e^{2ct/a}-1}{2c} + 3[H''(0)]^2 e^{ct/a} \frac{(e^{ct/a}-1)^2}{2c^2}.$$

Продифференцируем уравнение (9) m раз. Полагая $\lambda = 0$ и решая полученное уравнение, находим

$$K^{(m)}(t, 0) = H^{(m)}(0)\, e^{ct/a} \frac{e^{(m-1)ct/a}-1}{(m-1)c} + Q_m(t), \tag{10}$$

где $Q_m(t)$ — тот же многочлен от производных $H^{(k)}(0)$, $k \leqslant m-1$, что и в (8). Если сравнить соотношения (8) и (10), то получим соотношение (6).

Очевидно, $b_n[F_n(nt, e^{\lambda/b_n}) - 1]$ и $K(t, \lambda)$ являются аналитическими функциями по λ в полуплоскости $\lambda \leqslant 0$. Поэтому из соотношения (6) вытекает (4), а значит, и (3). Теорема доказана.

1. *Алиев С. А.* Одна предельная теорема для процессов Беллмана — Харриса // Некоторые вопр. теории случайн. процессов.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 3—9.
2. *Шуренков В. М.* Переходные явления теории восстановления в асимптотических задачах теории случайных процессов. I // Мат. сб.— 1980.— **112**, вып. 1.— С. 114—132.
3. *Алиев С. А., Шуренков В. М.* Переходные явления и сходимость процессов Гальтона — Ватсона к процессам Иржины // Теория вероятностей и ее применения.— 1982.— **24**, вып. 3.— С. 443—455.

Ин-т математики и механики АН АзССР, Баку

Получено 20.12.88