УДК 517.946

*Н. Н. Притула*

# Анализ интегрируемости обобщенной модели типа Кадомцева — Петвиашвили

Для обобщенной модели Кадомцева — Петвиашвили (КП) устанавливается существование представления Лакса. Описывается класс вполне интегрируемых двумеризованных уравнений типа КП на операторных многообразиях.

Для узагальненої моделі Кадомцева — Петвіашвілі (КП) установлюється існування зображення Лакса. Описується клас повністю інтегровних двомеризованих рівнянь типу КП на операторних многовидах.

**1.** Законы сохранения. В [1] получены явные формулы симметрий и законы сохранения для уравнения Кадомцева—Петвиашвили (КП), в [2] предложена следующая нелинейная динамическая система, обобщающая нелинейное уравнение КП:

$$v_t = (3/4)\,\partial^{-1} v_{yy} - (3/2)\,v_x \partial^{-1} v_y + (1/4)\,v_{xxx} - (3/2)\,v^2 v_x - 3\varepsilon v v_x, \qquad (1)$$

где считаем, что $v \in M \simeq C^{(\infty)}(\mathbf{S}^1; \mathbb{R})$ — гладкому пространству $2\pi$-периодических функций на $\mathbb{R} \ni x, y$; $\varepsilon, t \in \mathbb{R}$ — соответственно числовой и эволюционный параметры, $\partial^{-1}(\cdot) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{x_0}^{x}(\cdot)\,dx - \int\limits_{x}^{x_0+2\pi}(\cdot)\,dx\right]$ — оператор обратного дифференцирования, $\partial \cdot \partial^{-1} = 1$. В [3] показано, что система (1) обладает стандартным представлением типа Лакса.

Основываясь на градиентно-голономном алгоритме интегрируемости нелинейных динамических систем [4—6], покажем предварительно, что динамическая система, заданная уравнением (1) на $M$ при $v_y = dv/dy \equiv 0$, обладает стандартным представлением типа Лакса и является вполне интегрируемым гамильтоновым потоком. Используя это представление Лакса, можно получить в явном виде конечнозонные решения уравнения (1), быстро убывающие солитонные [3], а также другие типы решений.

Из (1) имеем

$$v_t = (1/4)\,v_{xxx} - (3/2)\,v^2 v_x - 3\varepsilon v v_x \equiv K[v]. \tag{2}$$

Следуя [4], изучим вопрос о наличии бесконечной иерархии законов сохранения для динамической системы, заданной уравнением (2) на многообразии $M$. Для этого рассмотрим асимптотические решения уравнения Лакса [7]

$$\varphi_t + K'^{*}\varphi = 0, \tag{3}$$

где $\varphi \in T^*(M)$, штрих означает производную Фреше нелинейного локального функционала $K : M \to T(M)$, $*$ — сопряжение относительно стандартной билинейной формы на $T^*(M) \times T(M)$. Так как оператор $K'^*$: : $T^*(M) \to T^*(M)$ согласно (2) имеет вид

$$K'^{*} = -\frac{1}{4}\partial^3 + \frac{3}{2}v^2\partial + 3\varepsilon v\partial, \tag{4}$$

то уравнение (2) допускает решение $\varphi \in T^*(M)$ в форме

$$\varphi(x, t; \lambda) = \exp\left[\lambda x + \frac{1}{4}\lambda^3 t + \partial^{-1}\sigma(x, t; \lambda)\right], \tag{5}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}^1$ — комплексный параметр, $x_0 \in \mathbb{R}$ — произвольная отмеченная точка. Локальный функционал $\sigma(x, t; \lambda)$ на $M$ имеет следующее асимптотическое при $|\lambda| \to \infty$ разложение:

$$\sigma(x, t; \lambda) \simeq \sum_{j=0}^{\infty}\sigma_j[v]\,\lambda^{-j}. \tag{6}$$

Из (3), (5) и (6) находим рекуррентные соотношения для локальных функционалов $\sigma_j[v]$, $j \in \mathbb{Z}$, заданных на многообразии $M$

$$\partial^{-1}\sigma_{j,t} - \frac{1}{4}\sigma_{j,xx} - \frac{3}{4}\sigma_{j+2} - \frac{3}{4}\sigma_{j+1,x} - \frac{3}{4}\sum_k \sigma_{j+1-k}\sigma_k -$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{k,n}^{k+n\leqslant j}\sigma_{j-k-n}\sigma_k\sigma_n - \frac{3}{4}\sum_k \sigma_{j-k}\sigma_{k,x} + \frac{3}{2}v^2\sigma_{j,-1} + \frac{3}{2}v^2\delta_{j,-1} +$$
$$+ 3\varepsilon v\delta_{j,-1} + 3\varepsilon v\sigma_j = 0. \tag{7}$$

Соотношение (7) позволяет определить всю иерархию локальных функционалов $\sigma_j[v]$, $j \in \mathbb{Z}$, первые из которых имеют следующий явный вид:

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = 2v^2 + 4\varepsilon v, \quad \sigma_2 = -4vv_x - 4\varepsilon v_x,$$
$$\sigma_3 = 2v_x^2 - 2v^4 + 4vv_{xx} + 4\varepsilon v_{xx} - 8\varepsilon v^3 - 8\varepsilon^2 v^2,$$
$$\sigma_4 = 16v^3 v_x - 4v_x v_{xx} - 4vv_{xxx} - 4\varepsilon v_{xxx} + 48\varepsilon v^2 v_x + 32\varepsilon^2 v v_x,$$

$$\sigma_5 = 4v^6 - 52v^2v_x^2 + 4vv_{xxxx} + 2v_{xx}^2 - 24v^3v_{xx} + 24\varepsilon v^5 + 4\varepsilon v_{xxxx} -$$
$$- 104\varepsilon vv_x^2 - 72\varepsilon^2 v_{xx} - 40\varepsilon^2 v_x^2 + 48\varepsilon^2 v^4 - 48\varepsilon^3 vv_{xx} + 32\varepsilon^3 v^3 + 4v_x v_{xxx}. \quad (8)$$

Локальным функционалам (8) соответствуют законы сохранения $\gamma_j = \partial^{-1}_{(2\pi)}(\sigma_j[v])$, $j \in \mathbb{Z}_+$, первые из которых имеют вид

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = 2\partial^{-1}_{(2\pi)}(2v^2 + 4\varepsilon v), \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \partial^{-1}_{(2\pi)}(2v_x^2 - 2v^4 + 4vv_{xx} -$$
$$- 8\varepsilon v^3 - 8\varepsilon^2 v^2), \quad \gamma_4 = 0, \quad \gamma_5 = \partial^{-1}_{(2\pi)}\Big(4v^6 - \frac{20}{3} v^3 v_{xx} + 2v_{xx}^2 + 24\varepsilon v^5 -$$
$$- 20\varepsilon v^2 v_{xx} - 8\varepsilon^2 vv_{xx} + 48\varepsilon^2 v^4 + 32\varepsilon^3 v^3\Big), \quad (9)$$

где $\partial^{-1}_{(2\pi)}(\cdot) = \int\limits_{x_0}^{x_0+2\pi} (\cdot)\, dx$ — интеграл по периоду. Используя (9), находим выражения для $\operatorname{grad} \gamma_j$, $j = 0, 1, \ldots, 5$,

$$\operatorname{grad} \gamma_0 = 0, \quad \operatorname{grad} \gamma_1 = 4v + 4\varepsilon, \quad \operatorname{grad} \gamma_2 = 0, \quad \operatorname{grad} \gamma_3 = 4(v_{xx} - 2v^3 -$$
$$- 6\varepsilon v^2 - 4\varepsilon^2 v), \quad \operatorname{grad} \gamma_4 = 0, \quad \operatorname{grad} \gamma_5 = 24v^5 - 40v^2 v_{xx} - 40vv_x^2 + 4v_{xxxx} +$$
$$+ 120\varepsilon v^4 - 40\varepsilon vv_{xx} - 40\varepsilon v_x^2 - 40\varepsilon vv_{xx} - 16\varepsilon^2 v_{xx} - 192\varepsilon^2 v^3 + 96\varepsilon^3 v^2. \quad (10)$$

2. Имплектическая пара нетеровых операторов. Покажем, что динамическая система (2) бигамильтонова [8], т. е. существуют такие имплектические и нетеровы операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$, для которых справедливо равенство

$$v_t = \{H, v\}_{\mathcal{L}} = \{\tilde{H}, v\}_{\mathcal{M}} = -\mathcal{L} \operatorname{grad} H = -\mathcal{M} \operatorname{grad} \tilde{H} = K[v], \quad (11)$$

где $H, \tilde{H} \in \mathcal{D}(M)$ — функционалы Гамильтона на $M$ относительно скобок Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{L}}$, $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{M}}$. Так как имплектический оператор $\mathcal{L}: T^*(M) \to T(M)$ удовлетворяет условию нетеровости

$$\mathcal{L}' \cdot K - \mathcal{L}K'^* - K' \cdot \mathcal{L} = 0, \quad (12)$$

то его можно получить как решение этого уравнения при помощи асимптотического метода малого параметра [5]. Для этой цели будем считать, что точка $v \in M$ имеет первый порядок малости по параметру $\mu \to 0: v = \mu v^{(1)} \in M$, $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда для операторов $\mathcal{L}$, $K$, $K'$, $K'^*$ имеются следующие асимптотические разложения:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mu\mathcal{L}_1 + \mu^2\mathcal{L}_2 + \ldots, \quad K = \mu K^{(1)} + \mu^2 K^{(2)} + \mu^3 K^{(3)},$$
$$K' = K_0' + \mu K_1' + \mu^2 K_2', \quad K'^* = K'^* + \mu K'^* + \mu^2 K_2'^*, \quad (13)$$
$$(K^{(j+1)})' = K_j', \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad K_0' = \frac{1}{4}\partial^3, \quad K_1' = -3\varepsilon\partial v^{(1)},$$

$$K_2' = -\frac{3}{2}\partial v^{(1)2}, \quad K_0'^* = -\frac{1}{4}\partial^3, \quad K_1'^* = 3\varepsilon v^{(1)}\partial, \quad K_2'^* = \frac{3}{2} v^{(1)2}\partial.$$

Подставляя разложение (13) в уравнение (12), находим

$$\frac{d\mathcal{L}_0}{dt_0} + \mathcal{L}_0 K_0'^* + K_0'\mathcal{L}_0 = 0,$$

$$\frac{d\mathcal{L}_1}{dt_0} = \mathcal{L}_0 K_1'^* + \mathcal{L}_1 K_0'^* + K_0'\mathcal{L}_1 + K_1'\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_0' K^{(2)}, \quad (14)$$

$$\frac{d\mathcal{L}_2}{dt_0} = \mathcal{L}_0 K_2'^* + \mathcal{L}_1 K_1'^* + \mathcal{L}_2 K_0'^* + K_0'\mathcal{L}_2 + K_1'\mathcal{L}_1 + K_2'\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1' K^{(2)}, \ldots.$$

Умножая уравнение (14) на элемент $\varphi^{(0)} \in T^*(M)$, удовлетворяющий соотношению

$$\frac{d\varphi^{(0)}}{dt_0} = -K_0'^{*}\varphi^{(0)}, \tag{15}$$

последовательно находим

$$\frac{d}{dt_0}(\mathscr{L}_0\varphi^{(0)}) = K_0'(\mathscr{L}\varphi^{(0)}),$$

$$\frac{d}{dt_0}(\mathscr{L}_1\varphi^{(0)}) - K_0'(\mathscr{L}_1\varphi^{(0)}) = \mathscr{L}_0 K'^{*}\varphi^{(0)} + K_1'(\mathscr{L}_0\varphi^{(0)}), \tag{16}$$

$$\frac{d}{dt_0}(\mathscr{L}_2\varphi^{(0)}) - K_0'(\mathscr{L}_2\varphi^{(0)}) = \mathscr{L}_0 K_2'^{*}\varphi^{(0)} + \mathscr{L}_1 K_1'^{*}\varphi^{(0)} + K_1'(\mathscr{L}_1\varphi^{(0)}) + {}$$
$$+ K_2'(\mathscr{L}_0\varphi^{(0)}) - \mathscr{L}_1'(K^{(2)}\varphi^{(0)}).$$

Для решения уравнений (16) воспользуемся методом разложения в ряд Фурье вследствие периодичности многообразия $M$

$$v^{(1)} = \sum_j v_j^{(1)} \exp\left(jx + \frac{1}{4} j^3 t\right), \quad \varphi^{(0)} = \sum_j \varphi_j^{(0)} \exp\left(jx + \frac{1}{4} j^3 t\right), \tag{17}$$

где $j \in i\mathbb{Z}$, $i = \sqrt{-1}$, и произведена замена $t_0 \to t \in \mathbb{R}$. При получении разложений (16) использованы равенства (15) (при $t_0 \to t$) и $v_t^{(1)} = K_0' \cdot v^{(1)}$. Подставляя (17) в уравнения (16) и решая их в явном виде методом Фурье, учитывая при этом имплектичность и кососимметричность оператора $\mathscr{L}$, находим первое частное решение для оператора $\mathscr{L}_0 : \mathscr{L}_0 = \partial^{2m+1}$, $m \in \mathbb{Z}$. Из равенства (15) и второго уравнения (16) убеждаемся, что в случае $m = 0$, т. е. $\mathscr{L}_0 = \partial$, имеем $\mathscr{L}_1 = 0$, $\mathscr{L}_2 = 0$ и т. д. Тем самым получен первый имплектический оператор

$$\mathscr{L} = \partial = \partial/\partial x \tag{18}$$

для динамической системы (2). Полагая далее $m = 1$, получаем второй имплектический оператор

$$\mathscr{M} = \partial^3 - 4\varepsilon(\partial v + v\partial) - 2(\partial v^2 + v^2\partial) + 4v_x\partial^{-1}v_x. \tag{19}$$

Отсюда, очевидно, в силу согласованности $(\mathscr{L}, \mathscr{M})$-пары (18), (19) все операторы $\mathscr{L}^{(n)} = \mathscr{L}\Lambda^n$, $n \in \mathbb{Z}$, будут имплектическими и нетеровыми для (2), где $\Lambda = \mathscr{L}^{-1}\mathscr{M}$, $\Lambda = \partial^2 - 4v\partial^{-1}v\partial - 4\varepsilon v - 4\varepsilon\partial^{-1}v\partial$ — рекурсионный оператор, удовлетворяющий уравнению Лакса $\Lambda' K = [\Lambda, K'^{*}]$ и условию наследственной рекурсионности, т. е. $[\Lambda^{*\prime}, \Lambda]$ — симметричный оператор. Итак динамическая система (2) является интегрируемой. Кроме того, она обладает бесконечной иерархией инволютивных относительно скобок Пуассона законов сохранения $\gamma_{2j+1} \in \mathscr{D}(M)$, $j \in \mathbb{Z}$, где $\operatorname{grad} \gamma_{2j+1} = \Lambda^j \operatorname{grad} \gamma_1$. Причем она имеет стандартный гамильтонов вид (11), где

$$H = \frac{1}{8}\partial_{(2\pi)}^{-1}(v^4 - vv_x + 4\varepsilon v^3), \quad \tilde{H} = \frac{1}{8}\partial_{(2\pi)}^{-1}v^2. \tag{20}$$

Таким образом, справедливо утверждение.

Утверждение 1. Динамическая система (2) бигамильтонова и имеет вид (11), где $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ — факторизующая оператор $\Lambda = \mathscr{L}^{-1}\mathscr{M}$ пара гамильтоновых операторов (18), (19) на многообразии $M$, а $H, \tilde{H} \in \mathscr{D}(M)$ — функционалы Гамильтона (20) на $M$.

3. Представление типа Лакса. Перейдем к задаче построения представления типа Лакса, позволяющего проинтегрировать ее методом обратной задачи [3] в явном виде.

Если $L[v; \lambda]$ — $L$-оператор в представлении типа Лакса для (2), то для градиента вида $\varphi(\lambda) = \operatorname{grad} \operatorname{tr} S(x_0; \lambda)$ для следа его матрицы монодромии [3] $S(x_0; \lambda)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, выполняется [4] уравнение

$$z^q(\lambda)\mathscr{L}\varphi(\lambda) = \mathscr{M}\varphi(\lambda), \tag{21}$$

где $z^q(\lambda) = \lambda^2$, $q = 2 \in \mathbb{Z}$, — собственное значение рекурсионного оператора: $\Lambda: T^*(M) \to T^*(M)$ при $|\lambda| \to \infty$. Сама матрица $S(x; \lambda)$ удовлетворяет

$$\frac{d}{dx} S = [\mathcal{A}, S]. \tag{22}$$

Так как функция $\operatorname{grad} \gamma(\lambda) \sim \operatorname{grad} \Delta(\lambda)$ удовлетворяет в силу (21) линейному дифференциальному уравнению минимального третьего порядка, то оператор $L[v; \lambda]$ представим в виде

$$L[v; \lambda] = \frac{d}{dx} - \begin{Vmatrix} a & b \\ c & -a \end{Vmatrix} \equiv \frac{d}{dx} - \mathcal{A}[v; \lambda], \quad \operatorname{tr} \mathcal{A}[v; \lambda] = 0, \tag{23}$$

где $a$, $b$, $c$ — некоторые (пока неопределенные) локальные функционалы на $M$. В силу (9) и уравнения (2) приходим к выводу, что $\mathcal{A}[v; \lambda] = \mathcal{A}(v; \lambda)$ и $\alpha[\mathcal{A}] = (1/2)\, \mathcal{A}_v$. Тогда согласно [4] имеем

$$\operatorname{grad} \Delta(\lambda) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(S\mathcal{A}_v). \tag{24}$$

Из соотношений (24) и (21) находим

$$\lambda^2 \partial \operatorname{grad} \Delta(\lambda) = [\partial^3 - 4\varepsilon(\partial v + v\partial) - 2(\partial v^2 + v^2\partial) + 4v_x \partial^{-1} v_x] \operatorname{grad} \Delta(\lambda),$$

что эквивалентно матричному уравнению

$$\lambda^2 \left\{ v_x \left( [[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}], \mathcal{A}] + \frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}] + \left[\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_v, \mathcal{A}\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{A}_v \right) - \right.$$

$$\left. - v_{xx}\left([\mathcal{A}_v, \mathcal{A}] + \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_v\right) \right\} = v_x \Big( [[[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}], \mathcal{A}], \mathcal{A}] + \frac{\partial}{\partial x}[[[\mathcal{A}, \mathcal{A}], \mathcal{A}], \mathcal{A}] +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}[[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}], \mathcal{A}], \mathcal{A}\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}], \mathcal{A}] + \left[\left[\frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}], \mathcal{A}\right], \mathcal{A}\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}], \mathcal{A}\right] + \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}], \mathcal{A}\right] + \left[\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{A}_v, \mathcal{A}\right], \mathcal{A}\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{A}_v, \mathcal{A}\right] + \left[\frac{\partial^3}{\partial x^3}\mathcal{A}_v, \mathcal{A}\right] + \frac{\partial^4}{\partial x^4}\mathcal{A}_v - 8\varepsilon v[[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}], \mathcal{A}] -$$

$$- 12\varepsilon v_x[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}] - 8\varepsilon v\frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}] - 4\varepsilon v_{xxx}\mathcal{A}_v - 4\varepsilon v_x\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_v - 8\varepsilon v \times$$

$$\times \left[\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_v, \mathcal{A}\right] - 8\varepsilon v_x\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_v - 8\varepsilon v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{A}_v - 12vv_x[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}] - 4vv_{xx}\mathcal{A}_v -$$

$$- 4vv_x\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_v - 4v^2[[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}], \mathcal{A}] - 4v^2\frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}] - 4v^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_v, \mathcal{A}\right] -$$

$$- 8vv_x\mathcal{A}_v - 4v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{A}_v\Big) - [[[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}], \mathcal{A}], \mathcal{A}] - \frac{\partial}{\partial x}[[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}], \mathcal{A}] -$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}], \mathcal{A}\right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2}[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}] - \left[\left[\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_v, \mathcal{A}\right], \mathcal{A}\right] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_v, \mathcal{A}\right] - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{A}_v, \mathcal{A}\right] - \frac{\partial^3}{\partial x^3}\mathcal{A}_v + 8\varepsilon v[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}] + 4\varepsilon v_x\mathcal{A}_v +$$

$$+ 8\varepsilon v\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_v + 4vv_x\mathcal{A}_v + 4v^2[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}] + 4v^2\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_v. \tag{25}$$

Так как соотношение (25) должно выполняться при всех $v \in M$ тождественно, легко получаем из него дополнительные соотношения для матрицы

$\mathcal{A}(v;\lambda):\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_v=0,\ \frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}]=0.$ Тогда (25) примет вид

$$v_x\Big([[[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}],\mathcal{A}],\mathcal{A}]+\frac{\partial}{\partial x}[[[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}],\mathcal{A}],\mathcal{A}]+\Big[\frac{\partial}{\partial x}[[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}],\mathcal{A}],\mathcal{A}\Big]+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}[[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}],\mathcal{A}]+\Big[\Big[\frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}],\mathcal{A}\Big],\mathcal{A}\Big]+\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}],\mathcal{A}\Big]+$$
$$+\Big[\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}],\mathcal{A}\Big]+\frac{\partial^3}{\partial x^3}[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}]-8\varepsilon v\frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}]\Big)-[[[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}],\mathcal{A}],\mathcal{A}]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}[[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}],\mathcal{A}]-\Big[\frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}],\mathcal{A}\Big]-\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}]=v_x(\lambda^2+8\varepsilon v+$$
$$+4v^2)[[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}],\mathcal{A}]+(12\varepsilon v_x^2-12\varepsilon v_x^2v-8\varepsilon v-4v^2-\lambda^2v_{xxx})[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}]+$$
$$+(\lambda^2v_x+4v^2v_x)\frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}]+(4\varepsilon v_xv_{xx}+4vv_xv_{xx}+8vv_x^2-4\varepsilon v_x-4vv_x)\mathcal{A}_v. \tag{26}$$

Для решения соотношения (26) используем метод теории алгебр Ли. Из [5, 6] следует, что матрица $\mathcal{A}[v;\lambda]$ принадлежит некоторой подалгебре Ли $\mathfrak{G}$ алгебры $\mathrm{sl}(2;\mathbb{C}^1)$. Если элементы $Y_j\in\mathfrak{G}$, $j=\overline{1,\nu}$, — генераторы алгебры Ли $\mathfrak{G}$ со свойствами $[Y_j,Y_k]=\sum_{s=1}^{\nu}c_{jk}^sY_s$, где $c_{j,k}^s\in\mathbb{C}^1$; $j,s,k=\overline{1,\nu}$,— структурные константы, то, разлагая каждый элемент $Y_j\in\mathrm{sl}(2;\mathbb{C}^1)$, $j=\overline{1,\nu}$, по базису $[L_+,L_-]=L_0$, $[L_0,L_\pm]=\pm 2L_\pm$, после некоторых вычислений получаем окончательно в явном виде пару калибровочно-эквивалентных $L$-операторов со свойством изоспектральности типа Лакса $\sigma_t(L)=0$, $v_t=K[v]$; $\sigma(L)$ — спектр оператора $L$:

$$L_1[v;\lambda]=\frac{\partial}{\partial x}-\begin{Vmatrix}-v & 1\\ 2\varepsilon v+\lambda^2 & v\end{Vmatrix},$$
$$L_2[v;\lambda]=\frac{\partial}{\partial x}-\begin{Vmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\varepsilon^2} & v+\varepsilon\\ v+\varepsilon & -\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\varepsilon^2}\end{Vmatrix}. \tag{27}$$

В силу (27) справедливо утверждение.

Утверждение 2. *Двумеризованные операторные аналоги* (27) $v(x)\to\hat v(x;\ y|z)$ *в пространстве* $\mathbb{C}^{(\infty)}(S^1;\ \mathcal{B}^2)$, *где* $\mathcal{B}$ *— ассоциативная нормированная алгебра интегральных операторов, имеют следующий вид*:

$$L_1[\hat v;\lambda]=\frac{\partial}{\partial x}-\begin{Vmatrix}-\hat v & 1\\ 2\varepsilon\hat v+\lambda^2 & \hat v\end{Vmatrix},\quad L_2[\hat v;\lambda]=\frac{\partial}{\partial x}-\begin{Vmatrix}\lambda-\delta' & \hat v+\varepsilon\\ \hat v+\varepsilon & \delta'-\lambda\end{Vmatrix}, \tag{28}$$

$\hat v\in M$ *— многообразию интегральных операторов.*

При условии, что ядро $\hat v(x;\ y|z)=\delta(y-z)v(x,\ y)+\delta'(y-z)$, где $\delta$ — обобщенная дельта-функция Дирака, свойство изоспектральности $\sigma_t(L)=0$ для оператора $L_1$ (28) согласовано с обобщенным уравнением КП (1), а для оператора $L_2$ (28) свойство изоспектральности при $\hat v(x;\ y|z)=v(x,\ y)\delta(y-z)$ согласовано с новым интегрируемым двумеризованным уравнением.

1. *Oevel W., Fuchssteiner B.* Explicit formulas for symmetries and conservation laws of the Kadomtsev — Petviaschvili equation // Phys. Lett. A.— 1982.— **85**, N 7.— P. 323—327.
2. *Rogers C.* The Harry Dym equation 2 + 1 dimension: a reciprocal link with the Kadomtsev — Petviaschwili equation // Ibid.— 1987.— **120**, N 1.— P. 15—18.
3. *Теория* солитонов (метод обратной задачи) / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.— М. : Наука, 1980.— 319 с.
4. *Прикарпатский А. К.* Градиентный алгоритм построения критериев интегрируемости нелинейных динамических систем // Докл. АН СССР.— 1986.— **287**, № 4.— С. 827—832.
5. *Интегрируемые* динамические системы: спектрльные и дифференциально-геометрические аспекты / Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко.— Киев : Наук. думка, 1987.— 296 с.
6. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К.* Полная интегрируемость нелинейных систем Ито и Бени — Каупа: градиентный алгоритм и представление Лакса // Теорет и мат. физика.— 1986.— **67**, № 3.— С. 410—425.
7. *Lax P. D.* Periodic solutions of the Korteweg — de Vries equation // Commun. Pure Appl. Math.— 1975.— **28**, N 1.— P. 141—188.
8. *Magri F. A.* Simple model of the integrable Hamiltonian equation // J. Math. Phys.— 1978.— **19**, N 3.— P. 1156—1162.

Львов. ун-т

Получено 04.04.89