УДК 517.944:519.46

И. А. Егорченко

Дифференциальные инварианты алгебры Евклида

Для набора скалярных функций, зависящих от n переменных, найдены функциональные базисы дифференциальных инвариантов второго порядка алгебры Евклида и конформной алгебры.

Для набору скалярних функцій, що залежать від n змінних, знайдені функціональні базиси диференціальних інваріантів другого порядку алгебри Евкліда та конформної алгебри.

1. Введение и основные результаты. В настоящей статье построены в явном виде функциональные базисы дифференциальных инвариантов второго порядка алгебры Евклида $AE(n)$ с базисными операторами

$$\partial_a = \partial/\partial x_a, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a \tag{1}$$

для набора m скалярных функций. (Здесь и в дальнейшем используемые в качестве индексов буквы a, b, c, d принимают значения от 1 до n, где n — количество пространственных переменных, $n \geqslant 3$.)

Алгебра $AE(n)$ (1) является алгеброй инвариантности широкого класса многомерных уравнений математической физики [1].

Определение 1 [2, 3]. *Функция*

$$F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{l}{u}), \tag{2}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u^1, \ldots, u^m)$, $\underset{l}{u}$ *— набор всех частных производных функций l-го порядка, называется дифференциальным инвариантом алгебры Ли с базисными операторами X_i, если она является инвариантом l-го продолжения этой алгебры*

$$\overset{l}{X}_i F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{l}{u}) = \lambda_i(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{l}{u}) F, \tag{3}$$

при $\lambda_i \equiv 0F$ называется абсолютным дифференциальным инвариантом, при $\lambda_i \not\equiv 0$ — относительным.

Далее будем называть абсолютные инварианты просто инвариантами.

Определение 2. *Набор функционально-независимых инвариантов порядка $r \leqslant l$ алгебры Ли $\{X_i\}$, через которые можно выразить любой ее инвариант порядка $r \leqslant l$, называется функциональным базисом порядка l алгебры $\{X_i\}$.*

Далее будут использоваться следующие обозначения:

$$u_a = \partial u/\partial x_a, \quad u_{ab} = \partial^2 u/\partial x_a \partial x_b,$$

$$S_k(u_{ab}) = u_{a_1a_2}u_{a_2a_3} \ldots u_{a_{k-1}a_k}u_{a_ka_1},$$

$$S_{jk}(u_{ab}, v_{ab}) = u_{a_1a_2} \ldots u_{a_{j-1}a_j}v_{a_ja_{j+1}} \ldots v_{a_ka_1},$$

$$R_k(u_a, u_{ab}) = u_{a_1}u_{a_k}u_{a_1a_2}u_{a_2a_3} \ldots u_{a_{k-1}a_k}.$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до n. Везде в списках инвариантов k принимают значения от 1 до n, j — от 0 до k.

Сформулируем основные результаты работы в виде теорем.

Теорема 1. *Функциональный базис дифференциальных инвариантов второго порядка алгебры Евклида $AE(n)$ с базисными операторами (1) для скалярной функции $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ состоит из $2n + 1$ инвариантов*

$$u, S_k(u_{ab}), \quad R_k(u_a, u_{ab}). \tag{4}$$

Расширенная алгебра Евклида для функции u определена как $AE(n) \dotplus D$, где

$$D = x_a\partial_a + \lambda u\partial_u, \quad \partial_u = \partial/\partial u. \tag{5}$$

Конформная алгебра $AC(n)$ задается базисными операторами ∂_a, J_{ab} (1), D (5) и

$$K_a = 2x_aD - x_bx_b\partial_a. \tag{6}$$

Теорема 2. *Функциональный базис инвариантов второго порядка расширенной алгебры Евклида имеет вид*

$$\text{при } \lambda \neq 0 \ \frac{R_k(u_a, u_{ab})}{u^{k(1-2/\lambda)+1}}, \quad \frac{S_k(u_{ab})}{u^{k(1-2/\lambda)}},$$

$$\text{при } \lambda = 0 \ \frac{S_k(u_{ab})}{(u_{aa})^k}, \quad k \neq 1, \quad \frac{R_k(u_a, u_{ab})}{(u_{aa})^k},$$

соответствующий базис конформной алгебры $AC(n)$ —

$$\text{при } \lambda \neq 0 \quad S_k(\theta_{ab})\, u^{k(2/\lambda-1)},$$

$$\text{при } \lambda = 0 \ u,\ S_k(w_{ab})(u_au_a)^{-2k}, \quad k \neq n,$$

$$\theta_{ab} = \lambda u_{ab} + (1-\lambda)\frac{u_au_b}{n} + \frac{\lambda\delta_{ab}}{2-n}\left(u_{cc} - \frac{u_cu_c}{u}\right),$$

$$w_{ab} = u_cu_c\left(u_{ab} + \frac{\delta_{ab}}{2-n}u_{dd}\right) - u_c(u_au_{bc} + u_bu_{ac}), \tag{7}$$

δ_{ab} — *символ Кронекера.*

Теорема 3. *Дифференциальные инварианты второго порядка алгебры $AE(n)$ (1) для набора u^r, $r = 1, \ldots, m$ представляют собой функции от следующих выражений:*

$$u^r, \quad S_{jk}(u^1_{ab}, u^r_{ab}), \quad R_k(u^r_a, u^1_{ab}), \tag{8}$$

расширенной алгебры Евклида $AE(n) \oplus D$, $D = x_a\partial_a + \lambda u^r\partial_{u^r}$, по r суммирование от 1 до m,

$$\lambda \neq 0: \quad \frac{u^r}{u^1}, \quad r = 2, \ldots, m, \quad \frac{S_{jk}(u^1_{ab}, u^r_{ab})}{(u^1)^{k(1-2/\lambda)}}, \quad \frac{R_k(u^r, u^1_{ab})}{(u^1)^{k(1-2/\lambda)+1}},$$

$$\lambda = 0: \quad u^r, \quad \frac{R_k(u^r_a, u^1_{ab})}{(u^1_{aa})^k}, \quad \frac{S_{jk}(u^1_{ab}, u^r_{ab})}{(u^1_{aa})^k} \ (\text{при } r = 1 \ k \neq 1),$$

конформной алгебры $AC(n) = AE(n) \oplus D \oplus \{K_a\}$, $K_a = 2x_aD - x_bx_b\partial_a$,

$$\lambda \neq 0: \quad S_{jk}(\theta^r_{ab}, \theta^1_{ab})(u^1)^{k(2/\lambda-1)}, \quad u^r/u^1, \quad R_k(\theta^r_a, \theta^1_{ab})(u^1)^{k(2/\lambda-1)-1},$$

$$r = 2, \ldots, m,$$

$$\lambda = 0: \quad u^r,\ r = 1, \ldots, m, \quad (u^1_du^1_d)^{-2k}S_{jk}(w^1_{ab}, w^r_{ab}), \ (u^1_du^1_d)^{-2k+1}R_k(u^r_a, w^1_{ab}),$$

$$r = 2, \ldots, m$$

(для набора инвариантов $(u^1_du^1_d)^{-2k}S_k(w^1_{ab})$ $k \neq n$); тензоры θ^r_{ab}, w^r_{ab} строятся аналогично (7), $\theta^r_a = u^r_a/u^r - u^1_a/u^1$.

2. Доказательство теорем. Абсолютные дифференциальные инварианты получаются как решения линейной системы уравнений в частных производных первого порядка (3), следовательно, количество элементов функционального базиса равно количеству интегралов этой системы. Количество функционально независимых интегралов системы равно разности количества переменных, от которых зависят искомые функции, и ее ранга, в рассматриваемом случае равного рангу продолженной алгебры операторов [3].

Для доказательства того факта, что найденные N инвариантов F_i вида (2) представляют собой функциональный базис, необходимо и достаточно доказать, что 1) F_i — инварианты; 2) набор инвариантов F_i является полным, т. е. N равно разности количества переменных $(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{l}{u})$ и ранга системы определяющих уравнений; 3) F_i функционально независимы.

Дифференциальные инварианты второго порядка ищем в виде $F = F(x_a, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u})$. Из условия инвариантности относительно операторов сдвига ∂_a следует, что F не зависит от x; очевидно, u — инвариант операторов (1). Поэтому достаточно искать инварианты, зависящие от $\underset{1}{u}$ и $\underset{2}{u}$. Критерий абсолютной инвариантности (3) в этом случае имеет вид

$$\hat{J}_{ab} F(\underset{1}{u}, \underset{2}{u}) = 0, \tag{9}$$

где

$$\hat{J}_{ab} = u^r_a \partial_{u^r_b} - u^r_b \partial_{u^r_a} + u^r_{ac} \partial_{u^r_{bc}} - u^r_{bc} \partial_{u^r_{ac}}, \tag{10}$$

по r суммирование от 1 до m.

Таким образом, задача нахождения дифференциальных инвариантов алгебры $AE(n)$ второго порядка сводится к построению базиса инвариантов алгебры вращений $AO(n)$ с базисными операторами (10) для m векторов и симметричных тензоров ранга 2. Для $n = 3$ эта задача решена в монографии [4].

Лемма 1. *Ранг алгебры $AO(n)$ (10) равен $n(n-1)/2$.*

Доказательство. Лемму достаточно доказать для $m = 1$. Алгебра (10) имеет $n(n-1)/2$ базисных операторов. Положим $u_{ab} = 0$ при $a \neq b$ и запишем столбцы коэффициентов при $\partial_{u_{ab}}$ операторов (10)

$$\begin{pmatrix} u_{11} - u_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & u_{11} - u_{33} & \ldots & 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & u_{n-1 n-1} - u_{nn} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

При $0 \neq u_{aa} \neq u_{bb}$, $a \neq b$, определитель матрицы (11) не равен 0, следовательно, ее общий ранг равен $n(n-1)/2$. Значит, и ранг матрицы коэффициентов операторов (10), т. е. ранг этой алгебры, не может быть меньше $n(n-1)/2$.

Инварианты для вектора (u_a) и симметричного тензора (u_{ab}) зависят от $n(n+3)/2$ их элементов. Из леммы 1 тогда следует, что функциональный базис алгебры $AO(n)$ для (u_a) и (u_{ab}) должен состоять из $2n$ элементов. Тот факт, что выражения (4) — инварианты алгебры $AO(n)$, легко доказывается прямой проверкой.

Следовательно, для доказательства теоремы 1 осталось установить справедливость следующего утверждения.

Лемма 2. *Инварианты S_k, R_k (4) функционально независимы.*

Доказательство. Для доказательства независимости выражений (4) достаточно рассмотреть случай $u_{ab} = 0$, $a \neq b$; $u_{aa} \neq 0$. Запишем якобиан набора инвариантов

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & & & \\ 2u_{11} & \ldots & 2u_{nn} & & 0 & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ nu_{11}^{n-1} & \ldots & nu_{nn}^{n-1} & & & \\ & & & 2u_1 & \ldots & 2u_n \\ & \ldots & & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & & & 2u_1 u_{11}^{n-1} & \ldots & 2u_n u_{nn}^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Якобиан (12) с точностью до множителя равен произведению определителей Ван-дер-Монда и не равен нулю, если $u_{aa} \neq u_{bb}$, $a \neq b$. Следовательно, инварианты (4) функционально независимы.

Таким образом, доказано, что набор (4) представляет собой функциональный базис инвариантов второго порядка алгебры $AO(n)$.

З а м е ч а н и е. В [5] доказано, что при $n \geqslant 3$ для ортогональной группы $O(n)$ не существует относительных инвариантов.

Рассмотрим случай двух векторов (u_a), (v_a) и двух симметричных тензоров ранга 2 (u_{ab}), (v_{ab}). Операторы алгебры вращений имеют вид (10), $u = u^1$, $v = u^2$.

В этом случае функциональный базис состоит из $2\left(\frac{n(n-1)}{2} + 2n\right) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+7)}{2}$ элементов, в качестве которых выберем выражения

$$R_k(u_a, u_{ab}), \quad R_k(v_a, u_{ab}), \quad S_{jk}(u_{ab}, v_{ab}). \tag{13}$$

Инвариантность выражений (13) относительно операторов (10) легко доказывается путем их непосредственной подстановки в (9). Для доказательства функциональной независимости используем следующую лемму.

Л е м м а 3. *Пусть* $U = (u_{ab})_{a,b=1,\dots,n}$, $V = (v_{ab})_{a,b=1,\dots,n}$ — *симметричные матрицы. Тогда выражения*

$$S_{jk} = \operatorname{spur} U^j V^{k-j}, \quad k = 1, \dots, n, \ j = 0, \dots, k. \tag{14}$$

функционально независимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства леммы достаточно показать, что общий ранг матрицы Якоби выражений (14) равен $n(n+3)/2$. Ограничимся рассмотрением случая, когда $u_{ab} = 0$, $a \neq b$. Тогда (14) будут зависеть от $n(n+3)/2$ переменных и их независимость равносильна неравенству нулю якобиана. Запишем элементы якобиана, необходимые для дальнейших рассуждений

$$\left|\begin{array}{cccccccccc}
1 & \dots & 1 & & & & & & & \\
2u_{11} & \dots & 2u_{nn} & & & & & & & \\
\cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & & & & 0 & & & \\
nu_{11}^{n-1} & \dots & nu_{nn}^{n-1} & & & & & & & \\
 & & & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\
 & \dots & & 2v_{11} & 4v_{12} & \dots & 4v_{1n} & 2v_{22} & \dots & 2v_{nn} \\
 & & & & & \dots & & & &
\end{array}\right|. \tag{15}$$

Так как в первых n строках все элементы, кроме первых n, равны нулю, то якобиан (15) равен произведению якобиана элементов $\operatorname{spur} U^k$, $k = 1, \dots, n$, и якобиана всех остальных элементов. Согласно лемме 2 все выражения $\operatorname{spur} U^k$, $k = 1, \dots, n$, независимы и их якобиан не равен нулю; таким образом, остается показать неравенство нулю якобиана и функциональную независимость только для элементов $\operatorname{spur} U^j V^{k-j}$, $j = 0, \dots$ $\dots, k-1$, $k = 1, \dots, n$. Из (15) следует, что достаточно показать неравенство этого якобиана нулю и без $n+1$-х строки и столбца. Следовательно, для доказательства леммы достаточно показать, что независимыми являются следующие выражения:

$$\operatorname{spur} U^j V^{k-j} V, \quad j = 0, \dots, k; \qquad k = 1, \dots, n-1. \tag{16}$$

Рассуждения, приведенные выше, позволяют воспользоваться для доказательства леммы принципом математической индукции.

При $n = 1$ u_{11} и v_{11} независимы и лемма справедлива.

Предположим ее справедливость для $n-1$ и докажем отсюда ее утверждение для n. Пусть выражения

$$\operatorname{spur} U^j V^{k-j}, \quad j = 0, \dots, k, \quad k = 1, \dots, n-1, \tag{17}$$

где U, V — симметричные матрицы $(n-1) \times (n-1)$, независимы. Докажем отсюда независимость (16) для таких же матриц. Наборы (16) и (17) совпадают за исключением следующих множеств:

$$\operatorname{spur} U^j V^{n-j}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \tag{18}$$

входят только в (16),

$$\operatorname{spur} U^j, \quad j = 1, \ldots, n-1, \tag{19}$$

и $\operatorname{spur} V$ входят только в (17).

Предположение о справедливости леммы для $n-1$ означает, что для двух симметричных тензоров ранга 2 множество (17) будет функциональным базисом инвариантов алгебры вращений, следовательно, все инварианты для этих тензоров выражаются через (17). Для доказательства функциональной независимости выражений (16) достаточно доказать невырожденность матрицы Якоби функций, выражающих инварианты (16) через (17). Эта матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & 0 & & \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \ddots & & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & W & \\ \hline & & & 0 & \text{частные производные выражений} \\ & 0 & & \ldots & \text{инвариантов (18) через (17) по} \\ & & & 0 & \text{(19) (кроме } \operatorname{spur} V \text{ и } \operatorname{spur} V^n) \end{array} \right), \tag{20}$$

W — производная по $\operatorname{spur} V$ выражения $\operatorname{spur} V^n$ через $\operatorname{spur} V^k$, $k = 1, \ldots$ $\ldots, n-1$, по теореме Гамильтона — Кэли, $W \not\equiv 0$.

Осталось доказать неравенство нулю якобиана выражений

$$\operatorname{spur} U^j V^{n-j} = F^i (\operatorname{spur} U^k, k = 1, \ldots, n-1; \omega), \tag{21}$$

где ω — остальные инварианты (17).

При $V \equiv E$ соответствующий квадрант матрицы (20) будет представлять собой единичную матрицу, и следовательно, он не равен тождественно нулю, что доказывает невырожденность матрицы (20). Выражения (21) могут быть получены из теоремы Гамильтона — Кэли. Они будут полиномами, а значит, непрерывными функциями своих аргументов.

Функциональная независимость выражений (16) для матриц $(n-1) \times$ $\times (n-1)$ влечет за собой их независимость и для матриц $n \times n$. Из приведенного выше следует независимость выражений (14). Лемма доказана.

Используя лемму 3, легко доказать первое утверждение теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1.

Перейдем к доказательству утверждений о базисах расширенной алгебры Евклида и конформной алгебры.

Для нахождения абсолютных дифференциальных инвариантов алгебры $AE(n) \dotplus D$ необходимо добавить к (9) условие

$$\lambda F_{u^r} u^r + (\lambda - 1) u^r_a F_{u^r_a} + (\lambda - 2) u^r_{ab} F_{u^r_{ab}} = 0, \tag{22}$$

по r суммирование от 1 до m.

Решая уравнение (22) для $F = F(u^r, R_k(u^r_a, u^1_{ab}), S_{jk}(u^1_{ab}, u^r_{ab}))$, получаем функциональные базисы расширенной алгебры Евклида для одной или нескольких скалярных функций.

Дифференциальные инварианты второго порядка алгебры $AC(n)$ определяются условиями (10), (22) и

$$2\lambda (u^r k_a F_{u^r_a} + (k_a u^r_b + k_b u^r_a) F_{u^r_{ab}} + 2k_c u^r_c \delta_{ab} F_{u^r_{ab}} - 2 (u^r_a k_b + u^r_b k_a) F_{u^r_{ab}} = 0, \tag{23}$$

k_c — произвольные действительные числа.

Решение такой системы для произвольного n требует громоздких вычислений. Проще из u, u_a, u_{ab} построить конформно ковариантные тензоры и затем из них строить инварианты алгебры вращений.

Определение 3. *Тензоры ранга* 1 *и* 2 θ_a *и* θ_{ab} *называются ковариантными относительно некоторого расширения алгебры Евклида*

$AE(n) \dotplus \{L_i\}$, *если*

$$L_i\theta_a = \sigma^i_{ab}\theta_b + \sigma^i\theta_a,$$

$$L_i\theta_{ab} = \rho^i_{ac}\theta_{cb} + \rho^i_{bc}\theta_{ac} + \rho^i\theta_{ab};$$

здесь ρ^i, σ^i — некоторые функции, σ^i_{ab}, ρ^i_{ab} — антисимметричные тензоры.

Легко показать, что выражения $S_k(\theta_{ab})$, $S_{jk}(\theta^1_{ab}, \theta_{ab})$, $R_k(\theta_a, \theta_{ab})$, где θ_a, θ_{ab}, θ^1_{ab} — ковариантные относительно алгебры $AE(n) \dotplus \{L_i\}$ тензоры, будут относительными инвариантами этой алгебры.

Количество функционально независимых инвариантов определяется рангом матрицы коэффициентов продолженных базисных операторов алгебры $AE(n) \dotplus \{L_i\}$.

Используя условие (23) для функции u, легко показать, что при $\lambda \neq 0$ для $AC(n)$ существует ковариантный тензор только второго порядка θ_{ab} (7); при $\lambda = 0$ конформно-ковариантными будут тензоры w_{ab} (7) и u_a, но $S_k(w_{ab})$ и $R_k(u_a, w_{ab})$ зависимы.

Доказательство полноты и независимости построенных базисов алгебр $AE(n) \dotplus D$ и $AC(n)$ для одной и нескольких скалярных функций проводится по аналогии с соответствующими утверждениями для алгебры Евклида.

3. Заключение. Найденные в работе инварианты позволяют строить новые классы уравнений и систем, инвариантных относительно алгебры Евклида и конформной алгебры. Полученные результаты также можно использовать для построения базисов инвариантов различных расширений алгебры Евклида, например, алгебр Галилея и Пуанкаре.

1. *Фущич В. И., Серова М. М.* О точных решениях некоторых нелинейных дифференциальных уравнений, инвариантных относительно групп Евклида и Галилея // Теоретико, алгебраические методы в задачах мат. физики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 24—54.
2. *Tresse A.* Sur les invarints differentiels des groupes continus de transformations // Acta math.— 1894.— 18.— P. 1—88.
3. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
4. *Спенсер Э.* Теория инвариантов.— М. : Мир, 1974.— 158 с.
5. *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления.— М. : Изд-во иностр. лит., 1947.— 408 с

Ин-т математики АН УССР, Киев — Получено 14.02.89