УДК 519.21

В. Л. Гирко

Асимптотически нормальные оценки решений систем линейных алгебраических уравнений. I

Для регуляризованных решений систем линейных алгебраических уравнений найдены статистические оценки по наблюдениям над матрицей коэффициентов системы уравнений. При некоторых условиях доказано, что эта оценка асимптотически нормальна

Для регуляризованих розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь знайдені статистичні оцінки по спостереженням над матрицею коефіцієнтів системи рівнянь. При деяких умовах доведено, що ці оцінки асимптотично нормальні.

Сформулируем постановку задачи: найти с помощью независимых наблюдений X_i, $i = \overline{1, s}$, над матрицей $A + \Xi$, $A = (a_{ij})$, $\Xi = (\xi_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, асимптотически нормальную оценку регуляризованного псевдорешения $x_\alpha = (I\alpha + A'A\beta^{-1})^{-1}A'b\beta^{-1}$ системы уравнений $Ax = b$ при условии, что s; m и n зависимы между собой и для них выполняется G-условие

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} n\sigma_n^2\beta_n^{-1}s_n^{-1} = a_1 < \infty,$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sigma_n^2 m_n\beta_n^{-1}s_n^{-1} = a_2 < \infty,$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} m_n n^{-1} = a_3 < 1,$$

где $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$ — некоторая последовательность постоянных, σ_n^2 — дисперсии элементов матрицы X_i. В дальнейшем индекс n при величинах σ_n, m_n, β_n, S_n, α_n будем опускать. В некоторых случаях при нахождении пределов этот индекс все же будем указывать. Величины c, c_i постоянные, возможно различные в разных формулах.

Пусть

$$y_\theta = \operatorname{Re}[I(\theta + i\varepsilon) + \beta^{-1}z_s'z_s]^{-1}z_s'b\beta^{-1},$$

$$z_s = s^{-1}\sum_{i=1}^{s} X_i,$$

где $\varepsilon \neq 0$, θ — любое вещественное число;

$$G_8 = \operatorname{Re} d'[I(\hat\theta + i\varepsilon) + \beta^{-1}z_s'z_s]^{-1}z_s'\beta^{-1}b,$$

где $d \in R^m$, $\hat\theta$ — любое измеримое вещественное решение уравнения $f_n(\theta) = \alpha$,

$$f_n(\theta) = \theta\operatorname{Re}[1 + \delta_1 a(\theta)]^2 - \varepsilon\operatorname{Im}[1 + \delta_1 a(\theta)]^2 + (\delta_1 - \delta_2)[1 + \delta_1\operatorname{Re} a(\theta)],$$

$$a(\theta) = n^{-1}\operatorname{Sp}[I(\theta + i\varepsilon) + \beta^{-1}z_s'z_s]^{-1},$$

$$\delta_1 = \sigma^2 n^{-1}\beta^{-1}s^{-1}, \quad \delta_2 = \sigma^2 m\beta^{-1}s^{-1}.$$

В дальнейшем будем считать, что решения уравнения $f_n(\theta) = \alpha$ упорядочены по величине $\hat\theta_1 \geqslant \hat\theta_2 \geqslant \ldots$ и $\hat\theta$ — k-е по величине решение.

Введем обозначения

$$\nu_n = \frac{\sqrt{n}}{2}\int_{\tilde\theta}^{\infty}\frac{\partial}{\partial v}[\mathbf{M}\psi(v, y) - b(v, y)]_{v=0}dy,$$

$$\psi(v, y) = \operatorname{Re}\operatorname{Sp}[I(y + i\varepsilon) + B'(v)B(v)]^{-1},$$

$$B(v) = \beta^{-1/2}z_s + vbd'\beta^{-1/2},$$

$b(v, y)$ — решение уравнения

$$b(v, y) = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{m}[(y + i\varepsilon)(1 + \delta_1 n^{-1}b(v, y) + \delta_1 - \delta_2 + \lambda_k(v) \times$$

$$\times (1 + \delta_1 n^{-1}b(v, y)^{-1}]^{-1},$$

$\lambda_k(v)$ — собственные числа матрицы $K'(v)K(v)$, $K(v) = (A + vbd')\beta^{-1/2}$ $\tilde\theta$ — k-е по величине решение уравнения $g(\theta) = \alpha$, где

$$g(\theta) = \theta\operatorname{Re}[1 + \delta_1\mathbf{M}a(\theta)]^2 - \varepsilon\operatorname{Im}[1 + \delta_1\mathbf{M}a(\theta)]^2 + (\delta_1 - \delta_2) \times$$

$$\times [1 + \delta_1\operatorname{Re}\mathbf{M}a(\theta)],$$

$$\mu_n^2 = n\mathbf{M}\left\{\frac{1}{2}[f_n(\tilde\theta) - g_n(\tilde\theta)][\mathbf{M}f_n'(\tilde\theta)]^{-1}\frac{\partial}{\partial v}\mathbf{M}\psi(v, \tilde\theta)_{v=0} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int_{\tilde\theta}^{\infty}\frac{\partial}{\partial v}[\psi(v, y) - \mathbf{M}\psi(v, y)]_{v=0}dy\right\}^2.$$

Теорема 1. *Пусть для каждого значения $n = 1, 2, \dots$ элементы $x_{pl}^{(i)}$, $p = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, m}$, матрицы X_i независимы, $\mathbf{M}x_{pl}^{(i)} = a_{pl}$, $\mathbf{D}x_{pl}^{(i)} = \sigma^2$, выполняется G-условие,*

$$\lambda_m + \alpha \geqslant h, \tag{2}$$

где $h > 0$ — некоторое число, $\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_m$ — собственные числа матрицы $A'A\beta^{-1}$,

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} [(b'b + d'd)\,\beta^{-1/2} + \sup_{k=\overline{1,n}} a_k' a_k \beta^{-1/2}] < \infty, \tag{3}$$

где a_k — векторы-строки матрицы A,

$$\sup_n \lambda_1 < \infty, \tag{4}$$

для некоторого $\delta > 0$

$$\sup_n \sup_{p=\overline{1,n},\, l=\overline{1,m}} \mathbf{M}\,|\, x_{pl}^{(i)} - a_{pl}|^{4+\delta} < \infty. \tag{5}$$

Тогда при $\varepsilon \neq 0$

$$\mathbf{P}\{[G_8 - \operatorname{Re} d' x_{\alpha + i\tilde{\gamma}(\varepsilon)}]\sqrt{n} - \nu_n < u\} = \mathbf{P}\{\mu_n \eta < u\} + o(1),$$

$$\tilde{\gamma}(\varepsilon) = \varepsilon \operatorname{Re}[1 + \delta_1 \mathbf{M} a(\tilde{\theta})]^2 + \tilde{\theta} \operatorname{Im}[1 + \delta_1 \mathbf{M} a(\tilde{\theta})]^2 + (\delta_1 - \delta_2)\,\delta_1 \operatorname{Im} \mathbf{M} a(\tilde{\theta}), \tag{6}$$

где η — случайная величина, распределенная по нормальному закону $N(0, 1)$, величины ν_n и μ_n удовлетворяют неравенству

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} [|\nu_n| + \mu_n] < \infty.$$

Доказательство. Дифференцируя функцию ψ по v в точке $v = 0$, имеем

$$(\partial/\partial v)\,\psi(v, y)\,|_{v=0} = -\operatorname{Re} \beta^{-1} \operatorname{Sp}[I(y + i\varepsilon) + B'(0)\,B(0)]^2 [(bd')' z_s + z_s' b d'] = -2 \operatorname{Re} d' [I(y + i\varepsilon) + \beta^{-1} z_s' z_s]^{-2} z_s' \beta^{-1} b = 2 \operatorname{Re} (\partial/\partial y)\, d' \times [I(y + i\varepsilon) + \beta^{-1} z_s' z_s]^{-1} z_s' \beta^{-1} b.$$

Интегрируя это равенство, выводим формулу

$$G_8 = -\int_{\hat{\theta}}^{\infty} (\partial/\partial v)\,\psi(v, y)\,|_{v=0}\, dy/2. \tag{7}$$

Лемма 1. *При выполнении условий теоремы 1 $\psi(v, y) = \operatorname{Re}[a(v, y) + \nu(v, y)]$, где*

$$a(v, y) = \mathbf{M} \sum_{k=1}^{m} [(y + i\varepsilon)(1 + \delta_1 n^{-1} a(v, y)) + \delta_1 - \delta_2 + \lambda_k(v)(1 + \delta_1 n^{-1} a(v, y))^{-1} + \varepsilon_{kn}(v, y)]^{-1}, \tag{8}$$

$$Q = \Lambda(v) + n^{-1/2} \delta_1^{1/2} \Xi, \quad \Lambda(v) = (\delta_{ij} \lambda_i^{1/2}(v))_{i,j=1}^{m}, \quad \Xi = (\xi_{ij}),$$

$$j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n},$$

— случайная матрица, элементы которой ξ_{ij} независимы, не зависят от матриц X_i и распределены по нормальному закону $N(0, 1)$, δ_{ij} — символ Кронекера,

$$\varepsilon_{kn}(v, y) = q_k q_k' - \delta_1 - \lambda_k(v) - q_k Q_k' L_k Q_k q_k' + \lambda_k(v) \operatorname{Sp} L_k T_k^k + n^{-1} \delta_1 \operatorname{Sp} L_k Q_k' Q_k + (y + i\varepsilon)\,\delta_1 n^{-1} \operatorname{Sp}(L_k - \mathbf{M}L) + \lambda_k(v) \times \{[1 + q_k^k L_k^k q_k^{k'}]^{-1} - [1 + n^{-1} \delta_1 \mathbf{M} \operatorname{Sp} L]^{-1}\},$$

$$L = (l_{ij}) = [I(y + i\varepsilon) + Q'Q]^{-1},$$

$$L_k = [I(y + i\varepsilon) + Q_k' Q_k]^{-1},$$

матрица Q_k получена из матрицы Q вычеркиванием k-й строки q_k,

$$L_k^k = [I(y + i\varepsilon) + \sum_{p \neq k} T_p^k]^{-1},$$

$$T_p^k = (q_{pi} q_{pj})_{i,j \neq k}^m,$$

у матрицы T_p^k вычеркнуты элементы k-го столбца и k-й строки

$$q_k^k = (q_{k1}, \ldots, q_{kk-1}, q_{kk+1}, \ldots, q_{km}),$$

$$\mathbf{v}_n(v, y) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ (\mathbf{M}_{k-1} - \mathbf{M}_k) \frac{\partial}{\partial y} \ln[1 + p_k' T_k(v, y) p_k] + \right.$$

$$\left. + \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial y} \ln[1 + p_k' R_k(v, y) p_k] - \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial y} \ln[1 + g_k' R_k(v, y) g_k] \right\},$$

$$R_k(v, y) = \left[I(y + i\varepsilon) + \sum_{s=1}^{k-1} g_s g_s' + \sum_{s=k+1}^{n} p_s p_s' \right]^{-1},$$

$$T_k(y, v) = \left(I(y + i\varepsilon) + \sum_{\substack{s \neq k \\ s=1}}^{n} p_s p_s' \right)^{-1}, \tag{9}$$

g_s — s-й вектор-столбец матрицы $[(A + vbd')\beta^{-1/2} + n^{-1/2}\delta_1^{1/2}\Xi]'$, p_s — s-й вектор-столбец матрицы $B'(v)$, $\mathbf{M}_k$ — условное математическое ожидание при фиксированной минимальной σ-алгебре, относительно которой измеримы случайные векторы p_s, $s = \overline{(k+1), n}$.

Доказательство. Очевидно,

$$\mathrm{Sp}[I(y + i\varepsilon) + B'(v) B(v)]^{-1} = a(v, y) + \tau_1 - \mathbf{M}\tau_1 + \tau_2,$$

где

$$\tau_1 = \mathrm{Sp}[I(y + i\varepsilon) + B'(v) B(v)]^{-1},$$

$$\tau_2 = \mathbf{M}\tau_1 - \mathbf{M}\,\mathrm{Sp}[I(y + i\varepsilon) + Q'Q]^{-1}.$$

Матрицу $(A + vbd')\beta^{-1/2}$ можно представить в виде $U_1 \Lambda(v) U_2'$, где U_1 и U_2 — ортогональные матрицы соответственно размеров $n \times m$ и $m \times m$. В силу такого представления и инвариантности распределения матрицы Ξ относительно ортогонального преобразования

$$a(v, y) = \mathbf{M}\,\mathrm{Sp}[I(y + i\varepsilon) + Q'Q]^{-1} = \mathbf{M} \sum_{k=1}^{m} l_{kk},$$

и для l_{kk} справедлива формула [1, с. 56]

$$l_{kk} = [y + i\varepsilon + q_k q_k' - q_k Q_k' L_k Q_k q_k']^{-1}.$$

Преобразуем ее к виду

$$l_{kk} = [y + i\varepsilon + \delta_1 + \lambda_k(v) - n^{-1}\delta_1 \mathrm{Sp}\, L_k Q_k' Q_k - \lambda_k(v)\, \mathrm{Sp}\, L_k T_k^k + \pi_{1n}]^{-1}, \tag{10}$$

где

$$\pi_{1n} = q_k q_k' - \delta_1 - \lambda_k(v) - q_k Q_k' L_k Q_k q_k' + \lambda_k(v)\, \mathrm{Sp}\, L_k T_k^k + \delta_1 n^{-1} \mathrm{Sp}\, L_k Q_k' Q_k.$$

Легко проверить, что

$$\mathrm{Sp}\, L_k T_k^k = q_k^k L_k^k q_k^{k'} [1 + q_k^k L_k^k q_k^{k'}]^{-1}.$$

Учитывая это равенство, преобразуем (10) к виду

$$l_{kk} = [y + i\varepsilon + \delta_1(1 - mn^{-1}) + (y + i\varepsilon) n^{-1}\delta_1 \mathrm{Sp}\, L_k + \lambda_k(v) \times$$

$$\times (1 + n^{-1}\delta_1 \mathrm{Sp}\, L_k^k)^{-1} + \pi_{2n}]^{-1},$$

где

$$\pi_{2n} = \pi_{1n} + \lambda_k(v)\{[1 + q_k^k L_k^k q_k^{k'}]^{-1} - [1 + n^{-1}\delta_1 \operatorname{Sp} L_k^k]^{-1}\}.$$

Из этой формулы получаем

$$l_{kk} = [(y + i\varepsilon)(1 + n^{-1}\delta_1 \mathbf{M} \operatorname{Sp} L) + \delta_1 - \delta_2 + \lambda_k(v)[1 + n^{-1}\delta_1 \mathbf{M} \operatorname{Sp} L]^{-1} + \\ + \varepsilon_{kn}(v, y)]^{-1},$$

где

$$\varepsilon_{kn}(v, y) = \pi_{2n} + (y + i\varepsilon) n^{-1}\delta_1 \operatorname{Sp}(L_k - \mathbf{M}L) + \lambda_k(v) \times \\ \times \{[1 + n^{-1}\delta_1 \operatorname{Sp} L_k^k]^{-1} - [1 + n^{-1}\mathbf{M}\delta_1 \operatorname{Sp} L]^{-1}\}.$$

Используя эту формулу и обозначая $a(v, y) = n^{-1} \operatorname{Sp} L$, получаем (8). Используя формулу

$$\operatorname{Sp}[I(y + i\varepsilon) + A + xx']^{-1} - \operatorname{Sp}[I(y + i\varepsilon) + A]^{-1} = \frac{\partial}{\partial y} \ln[1 + x' \times \\ \times [I(y + i\varepsilon) + A]^{-1} x], \qquad (11)$$

где A — неотрицательно определенная матрица m-го порядка, x — вектор размерности m, $\varepsilon \neq 0$, имеем

$$\tau_1 = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{M}_{k-1} - \mathbf{M}_k) \operatorname{Sp}[I(y + i\varepsilon) + B'(v) B(v)]^{-1} = \\ = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{M}_{k-1} - \mathbf{M}_k) \frac{\partial}{\partial y} \ln[1 + p_k' T_k(v, y) p_k],$$

$$\tau_2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \ln[1 + p_k' R_k(v, y) p_k] - \frac{\partial}{\partial y} \ln[1 + q_k' R_k(v, y) q_k] \right\}.$$

Из этих равенств следует формула (9). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Существует частная производная первого порядка по переменной v функции $a(v, y)$ при $v = 0$. При вычислении этой производной от выражения (8) вместо $\partial\lambda_k(0)/\partial v$, $\partial\lambda^{1/2}(0)/\partial v$ нужно соответственно положить $\varphi_k' B \varphi_k$, $b' H \varphi_k d' \varphi_k \beta^{-1}$, где $B = [(bd')'A + A'bd']\beta^{-1}$, φ_k — ортонормированные собственные векторы матрицы $A'A$, соответствующие ее собственным числам $\lambda_k(0)$, $H = A(A'A)^{-1/2}$, если $\det AA' \neq 0$, и H — некоторая ортогональная матрица, если $\det A'A = 0$.*

Доказательство. Очевидно, у функции $a(v, y) = \mathbf{M} \operatorname{Sp}[I(y + i\varepsilon) + Q'Q]^{-1}$ существует частная производная по v при $v = 0$. Так как в уравнении (8) матрица A может быть любой, то вместо нее подставим матрицу $\tilde{A} = A + \nu E$, где ν — некоторое малое число, выбранное таким образом, чтобы собственные числа матрицы $\tilde{A}'\tilde{A}$ были различными и не равными нулю. Это можно сделать в силу теоремы Вейля—фон-Неймана [2, с. 648]. Либо можно считать, что матрица E случайна и у ее элементов существует совместная плотность распределения. Тогда [1] у матрицы $\tilde{A}'\tilde{A}$ собственные числа не будут совпадать между собой с вероятностью 1. Полученную функцию $a(v, y)$ будем обозначать через $\tilde{a}(v, y)$. После такой замены для собственных чисел $\tilde{\lambda}_k(v)$ матрицы $(\tilde{A} + vbd')'(\tilde{A} + vbd')$ справедливы формулы [2, с. 160]

$$\frac{\partial}{\partial v} \tilde{\lambda}_k(0) = \tilde{\varphi}_k' \tilde{B} \tilde{\varphi}_k,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \tilde{\lambda}_k^{1/2}(0) = \tilde{\lambda}_k^{-1/2}(0) b' \tilde{A} \tilde{\varphi}_k \tilde{\varphi}_k' d \beta^{-1}.$$

Используя представление матрицы $\tilde{A}$ в виде $\tilde{A} = HS$ [3, с. 249], где $S = (\tilde{A}'\tilde{A})^{1/2}$, $\tilde{H}$ — ортогональная матрица, последнюю формулу преобразуем к виду

$$\frac{\partial}{\partial v}\tilde{\lambda}_k^{1/2}(0) = b'\tilde{H}\tilde{\varphi}_k d'\tilde{\varphi}_k \beta^{-1}.$$

Таким образом, используя выражение (8), имеем

$$\frac{\partial}{\partial v}\tilde{a}(v, y)\big|_{v=0} = f(\tilde{\varphi}_k'\tilde{B}\tilde{\varphi}_k, b'\tilde{H}\tilde{\varphi}_k d'\tilde{\varphi}_k\beta^{-1}), \tag{12}$$

где f — некоторая непрерывная функция. Предел слева в этом выражении при $\nu \to 0$ существует и равен $\frac{\partial}{\partial v}a(v, y)\big|_{v=0}$. Очевидно, $\lim_{\nu\to 0}\tilde{B} = B$, а из [2, с. 99] следует, что $\lim_{\nu\to 0}\tilde{\varphi}_k = \varphi_k$. Кроме того, можно выбрать такую подпоследовательность матриц $\tilde{H}(\nu')$, для которой существует предел $\lim_{\nu'\to 0}\tilde{H}(\nu') = H$. Следовательно, существует предел и в правой части равенства (12). Лемма 2 доказана.

В дальнейшем, чтобы избежать излишних повторений, будем считать, что существуют частные производные по v функций $\lambda_k(v, y)$ при $v = 0$.

Лемма 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k=\overline{1,m}}\mathbf{M}|\varepsilon_{kn}(0, y)|^2 = 0$.

Доказательство. Матрицы L, L_k невырожденны, поэтому в силу условий (3)—(5), пользуясь теоремами типа закона больших чисел, получаем (см. [4, с. 257])

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty}\sup_{k=\overline{1,m}}\mathbf{M}|q_kq_k' - \delta_1 - \lambda_k(0)|^2 = 0,\\ \lim_{n\to\infty}\sup_{k=\overline{1,m}}\mathbf{M}|q_kQ_k'L_kQ_kq_k' - n^{-1}\delta_1\operatorname{Sp}L_kQ_k'Q_k|^2 = 0.\end{gathered} \tag{13}$$

Кроме того, пользуясь формулой (11), так же как и в [1, с. 230, 253] доказываем равенства

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}|n^{-1}\operatorname{Sp}(L_k - \mathbf{M}L)|^2 = 0,\\ \lim_{n\to\infty}\mathbf{M}|[1 + q_kL_k^kq_k']^{-1} - [1 + n^{-1}\delta_1\mathbf{M}\operatorname{Sp}L]^{-1}|^2 = 0.\end{gathered} \tag{14}$$

В силу (13) и (14) справедлива лемма 3.

Вычисляя производные, имеем при $v = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varepsilon_{kn}(v, y)}{\partial v}\Big|_{v=0} = \Big\{&2\xi_{kk}n^{-1/2}\frac{\partial}{\partial v}\lambda_k^{1/2}(0) + g_k'Q_kS_1Q_kg_k - 2q_k'Q_k'L_k\times\\ &\times\left(\frac{\partial}{\partial v}\Lambda_k\right)g_k - 2\sum_{i=1}^n(Q_k'L_kQ_k)_{ki}g_{ik}\frac{\partial}{\partial v}\lambda_k^{1/2}(0) + 2\sum_{i=1}^n(Q_k'S_1Q_k)_{ki}g_{ik}\lambda_k^{1/2}(0) -\\ &-\delta_1n^{-1}\operatorname{Sp}S_1Q_kQ_k' + 2n^{-1}\delta_1\operatorname{Sp}L_k\left(\frac{\partial}{\partial v}\Lambda_k\right)Q_k' - [y + i\varepsilon]\delta_1n^{-1}\operatorname{Sp}[S_1 - \mathbf{M}S_2] +\\ &+\left(\frac{\partial}{\partial v}\lambda_k(0)\right)\{[1 + q_k^kL_k^kq_k^{k\prime}]^{-1} - [1 + n^{-1}\delta_1\mathbf{M}\operatorname{Sp}L]^{-1}\} + \lambda_k(0)\times\\ &\times\Big\{[1 + q_k^kL_k^kq_k^{k\prime}]^{-2}\Big[q_k^kL_k^k\frac{\partial}{\partial v}\sum_{p\neq k}T_p^kL_k^kq_k^{k\prime}\Big] - [1 + n^{-1}\delta_1\mathbf{M}\operatorname{Sp}L]^{-2}\times\\ &\times\delta_1n^{-1}\mathbf{M}\operatorname{Sp}S_2\Big\}\Big\}\Big|_{v=0},\end{aligned}$$

$$S_1 = \left\{ L_k \left[\left(\frac{\partial}{\partial v} \Lambda_k \right) Y_k + Y'_k \left(\frac{\partial}{\partial v} \Lambda_k \right) \right] L_k \right\} \Big|_{v=0},$$

$$S_2 = \left\{ L^2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial v} \Lambda \right) Y + Y' \left(\frac{\partial}{\partial v} \Lambda \right) \right] \right\} \Big|_{v=0}, \tag{15}$$

где Λ_k и Y_k получены из матриц Λ и Y вычеркиванием k-го столбца, $g'_k = (\xi_{ki},\ i = \overline{1, n})$.

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \left| \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial v} \varepsilon_{kn}(0, y) \right| = 0.$$

Доказательство. Легко видеть, что справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{m} \left| \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial v} \varepsilon_{kn}(0, y) \right| = \sum_{k=1}^{m} \Big| (y + i\varepsilon)\, \delta_1 n^{-1} \operatorname{Sp}(\mathbf{M}S_1 - \mathbf{M}S_2) +$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial v} \lambda_k(0) \right) \{ \mathbf{M} [1 + q_k^k L_k^k q_k^{k\prime}]^{-1} - [1 + n^{-1}\delta_1 \mathbf{M} \operatorname{Sp} L]^{-1} \} + \lambda_k(0) \Big\{ \mathbf{M} [1 +$$
$$+ q_k^k L_k^k q_k^{k\prime}]^{-2} \left[q_k^k L_k^k \left(\frac{\partial}{\partial v} \sum_{p\neq k} T_p^k \right) L_k^k q_k^{k\prime} \right] - [1 + n^{-1}\delta_1 \mathbf{M} \operatorname{Sp} L]^{-2} \delta_1 n^{-1} \mathbf{M} \operatorname{Sp} S_2 \Big\} \Big|_{v=0}. \tag{16}$$

Но

$$\operatorname{Sp}[L_k - L] = \frac{\partial}{\partial y} \ln [y + i\varepsilon + q_k q'_k - q_k Q'_k L_k Q_k q'_k],$$

$$\operatorname{Sp}[\mathbf{M}S_1 - \mathbf{M}S_2] = \frac{\partial^2}{\partial y \partial v} \mathbf{M} \ln [y + i\varepsilon + q_k q'_k - q_k Q'_k L_k Q_k q'_k].$$

Поскольку матрицы $Q'_k L_k Q_k$ и Γ симметричны, Γ — диагональная матрица с диагональными элементами $\partial\lambda_k^{1/2}(0)/\partial v$, их собственные числа ограничены по модулю и $|y + i\varepsilon + q_k q'_k - q_k Q_k L_k Q_k q'_k|^{-1} \leqslant |\varepsilon|^{-1}$, то из этого равенства получаем

$$\sum_{k=1}^{m} |\operatorname{Sp} \mathbf{M}(S_1 - S_2)| \leqslant c < \infty. \tag{17}$$

Легко убедиться в справедливости соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \{ \mathbf{M} [1 + q_k^k L_k^k q_k^{k\prime}]^{-1} - [1 + n^{-1}\delta_1 \mathbf{M} \operatorname{Sp} L]^{-1} \}_{v=0} = 0, \tag{18}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial}{\partial v} \lambda_k(0) \right| \leqslant \beta^{-1} \sum_{k=1}^{m} |\varphi'_k A' b \varphi'_k d| \leqslant c < \infty. \tag{19}$$

Заметим, что последние два выражения в сумме (16) можно представи_ в виде

$$\theta_k = \lambda_k(0) \left[\mathbf{M} \frac{q_k^k \Gamma B_{1k} q_k^{k\prime}}{(1 + q_k^k B_{2k} q_k^{k\prime})^2} - \frac{n^{-1} \operatorname{Sp} \Gamma B_{3k}}{(1 + n^{-1} \operatorname{Sp} B_{4k})^2} \right]_{v=0},$$

где B_{ik} — симметричные матрицы и собственные числа их ограничены по модулю, причем у собственных чисел матриц B_{2k} и B_{4k} мнимые части не равны нулю.

Используя неравенство (19), получаем

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} |\theta_k| = 0. \tag{20}$$

В силу (17) — (20) справедлива лемма 4.

1. *Гирко В. Л.* Теория случайных детерминантов.— Киев : Вища шк., 1980.— 368 с.
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1967.— 575 с.
4. *Гирко В. Л.* О распределении решений системы линейных уравнений со случайными коэффициентами // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1970.— № 2.— С. 41—44.

Киев. ун-т Получено 01.11.89