УДК 530.1

Ю. М. Березанский, М. И. Гехтман

Обратная задача спектрального анализа и неабелевы цепочки нелинейных уравнений

При помощи метода обратной спектральной задачи строятся решения задачи Коши для некоторых систем нелинейных дифференциально-разностных уравнений с операторными неизвестными в полубесконечном случае.

За допомогою методу оберненої спектральної задачі будуються розв'язки задачі Коші для деяких систем нелінійних диференціально-різницевих рівнянь з операторними невідомими у напівнескінченному випадку.

В настоящей статье развивается метод, предложенный в [1, 2] для интегрирования полубесконечных систем нелинейных дифференциально-разностных уравнений и основанный на применении обратной спектральной задачи для классических якобиевых матриц. Рассматривается обобщение этого метода на случай неабелевых систем, когда роль неизвестных играют операторнозначные функции. При этом используется прямая и обратная задачи для разностных выражений с операторными коэффициентами или операторных якобиевых матриц. Часть изложенных в статье результатов анонсировалась в [3].

Разностные выражения с матричными коэффициентами впервые изучались М. Г. Крейном [4], а затем в [5—7] была построена спектральная теория разностных выражений с операторными коэффициентами, некоторые факты которой излагаются в п. 1 настоящей статьи. В п. 2 рассматриваются полубесконечные системы нелинейных уравнений, связанные с операторными якобиевыми матрицами. В частности, доказывается теорема существования и единственности, а также приводится процедура построения решения задачи Коши для неабелева аналога цепочки Тоды. Уравнения неабелевой цепочки Тоды, связанные с несимметричным разностным выражением с матричными коэффициентами, были предложены А. Поляковым. Они исследовались в [8] методом обратной задачи рассеяния, в [9] рассматривался периодический случай. В п. 3 получим для этих уравнений решения специального вида в полубесконечном случае. В этом же пункте рассматривается связь между системами п. 2 и потоками Тоды, изучавшимися в [10].

1. Некоторые факты спектральной теории разностных выражений с операторными коэффициентами. 1. Пусть H — гильбертово пространство, $\mathscr{L}(H)$ — совокупность ограниченных операторов в H. Рассмотрим разностное выражение с коэффициентами из $\mathscr{L}(H)$, ограниченными по норме в совокупности

$$(\mathscr{L}u)_n = A_{n-1}u_{n-1} + B_nu_n + A_nu_{n+1}, \quad A_n > 0, \quad B_n = B_n^*;$$
$$n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}, \quad A_{-1} = 0, \tag{1}$$

действующее на последовательности $u = (u_n)_{n=0}^{\infty}$ векторов u_n из H. При подсчете $(\mathscr{L}u)_0$ всегда считается, что $u_{-1} = 0$. Это соглашение играет роль граничного условия. Выражение $\mathscr{L}$ порождает ограниченный самосопряженный оператор $Lu = \mathscr{L}u$ в гильбертовом пространстве

$$l_2(H; [0, \infty)) = \left\{u = (u_n)_{n=0}^{\infty} \,|\, u_n \in H, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \| u_n \|_H^2 < \infty\right\},$$

$$((u, v) \underset{l_2(H;[0,\infty])}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, v_n)_H.$$

Этот оператор записывается в виде якобиевой матрицы L с операторными элементами: на главной диагонали стоят $B_0, B_1, \ldots$, а на двух соседних — $A_0, A_1, \ldots$. Ему отвечает операторная спектральная мера ρ, построенная на σ-алгебре $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$ борелевских множеств на оси по разложению единицы E оператора L следующим образом:

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^1) \ni \alpha \mapsto \rho(\alpha) = \delta_0^* E_\alpha \delta_0, \tag{2}$$

где δ_0 — оператор, действующий из H в $l_2(H; [0, \infty))$ и ставящий вектору $x \in H$ в соответствие последовательность $(x, 0, 0, \ldots) \in l_2(H; [0, \infty))$. Мера ρ имеет слабо ограниченную вариацию, все интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^m |(d\rho(\lambda)x, y)|; \qquad x, y \in H, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \tag{3}$$

для нее сходятся и, кроме того, выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\rho(\lambda) = 1. \tag{4}$$

Пусть $p(z) = (P_{-1}(z), P_0(z), \ldots)$ — решение задачи Коши $(\mathscr{L}U)_n = zU_n$; $n \in \mathbb{Z}_+$, $U = (U_n)_{n=0}^{\infty}$, $U_n \in \mathscr{L}(H)$, $U_{-1} = 0$, $U_0 = 1$, $z \in \mathbb{C}^1$; $P_n(z)$ является операторным полиномом степени n с обратимым старшим коэффициентом, равным $A_{n-1}^{-1} \ldots A_0^{-1}$ (например, $P_1(z) = A_0^{-1}(z1 - B_0)$). Полиномы $P_n(z)$ (так называемые полиномы первого рода) образуют псевдоортонормированную систему относительно меры $d\rho(\lambda)$ в том смысле, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_j(\lambda)\, d\rho(\lambda)\, P_k^*(\lambda) = \delta_{jk} 1, \quad j, k \in \mathbb{Z}_+. \tag{5}$$

Для финитных последовательностей $U = (U_n)_{n=0}^{\infty}$, $U_n \in \mathscr{L}(H)$ и аналогичной V справедливо «равенство Парсеваля»

$$\{U, V\} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^* V_n = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}^*(\lambda)\, d\rho(\lambda)\, \tilde{V}(\lambda), \tag{6}$$

где $\tilde{U}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^*(\bar{z}) U_n$ $(z \in \mathbb{C}^1)$ — «преобразование Фурье» вектора U. Оператор $\{U, V\}$ — так называемое псевдоскалярное произведение U и V. При помощи предельного перехода равенство (6) распространяется и на нефинитные U, для которых $\{U, U\}$ существует как ограниченный оператор.

2. Обратная задача спектрального анализа заключается сейчас в восстановлении по операторной спектральной мере коэффициентов выражения (1). Пусть $d\rho(\lambda)$ — неотрицательная операторная мера на $\mathbb{R}^1$ с носителем, состоящим из бесконечного числа точек, для которой существуют интегралы (3) и выполняется условие (4). Требуется также, чтобы интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} P^*(\lambda)\, d\rho(\lambda)\, P(\lambda)$ был обратимым оператором при любом полиноме $P(\lambda)$, старший коэффициент которого равен 1.

Для восстановления коэффициентов разностного выражения (1) проводится процесс псевдоортогонализации операторных полиномов 1, λ 1, ... по мере $d\rho(\lambda)$; он вполне аналогичен процессу ортогонализации Шмидта, только вместо скалярного произведения берется псевдоскалярное произведение, которое для любых двух полиномов с операторными коэффициентами $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ определяется по формуле

$$\{P^*, Q\} = \int_{-\infty}^{\infty} P^*(\lambda)\, d\rho(\lambda)\, Q(\lambda).$$

В результате процесса псевдоортогонализации строится последовательность полиномов первого рода $P_0(\lambda)$, $P_1(\lambda), \ldots$. При этом $P_0(\lambda)$ полагаем равным 1, далее рассматриваем полином $S_1(\lambda) = \lambda 1 + P_{1,0}P_0(\lambda)$, где $P_{1,0}$ определяется из условия $\int_{-\infty}^{\infty} P_0(\lambda)\, d\rho(\lambda)\, S_1^*(\lambda) = 0$. Тогда $P_1(\lambda) = N_1^{-1/2} S_1(\lambda)$, где $N_1 = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\lambda)\, d\rho(\lambda)\, S_1^*(\lambda)$. Продолжая эту процедуру, определяем $N_2, \ldots, N_{n-1}$ и полиномы $P_2(\lambda), \ldots, P_{n-1}(\lambda)$. Для полинома $S_n(\lambda) = N_{n-1}^{-1/2} \ldots N_1^{-1/2}\lambda^n + P_{n,n-1}P_{n-1}(\lambda) + \ldots P_{n,0}$ операторные коэффициенты $P_{n,k}$ определяются из условий $\int_{-\infty}^{\infty} P_k(\lambda)\, d\rho(\lambda)\, S_n^*(\lambda) = 0$, $k = 0, \ldots, n-1$. Обозначив $N_n = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\lambda)\, d\rho(\lambda)\, S_n^*(\lambda)$, получим $P_n(\lambda) = N_n^{-(1/2)} S_n(\lambda)$.

Построив последовательность полиномов первого рода, можно определить коэффициенты разностного выражения по формулам

$$A_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda)\, d\rho(\lambda)\, P_{n+1}^*(\lambda), \quad B_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda)\, d\rho(\lambda)\, P_n^*(\lambda); \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{7}$$

Отметим также равенство $A_n = N_{n+1}^{1/2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Спектральной мерой для построенного разностного выражения является исходная мера $d\rho(\lambda)$.

Теперь рассмотрим резольвенту $R_z(L) = R_z$ оператора L $(z \in \mathbb{C}^1)$. Она может быть представлена как матрица с операторнозначными элементами из $\mathcal{L}(H)$

$$R_z(L) = (R_{z,jk})_{j,k=0}^{\infty}, \quad R_{z;jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} P_j(\lambda)\, d\rho(\lambda)\, P_k^*(\lambda) \tag{8}$$

Операторнозначная функция

$$m(z) = R_{z;00} = \delta_0^* R_z \delta_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z}\, d\rho(\lambda) \tag{9}$$

называется функцией Вейля оператора L. Отметим, что $R_{z;jk} = \delta_j^* R_z \delta_k$, где $H \ni x \mapsto \delta_k x = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, x, 0, \ldots, 0) \in l_2(H; [0, \infty))$; $j, k \in \mathbb{Z}_+$, $z \in \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1$.

2. Н е а б е л е в а ц е п о ч к а Т о д ы. 1. Рассмотрим теперь операторную якобиеву матрицу L, гладким образом зависящую от времени t (т. е. ее элементы один раз сильно непрерывно дифференцируемы), $L = L(t)$; $t \in [0, T)$, $T \in [0, \infty)$, фиксировано. Предположим, что выполняется уравнение Лакса

$$\dot{L}(t) = [L(t), A(t)] = L(t)A(t) - A(t)L(t); \qquad t \in [0, T), \ \cdot = d/dt, \tag{10}$$

где $A(t)$ — трехдиагональная матрица с операторными зависящими от t элементами. Таким образом,

$$L = L(t) = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ A_0 & B_1 & A_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A_1 & B_2 & A_2 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix},$$

$$A = A(t) = \begin{pmatrix} \Psi_0 & \Theta_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \Phi_0 & \Psi_1 & \Theta_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \Phi_1 & \Psi_2 & \Theta_2 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $A_n = A_n(t) > 0$, $B_n = B_n(t) = B_n^*(t)$, $\Phi_n = \Phi_n(t)$, $\Psi_n = \Psi_n(t)$, $\Theta_n = \Theta_n(t)$; $n \in \mathbb{Z}_+$,— гладким образом зависящие от t операторы из $\mathcal{L}(H)$.

Элементы матрицы A однозначно определяются по Φ_0, Ψ_0, Θ_0 и элементам матрицы L. Действительно, подставляя (11) в (10) и сравнивая элементы второй диагонали над главной, получаем $0 = A_n\Theta_{n+1} - \Theta_n A_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, откуда следует

$$\Theta_n = A_{n-1}^{-1} \dots A_0^{-1}\Theta_0 A_1 \dots A_n; \qquad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}. \tag{12}$$

Аналогично,

$$\Phi_n = A_n \dots A_1 \Phi_0 A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1}; \qquad n \in N. \tag{13}$$

Из симметричности матрицы $\dot{L}$ заключаем

$$A_n\Psi_{n+1} + \Psi_{n+1}A_n = A_n\Psi_n + \Psi_n A_n + \Theta_n B_{n+1} + B_{n+1}\Phi_n - B_n\Theta_n - \Phi_n B_n; \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{14}$$

Последовательно полагая в (14) $n = 0, 1, \dots$ и используя (12), (13), находим Ψ_1, Ψ_2, ... При этом нужно воспользоваться тем фактом, что уравнение относительно $X \in \mathcal{L}(H)$ $AX + XA = B$, где $A, B \in \mathcal{L}(H)$, $A > 0$, однозначно разрешимо (см., например, 11).

Переписывая матричное равенство (10) *поэлементно, получаем систему уравнений*

$$\begin{aligned} \dot{A}_n &= A_n\Psi_{n+1} - \Psi_n A_n + B_n\Theta_n - \Theta_n B_{n+1}, \\ \dot{B}_n &= A_{n-1}\Theta_{n-1} - \Theta_n A_n + A_n\Phi_n - \Phi_{n-1}A_{n-1} + B_n\Psi_n - \Psi_n B_n, \end{aligned} \tag{15}$$

которая вместе с соотношениями (12)—(14) (*где* Φ_0, Ψ_0, Θ_0 — *заданные гладкие функции* t) *является нелинейной системой, эквивалентной уравнению Лакса* (10).

Пример 2.1. В случае одномерного $H = C^1$ элементы матриц (11) являются вещественнозначными функциями и система уравнений (15) превращается в несколько усложненную полубесконечную цепочку Тоды

$$\dot{a}_n = \frac{1}{2} f a_n (b_{n+1} - b_n), \quad \dot{b}_n = f(a_n^2 - a_{n-1}^2); \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \quad a_{-1} = 0, \quad t \in [0, T) \tag{16}$$

(мы обозначили $f(t) = (\Phi_0(t) - \Theta_0(t))\, a_0^{-1}(t)$, $a_n = A_n > 0$, $b_n = B_n \in \mathbb{R}^1$; классическая цепочка Тоды в случае $f = 1$). Более подробно по этому поводу см. [2].

Пример 2.2. Пусть $H = \mathbb{C}^2$, $(a_n(t))_{n=-\infty}^{\infty}$, $(b_n(t))_{n=-\infty}^{\infty}$ — две последовательности гладких вещественнозначных функций, причем $a_n(t) > 0$; $n \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, T)$. Положим

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{-n-2} & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}; \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad B_0 = \begin{pmatrix} b_{-1} & a_{-1} \\ a_{-1} & b_0 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} b_{-n-1} & 0 \\ 0 & b_n \end{pmatrix};$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad \Psi_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -a_{-1} \\ a_{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_0 = -\Theta_0 = \frac{1}{2} J A_0, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Так как матрицы $\Phi_0 = -\Theta_0$ и A_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, диагональны, то в силу (12) и (13)

$$\Phi_n = -\Theta_n = \frac{1}{2} JA_n. \tag{18}$$

Это равенство и диагональность A_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, и B_n, $n \in \mathbb{N}$, приводят к следующей записи (14):

$$\begin{gathered} A_n\Psi_{n+1} + \Psi_{n+1}A_n = A_n\Psi_n + \Psi_nA_n, \quad n \in \mathbb{N}, \\ A_0\Psi_1 + \Psi_1A_0 = A_0\Psi_0 + \Psi_0A_0 - B_0\Theta_0 - \Phi_0B_0. \end{gathered} \tag{19}$$

Первое из равенств дает $\Psi_1 = \Psi_2 = \ldots$. Далее, учитывая (17), получаем

$$B_0\Theta_0 + \Phi_0B_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_{-1} & a_1 \\ a_{-1} & b_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{-2} & 0 \\ 0 & -a_0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -a_{-2} & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{-1} & a_{-1} \\ a_{-1} & b_0 \end{pmatrix} = A_0\Psi_1 + \Psi_1A_0.$$

Поэтому из второго равенства заключаем, что $A_0\Psi_1 + \Psi_1A_0 = 0$, и следовательно, $\Psi_1 = 0$. Итак, $\Psi_n = 0$, $n \in N$.

Учитывая (17), полученное равенство и (18), переписываем (15) в виде

$$\begin{gathered} \dot{A}_0 = \frac{1}{2} JA_0B_1 - \frac{1}{2} B_0JA_0 - \Psi_0A_0, \quad \dot{B}_0 = JA_0^2 + [B_0, \Psi_0], \\ \dot{A}_n = \frac{1}{2} JA_n (B_{n+1} - B_n), \quad \dot{B}_n = J (A_n^2 - A_{n-1}^2); \qquad n \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, T). \end{gathered} \tag{20}$$

Система (20) эквивалентна классической цепочке Тоды на всей оси

$$\dot{a}_n = \frac{1}{2} a_n (b_{n+1} - b_n), \quad \dot{b}_n = a_n^2 - a_{n-1}^2; \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \quad t \in [0, T]. \tag{21}$$

Действительно,

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_{-2} & 0 \\ 0 & \dot{a}_0 \end{pmatrix} = \dot{A}_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -a_{-2} & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{-2} & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_{-1} & a_{-1} \\ a_{-1} & b_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a_{-2} & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -a_{-1} \\ a_{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{-2} & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{-2}(b_{-1} - b_{-2}) & 0 \\ 0 & a_0(b_1 - b_0) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \dot{b}_{-1} & \dot{a}_{-1} \\ \dot{a}_{-1} & \dot{b}_0 \end{pmatrix} = \dot{B}_0 = \begin{pmatrix} -a_{-2}^2 & 0 \\ 0 & a_0^2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} b_{-1} & a_{-1} \\ a_{-1} & b_0 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -a_{-1} \\ a_{-1} & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{-1}^2 - a_{-2}^2 & \frac{1}{2} a_{-1}(b_0 - b_{-1}) \\ \frac{1}{2} a_{-1}(b_0 - b_{-1}) & a_0^2 - a_{-1}^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем требуемые выражения для $\dot{a}_n$ при $n = -2, -1, 0$ и для $\dot{b}_n$ при $n = -1, 0$. Для остальных значений n соотношения (21) просто следуют из (20) ввиду диагональности матриц A_{n-1}, A_n, B_n, B_{n+1}. Итак, доказано, что *система* (15) *со связями* (12)—(14) *или, что то же, уравнение Лакса* (10) *в случае матриц* (17) *эквивалентны цепочке Тоды на всей оси* (21).

2. Поставим теперь в соответствие $\forall t \in [0, T)$ якобиевой матрице $L(t)$ ее спектральные характеристики: спектральную меру $d\rho(\lambda; t)$ и функцию Вейля $m(z; t)$. Найдем уравнения, согласно которым эволюционируют во времени эти характеристики, если матрица $L(t)$ меняется согласно уравнению Лакса (10), т. е. ее элементы $(A_n(t))_{n=0}^{\infty}$, $(B_n(t))_{n=0}^{\infty}$ — согласно системе (15), (12)—(14). При этом будем предполагать, что

$$\sup_{t\in[0,\tau);n\in\mathbb{Z}_+} (\| A_n(t) \|, \| B_n(t) \|, \| \dot{A}_n(t) \|, \| \dot{B}_n(t) \|) < \infty, \tag{22}$$

и поэтому оператор $\dot{L}(t)$ существует и ограничен $\forall t \in [0, T)$ (вместе с $L(t)$).

Пусть $R_z(L(t)) = (L(t) - z1)^{-1} = R_z(t)$ ($t \in [0, T)$, $z \in \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1$) — резольвента оператора $L(t)$. В силу (10) $(L(t) - z1)^{\cdot} = [L(t) - z1, A(t)]$, и поэтому

$$\dot{R}_z(t) = -R_z(t)(\dot{L}(t) - z1)\dot{R}_z(t) = [R_z(t), A(t)]; \qquad t \in [0, T). \tag{23}$$

Выясним, как эволюционирует функция Вейля $m(z, t) = \delta_0^* R_z(t)\delta_0$. Согласно (23) и виду (11) матрицы $A(t)$ имеем

$$\dot{m}(z; t) = \delta_0^* \dot{R}_z(t)\delta_0 = \delta_0^*[R_z(t), A(t)]\delta_0 = \delta_0^* R_z(t) A(t)\delta_0 - \delta_0^* A(t) R_z(t)\delta_0 =$$

$$= \delta_0^* R_z(t)(\delta_0 \Psi_0(t) + \delta_1 \Phi_0(t)) - (\Psi_0(t)\delta_0^* + \Theta_0(t)\delta_1^*) R_z(t)\delta_0 =$$

$$= R_{z;00}\Psi_0(t) + R_{z;01}(t)\Phi_0(t) - \Psi_0(t) R_{z;00}(t) - \Theta_0(t) R_{z;10}(t). \tag{24}$$

В силу формулы (8) и выражения для $P_1(z; t) = A_0^{-1}(t)(z1 - B_0(t))$ получаем

$$R_{z;01}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} P_0(\lambda; t)\, d\rho(\lambda; t)\, P_1^*(\lambda; t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z}\, d\rho(\lambda; t)(\lambda 1 - B_0(t)) A_0^{-1}(t) = (1 + m(z; t)(z1 - B_0(t))) A_0^{-1}(t);$$

$$R_{z;10}(t) = (R_{\bar{z};01}(t))^* = A_0^{-1}(t)(1 + (z1 - B_0(t))\, m(z; t)).$$

Подставляя эти выражения в (24), находим требуемый закон эволюции $m(z; t)$

$$\dot{m}(z; t) = -(\Psi_0(t) + \Theta_0(t) A_0^{-1}(t)(z1 - B_0(t)))\, m(z; t) + m(z; t)(\Psi_0(t) + (z1 -$$

$$- B_0(t)) A_0^{-1}(t)\Phi_0(t) + A_0^{-1}(t)\Phi(t) - \Theta_0(t) A_0^{-1}(t); \qquad t \in [0, T). \tag{25}$$

Используя выражение (9) для $m(z; t)$ через спектральную меру, можно убедиться, что уравнение (25) эквивалентно уравнению для спектральной меры

$$d\dot{\rho}(\lambda; t) = -(\Psi_0(t) + \Theta_0(t) A_0^{-1}(t)(\lambda 1 - B_0(t)))\, d\rho(\lambda; t) + d\rho(\lambda; t)(\Psi_0(t) +$$

$$+ (\lambda 1 - B_0(t)) A_0^{-1}(t)\Phi_0(t)), \quad \lambda \in \mathbb{R}^1, \quad t \in [0, T). \tag{26}$$

В самом деле, $\forall z \in \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T)$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z}\, d\rho(\lambda; t)\right)^{\cdot} = m(z; t)^{\cdot} = -(\Psi_0 + \Theta_0 A_0^{-1}(z1 - B_0)) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z}\, d\rho(\lambda; t) + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z}\, d\rho(\lambda; t)\right)(\Psi_0 + (z1 - B_0) A_0^{-1}\Phi_0) + A_0^{-1}\Phi_0 -$$

$$- \Theta_0 A_0^{-1} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z}(\Psi_0 + \Theta_0 A_0^{-1}(\lambda 1 - B_0))\, d\rho(\lambda; t) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z}\, d\rho(\lambda; t)(\Psi_0 + (\lambda 1 - B_0) A_0^{-1}\Phi_0). \tag{27}$$

воспользовались равенством (4)). Из (27) и единственности определения меры по интегралу Стилтьеса следует, что $\forall\alpha \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$ производная $\dot{\rho}(\alpha; t)$ существует и совпадает с интегралом относительно правой части (26) по множеству α. Таким образом, из (25) следует (26). Ясно, что имеет место и обратная импликация.

Мы доказали, что *спектральные характеристики, соответствующие якобиевой матрице* $L(t)$, $t \in [0, T)$, *являющейся решением уравнения Лакса* (10), *эволюционируют согласно уравнениям* (25) *и* (26).

Уравнение эволюции спектральной меры (26) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Оно содержит неизвестную функцию $B_0(t)$ (считаем функции $\Theta_0(t) A_0^{-1}(t)$ и $A_0^{-1}(t)\Phi_0(t)$ заданными), однако в некоторых случаях можно найти решение (26), пользуясь свойствами меры $d\rho(\lambda; t)$. Рассмотрим примеры 2.1 и 2.2.

В случае полубесконечной цепочки Тоды (16) все функции, входящие в уравнение (26), являются вещественнозначными, и оно принимает следующий вид:

$$d\dot{\rho}(\lambda; t) = f(t)(\lambda - b_0(t))\, d\rho(\lambda; t),$$
$$d\rho(\lambda; t) = \exp\Big(\int_0^t (\lambda - b_0(s)) f(s)\, ds\Big)\, d\rho(\lambda; 0); \quad \lambda \in \mathbb{R}^1, \quad t \in [0, T). \tag{28}$$

Можно воспользоваться тем, что для любого t $\int_{-\infty}^{\infty} d\rho(\lambda; t) = 1$. Тогда из (28) получаем

$$\exp\Big(\int_0^t b_0(s) f(s)\, ds\Big) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(\lambda \int_0^t f(s)\, ds\Big)\, d\rho(\lambda; 0)^{-1},$$

т. е. решение уравнения (28) задается формулой

$$d\rho(\lambda; t) = \exp\Big(\lambda \int_0^t f(s)\, ds\Big)\, d\rho(\lambda; 0)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(\lambda \int_0^t f(s)\, ds\Big)\, d\rho(\lambda; 0)\Big)^{-1} \tag{29}$$

При рассмотрении примера 2.2 показано, что цепочка Тоды на всей оси (..., — 1, 0, 1, ...) эквивалентна системе уравнений (20) с неизвестными вида (17). В этом случае уравнение (26) имеет вид

$$-2d\dot{\rho}(\lambda; t) = J\left(\lambda 1 - \begin{pmatrix} b_{-1} & 2a_{-1} \\ 2a_{-1} & b_0 \end{pmatrix}\right) d\rho(\lambda; t) +$$
$$+ d\rho(\lambda; t)\left(\left(\lambda 1 - \begin{pmatrix} b_{-1} & 2a_{-1} \\ 2a_{-1} & b_0 \end{pmatrix}\right)\right) J. \tag{30}$$

Так как J не коммутирует с $J\begin{pmatrix} b_{-1} & 2a_{-1} \\ 2a_{-1} & b_0 \end{pmatrix}$, решение уравнения (30) не расщепляется на сомножитель, зависящий от λ и сомножитель, зависящий от коэффициентов $b_{-1}(t)$, $b_0(t)$, $a_{-1}(t)$, что не позволяет непосредственно выписать решение $d\rho(\lambda; t)$, как это было сделано в случае уравнения (28). (По поводу случаев, когда цепочка Тоды проинтегрирована см. [12—15].)

3. Перейдем к основному примеру, который будет рассматриваться в данной статье. Положим в (11) $\Phi_0 = -\Theta_0 = \frac{1}{2} A_0$, $\Psi_0 = 0$ и для удобства записи заменим в (11) Ψ_n на $\frac{1}{2}\Psi_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда из (12), (13) следует, что $\Phi_n = -\Theta_n = \frac{1}{2} A_n$, $n \in \mathbb{Z}$, а (14) переписывается в виде

$$A_n\Psi_{n+1} + \Psi_{n+1}A_n = A_n\Psi_n + \Psi_n A_n + [B_{n+1} + B_n, A_n]. \tag{31}$$

(Из (31) и равенства $\Psi_0 = 0$ следует, что $\Psi_n^* = -\Psi_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.) В этом случае уравнение Лакса (10) эквивалентно системе

$$\dot{B}_n = A_n^2 - A_{n-1}^2 + \frac{1}{2}[B_n, \Psi_n],$$

$$\dot{A}_n = \frac{1}{2}(A_n(\Psi_{n+1} + B_{n+1}) - (\Psi_n + B_n)A_n); \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad A_{-1} \equiv 0, \quad t \in [0, T). \tag{32}$$

вместе с соотношениями (31). Очевидно, в скалярном случае уравнения (32) переходят в уравнения полубесконечной цепочки Тоды, что дает основания считать (32) *неабелевым аналогом полубесконечной цепочки Тоды.*

Уравнение (26), описывающее эволюцию спектральной меры, выглядит в случае (32) таким образом:

$$2d\dot{\rho}(\lambda; t) = (\lambda 1 - B_0(t))\,d\rho(\lambda; t) + d\rho(\lambda; t)(\lambda 1 - B_0(t)). \tag{33}$$

Это линейное уравнение первого порядка, содержащее неизвестную оператор-функцию $B_0(t)$. Его решение можно найти, воспользовавшись самосопряженностью $B_0(t)$ и свойствами операторной спектральной меры. В самом деле, из (33) следует

$$d\rho(\lambda; t) = X(t)\,e^{\lambda t}d\rho(\lambda; 0)\,X^*(t), \tag{34}$$

где $X(t)$ — решение уравнения $\dot{X}(t) = -\frac{1}{2}B_0(t)X(t)$, $X(0) = 1$. Из условия $\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho(\lambda; t) = 1$ можно заключить, что $X^*(t)X(t) = \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t}d\rho(\lambda; 0)\Big)^{-1} = F^{-1}(t)$. Кроме того, так как $B_0(t) = B_0^*(t)$, то $\dot{X}(t)X^{-1}(t) = (X^*(t))^{-1} \times (X^*(t))^{\cdot}$. Поэтому $\dot{X}(t) = (X^*(t))^{-1}(X^*(t))^{\cdot}X(t) = X(t)F(t)(F^{-1}(t)X^{-1}(t))^{\cdot} \times X(t) = -X(t)\dot{F}(t)F^{-1}(t) - \dot{X}(t)$, т. е. $X(t)$ является решением уравнения

$$\dot{X}(t) = -\frac{1}{2}X(t)\dot{F}(t)F^{-1}(t). \tag{35}$$

Таким образом, мы показали, что *если* $A_n(t)$, $B_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *являются решениями системы* (32) *при условии* (31), *то эволюция спектральной меры* $d\rho(\lambda; t)$ *задается уравнениями* (34), (35).

4. Покажем теперь, что если спектральная мера $d\rho(\lambda; t)$ эволюционирует согласно уравнению (33) (или, что эквивалентно, (34), (35)), то восстановленные по формулам (7) оператор-функции $A_n(t)$, $B_n(t)$ являются решениями системы (31), (32).

Прежде всего отметим, что если $d\rho(\lambda; 0)$ — спектральная мера, отвечающая $L(0)$, то для любого t мера $d\rho(\lambda; t)$, найденная из (34), (35), удовлетворяет условиям, необходимым для разрешения обратной задачи спектрального анализа ч. 2 п. 1. Действительно, существование интегралов (3) и выполнение (4) для меры $d\rho(\lambda; t)$ очевидны. Кроме того, если $P(\lambda)$ — операторный полином с обратимым старшим коэффициентом, то полином $P(\lambda)X(t)$ обладает тем же свойством, и оператор $\int\limits_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)X(t)\,e^{\lambda t}d\rho(\lambda; 0) \times X^*(t)\,P^*(\lambda) \geqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\,X(t)\,d\rho(\lambda; 0)\,X^*(t)\,P^*(\lambda)$ обратим в силу свойств меры $d\rho(\lambda; 0)$.

Заметим также, что уравнение для A_n системы (32) эквивалентно уравнению

$$(A_n^2)^{\cdot} = A_nB_{n+1}A_n + \frac{1}{2}A_n^2(\Psi_n - B_n) - \frac{1}{2}(\Psi_n + B_n)A_n^2. \tag{36}$$

В самом деле, из (31) следует

$$\dot{A}_n = \frac{1}{2} A_n (\Psi_{n+1} + B_{n+1}) - \frac{1}{2} (\Psi_n + B_n) A_n =$$

$$= \frac{1}{2} A_n (\Psi_n - B_n) - \frac{1}{2} (\Psi_{n+1} - B_{n+1}) A_n.$$

Поэтому

$$(A_n^2)^{\cdot} = A_n \dot{A}_n + \dot{A}_n A_n = \frac{1}{2} A_n (A_n (\Psi_n - B_n) - (\Psi_{n+1} - B_{n+1}) A_n) +$$

$$+ \frac{1}{2} (A_n (\Psi_{n+1} + B_{n+1}) - (\Psi_n + B_n) A_n) = A_n B_{n+1} A_n +$$

$$+ \frac{1}{2} A_n^2 (\Psi_n - B_n) - \frac{1}{2} (\Psi_n + B_n) A_n^2.$$

Обратно, из (36) следует уравнение для A_n в (32) в силу (31) и положительности A_n.

Итак, пусть выполняется (33). Обозначим через $s_n(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n 1 d\rho(\lambda; t)$; $n \in \mathbb{Z}_+$, моменты меры $d\rho(\lambda; t)$. Тогда

$$\dot{S}_n(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n 1 d\dot{\rho}(\lambda; t) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\lambda^{n+1} 1 - \lambda^n B_0(t))\, d\rho(\lambda; t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^{n+1} 1 d\rho(\lambda; t) - \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n d\rho(\lambda; t)\, B_0(t) =$$

$$= s_{n+1}(t) - \frac{1}{2} (B_0(t)\, s_n(t) + s_n(t)\, B_0(t)). \tag{37}$$

Из (7) следует, что $B_0(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda P_0(\lambda; t)\, d\rho(\lambda; t)\, P_0^*(\lambda; t) = s_1(t)$. Поэтому $\dot{B}_0(t) = s_2(t) - s_1^2(t)$. С другой стороны, напомним, что (ч. 2 п. 1)

$$A_n^2(t) = N_{n+1}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{n+1}(\lambda; t)\, d\rho(\lambda; t)\, S_{n+1}^*(\lambda; t), \tag{38}$$

в частности, $A_0^2(t) = N_1(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\lambda 1 - s_1(t))\, d\rho(\lambda; t)\, (\lambda 1 - s_1(t)) = s_2(t) - s_1^2(t)$. Таким образом, $\dot{B}_0 = A_0^2 = A_0^2 - A_{-1}^2 + \frac{1}{2} [B_0, \Psi_0]$. Так как

$$B_1(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda P_1(\lambda; t)\, d\rho(\lambda; t)\, P_1^*(\lambda; t) = N_1^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda (\lambda 1 - s_1)\, d\rho(\lambda; t)\, (\lambda 1 -$$

$$- s_1)\, N_1^{-1/2} = N_1^{-1/2} (s_3 - s_1 s_2 - s_2 s_1 + s_3)\, N_1^{-1/2},$$

то получаем

$$(A_0^2)^{\cdot} = \dot{N_1} = (s_2 - s_1^2)^{\cdot} = s_3 - \frac{1}{2} s_2 s_1 - \frac{1}{2} s_1 s_2 - (s_2 - s_1^2)\, s_1 - s_1 (s_2 - s_1^2) =$$

$$= (s_3 - s_1 s_2 - s_2 s_1 + s_1^3) - \frac{1}{2} (s_2 - s_1^2)\, s_1 - \frac{1}{2} s_1 (s_2 - s_1^2) =$$

$$= A_0 B_1 A_0 + \frac{1}{2} A_0^2 (\Psi_0 - B_0) - \frac{1}{2} (\Psi_0 + B_0) A_0^2.$$

Мы показали, что для $B_0(t)$, $A_0(t)$ выполняются уравнения системы (32). Предположим теперь, что уравнения (32) справедливы для $A_j(t)$, $B_j(t)$ при всех значениях j, не превышающих $n-1$. Установим некоторые вспомогательные соотношения.

Л е м м а 2.1. *В силу принятых предположений справедливы следующие соотношения:*

1. $(A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1})^{\cdot} = (N_1^{-1/2} \dots N_n^{-1/2})^{\cdot} = \frac{1}{2}(B_0 N_1^{-1/2} \dots N_n^{-1/2} + N_1^{-1/2} \dots$ $\dots N_n^{-1/2}(\Psi_n - B_n))$;

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_n(\lambda; t)\, d\rho(\lambda; t)\, P_{n-1}^{*}(\lambda; t) = -A_{n-1} + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t)\, B_0 d\rho(\lambda; t) \times$ $\times P_{n-1}^{*}(\lambda; t)$;

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_{n+1}(\lambda; t)\, d\rho(\lambda; t)\, P_{n-1}^{*}(\lambda; t) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_{n+1}(\lambda; t)\, B_0 d\rho(\lambda; t) P_{n-1}^{*}(\lambda; t)$;

4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_n(\lambda; t)\, d\rho(\lambda; t)\, P_n^{*}(\lambda; t) = \frac{1}{2}\Big(-(\Psi_n + B_n) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t)\, B_0 d\rho(\lambda;$ $t)\, P_n^{*}(\lambda; t)\Big)$;

5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_{n+1}(\lambda; t)\, d\rho(\lambda; t)\, P_{n+1}^{*}(\lambda; t) = \frac{1}{2} A_n(\Psi_n - B_n) A_n^{-1} + \dot{A}_n A_n^{-1} +$ $+ \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_{n+1}(\lambda; t)\, B_0 d\rho(\lambda; t)\, P_{n+1}^{*}(\lambda; t)$.

Соотношения 4 и 5 не совпадают, так как справедливость уравнений для A_n, B_n системы (32) еще не проверена.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Из (31), (32) следует

$$(A_j^{-1})^{\cdot} = \frac{1}{2} A_j^{-1}(\Psi_j + B_j) - \frac{1}{2}(\Psi_j + B_j) A_j^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2} A_j^{-1}(\Psi_{j+1} - B_{j+1}) - \frac{1}{2}(\Psi_j - B_j) A_j^{-1}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Тогда

$$(A_0^{-1} \dots A_{n-1}^{-1})^{\cdot} = \sum_{j=0}^{n-1} A_0^{-1} \dots A_{j-1}^{-1} \cdot \frac{1}{2}(A_j^{-1}(\Psi_{j+1} - B_{j+1}) - (\Psi_j - B_j) A_j^{-1}) \times$$

$$\times A_{j+1}^{-1} \dots A_{n-1}^{-1} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=0}^{n-5} A_0^{-1} \dots A_{j-1}^{-1}(\Psi_j - B_j) A_j^{-1} \dots A_{n-1}^{-1} -$$

$$- \sum_{j=0}^{n-1} A_0^{-1} \dots A_{j-1}^{-1}(\Psi_j - B_j) A_j^{-1} \dots A_{n-1}^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{2}(B_0 N_1^{-1/2} \dots N_n^{-1/2} + N_1^{-1/2} \dots N_n^{-1/2}(\Psi_n - B_n)).$$

При доказательстве соотношений $2-5$ будет использоваться тот факт, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t)\, d\rho(\lambda; t)\, Q_k(\lambda) = 0$ для любого операторного полинома степени $k < n$ в силу (5). В частности, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t)\, d\rho(\lambda; t)\, P_{n-1}^{*}(\lambda; t) =$

$= 0$, поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_n(\lambda;\,t)\,d\rho(\lambda;\,t)\,P_{n-1}^{*}(\lambda;\,t) = \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda;\,t)\,d\rho(\lambda;\,t)\,P_{n-1}^{*}(\lambda;\,t)\Big)^{\cdot} -$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda;\,t)\,d\dot{\rho}(\lambda;\,t)\,P_{n-1}^{*}(\lambda;\,t) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda;\,t)\,d\rho(\lambda;\,t)\,P_{n-1}^{*}(\lambda;\,t) +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda;\,t)\,B_0(t)\,d\rho(\lambda;\,t)\,P_{n-1}^{*}(\lambda;\,t).$$

Из (7) следует, что первое слагаемое равно $A_{n-1}(t)$, что и доказывает равенство 2. Равенство 3 доказывается аналогично.

Для доказательства 4 напомним, что $P_n(\lambda;\,t) = N_n^{-1/2} S_n(\lambda;\,t) = N_n^{-1/2} \ldots N_1^{-1/2}\lambda^n + Q_{n-1}(\lambda;\,t)$, где степень многочлена $Q_{n-1}(\lambda;\,t)$ не превышает $n-1$. Поэтому $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_n(\lambda;\,t)\,d\rho(\lambda;\,t)\,P_n^{*}(\lambda;\,t) = (N_n^{-1/2}\ldots N_1^{-1/2})^{\cdot} \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n d\rho(\lambda;\,t)\,P_n^{*}(\lambda;\,t) = (N_n^{-1/2}\ldots N_1^{-1/2})^{\cdot}\,(N_1^{1/2}\ldots N_n^{1/2})$. Используя равенство 1, последнее выражение можно переписать в виде

$$-\frac{1}{2}(\Psi_n + B_n) + \frac{1}{2} N_n^{-1/2}\ldots N_1^{-1/2} B_0 N_1^{1/2}\ldots N_n^{1/2} = \frac{1}{2}(\Psi_n - B_n) +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} N_n^{-1/2}\ldots N_1^{-1/2}\lambda^n B_0 d\rho(\lambda;\,t)\,P_n^{*}(\lambda;\,t) =$$

$$= \frac{1}{2}(\Psi_n - B_n) + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda;\,t)\,B_0 d\rho(\lambda;\,t)\,P_n^{*}(\lambda;\,t),$$

что и требовалось доказать. Соотношение 5 доказывается аналогично.

Теперь можно рассмотреть эволюцию $A_n(t)$ и $B_n(t)$

$$\dot{B}_n(t) = \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda;\,t)\,d\rho(\lambda;\,t)\,P_n^{*}(\lambda;\,t)\Big)^{\cdot} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \dot{P}_n(\lambda;\,t)\,d\rho(\lambda;\,t)\,P_n^{*}(\lambda;\,t) +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda;\,t)\,(\lambda 1 - B_0(t))\,d\rho(\lambda;\,t)\,P_n^{*}(\lambda;\,t) + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda;\,t)\,d\rho(\lambda;\,t)\,(\lambda 1 -$$

$$- B_0(t))\,P_n^{*}(\lambda;\,t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda;\,t)\,d\rho(\lambda;\,t)\,\dot{P}_n^{*}(\lambda;\,t).$$

Напомним, что для полиномов $P_n(\lambda;\,t)$ справедливы рекуррентные соотношения

$$\lambda P_j(\lambda;\,t) = A_{j-1}(t)\,P_{j-1}(\lambda;\,t) + B_j(t)\,P_j(\lambda;\,t) + A_j(t)\,P_{j+1}(\lambda;\,t);$$
$$j \in \mathbb{Z}_+,\quad P_{-1}(\lambda;\,t) = 0,\quad P_0(\lambda;\,t) = 1. \tag{39}$$

Учитывая (39) и (5), получаем

$$\dot{B}_n(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_n(\lambda;\,t)\,d\rho(\lambda;\,t)\,P_{n-1}^{*}(\lambda;\,t)\,A_{n-1}(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_n(\lambda;\,t)\,d\rho(\lambda;\,t)\,P_n^{*}(\lambda;$$

$$t)\,B_n(t) - \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_n(\lambda;\,t)\,B_0 d\rho(\lambda;\,t)\,P_{n-1}^{*}(\lambda;\,t)\,A_{n-1} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda;\,t)\,B_0 d\rho(\lambda;\,t)\times$$

$$\times P_n^*(\lambda; t) B_n + A_{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} P_{n-1}(\lambda; t)\, d\rho(\lambda; t) B_0 P_n^*(\lambda; t) + B_n \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t)\, d\rho(\lambda;$$

$$t) B_0 P_n^*(\lambda; t)) + A_{n-1}^2 + B_n^2 + A_n^2 + A_{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} P_{n-1}(\lambda; t)\, d\rho(\lambda; t) \dot{P}_n^*(\lambda; t) +$$

$$+ B_n \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t)\, d\rho(\lambda; t) \dot{P}_n^*(\lambda; t).$$

Теперь можно воспользоваться соотношениями 2 и 4 леммы 2.1; в результате получим

$$\dot{B}_n = A_{n-1}^2 + B_n^2 + A_n^2 - 2A_{n-1}^2 - \frac{1}{2}(\Psi_n + B_n) B_n + \frac{1}{2} B_n (\Psi_n - B_n) =$$

$$= A_n^2 - A_{n-1}^2 + \frac{1}{2}[B_n, \Psi_n].$$

После аналогичных преобразований для $\dot{A}_n$ придем к равенству

$$\dot{A}_n = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_n(\lambda; t)\, d\rho(\lambda; t) P_n^*(\lambda; t) A_n + A_n \int_{-\infty}^{\infty} P_{n+1}(\lambda; t)\, d\rho(\lambda; t) \dot{P}_{n+1}^*(\lambda; t) +$$

$$+ A_n B_{n+1} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\lambda; t) B_0 d\rho(\lambda; t) P_n^*(\lambda; t) A_n -$$

$$- \frac{1}{2} A_n \int_{-\infty}^{\infty} P_{n+1}(\lambda; t)\, d\rho(\lambda; t) B_0 P_{n+1}^*(\lambda; t).$$

Учитывая равенства 4, 5 леммы 2.1, переписываем последнее выражение

$$\dot{A}_n = -\frac{1}{2}(\Psi_n + B_n) A_n + B_n A_n + \frac{1}{2} A_n^2 (\Psi_n - B_n) A_n^{-1} - A_n \dot{A}_n A_n^{-1}.$$

Домножим обе части справа на A_n

$$A_n \dot{A}_n + \dot{A}_n A_n = (A_n^2)^{\cdot} = A_n B_{n+1} A_n + \frac{1}{2} A_n^2 (\Psi_n - B_n) - \frac{1}{2}(\Psi_n + B_n) A_n^2,$$

т. е. справедливо уравнение (36), а следовательно, функции $A_n(t)$, $B_n(t)$, восстановленные при помощи формул (7) по спектральной мере $d\rho(\lambda; t)$, удовлетворяющей (33), являются решениями системы (31), (32). Подытожим доказанное в ч. 3, 4.

Теорема 2.1. *Для системы* (31), (32) *существует и единственно решение задачи Коши в классе последовательностей* $(A_n(t), B_n(t) \mid A_n(t) > 0,\ B_n(t) = B_n^*(t))_{n=0}^{\infty}$, *ограниченных по норме в совокупности. Процедура построения решения такова: по начальным данным* $(A_n(0), B_n(0))_{n=0}^{\infty}$ *строится операторная якобиева матрица* $L(0)$ *и отвечающая ей спектральная мера* $d\rho(\lambda; 0)$. *Эволюция спектральной меры задается уравнением*

$$d\rho(\lambda; t) = X(t) e^{\lambda t} d\rho(\lambda; t) X^*(t),$$

где

$$\dot{X}(t) = -\frac{1}{2} X(t) \dot{F}(t) F^{-1}(t), \quad X(0) = 1, \quad F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} d\rho(\lambda; 0).$$

В произвольный момент времени t *решения* $A_n(t)$, $B_n(t)$ *восстанавливаются по спектральной мере* $d\rho(\lambda; t)$ *при помощи формул* (7).

3. Некоторые следствия теоремы 2.1. 1. В [8, 9] рассматривалась неабелева цепочка Тоды вида

$$\dot{D}_n = C_n - C_{n-1}, \quad \dot{C}_n = C_n D_{n+1} - D_n C_n; \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

и эквивалентная ей система уравнений

$$\frac{d}{dt}(G_n^{-1} G_n)^{\cdot} = G_n^{-1} G_{n+1} - G_{n-1}^{-1} G_n; \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Рассмотрим ограничения этих систем на полуось

$$\dot{D}_n = C_n - C_{n-1}, \quad \dot{C}_n = C_n D_{n+1} - D_n C_n; \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \quad C_{-1} \equiv 0, \tag{40}$$

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}(G_n^{-1} \dot{G}_n) = G_n^{-1} G_{n+1} - G_{n-1}^{-1} G_n; \qquad n \in \mathbb{N}, \\ \frac{d}{dt}(G_0^{-1} \dot{G}_0) = G_0^{-1} G_1. \end{gathered} \tag{41}$$

Эквивалентность систем (40) и (41) устанавливается заменой

$$C_n = G_n^{-1} G_{n+1}, \quad D_n = G_n^{-1} \dot{G}_n. \tag{42}$$

В данном пункте будет показано, как при помощи решений цепочки (32) строить решения специального вида систем (40) и (41).

Пусть $(G_n)_{n=0}^{\infty}$ — решение системы (41), а X — решение линейного уравнения

$$\dot{X} = \frac{1}{2} X G_0^{-1} \dot{G}_0. \tag{43}$$

Предположим, что выполняется следующее условие: для любого $t \geqslant 0$ оператор $X(t) G_0^{-1}(t) \dot{G}_0(t) X^{-1}(t)$ самосопряжен, а операторы

$$X(t)\, G_0^{-1}(t)\, G_n(t)\, X^{-1}(t); \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{44}$$

положительны. Тогда справедлива теорема.

Теорема 3.1. *Между решениями системы* (41), *удовлетворяющими условию* (44), *и решениями системы* (32) *существует взаимно однозначное соответствие, которое задается соотношениями*

$$\begin{gathered} G_{n+1} = G_0 X^{-1} A_0 \ldots A_{n-1} A_n^2 A_{n-1} \ldots A_0 X, \\ \dot{G}_n = G_0 X^{-1} A_0 \ldots A_{n-1} B_n A_{n-1} \ldots A_0 X; \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \\ \dot{X} = \frac{1}{2} B_0 X. \end{gathered} \tag{45}$$

Доказательство. Рассмотрим решение системы (32) $(A_n, B_n)_{n=0}^{\infty}$. Сделаем замену

$$\begin{gathered} D_n = X^{-1} A_0^{-1} \ldots A_{n-1}^{-1} B_n A_{n-1} \ldots A_0 X, \\ C_n = X^{-1} A_0^{-1} \ldots A_{n-1}^{-1} A_n^2 A_{n-1} \ldots A_0 X, \end{gathered} \tag{46}$$

где $\dot{X} = \frac{1}{2} B_0 X$. Тогда для того чтобы найти уравнения, согласно которым эволюционируют C_n, D_n, можно воспользоваться соотношением 1 леммы 2.1

$$\dot{D}_n = -\frac{1}{2} X^{-1} B_0 X D_n + \frac{1}{2} D_n X^{-1} B_0 X + \frac{1}{2} X^{-1} (B_0 A_0^{-1} \ldots A_{n-1}^{-1} +$$

$$+ A_0^{-1} \ldots A_{n-1}^{-1} (\Psi_n - B_n) B_n) A_{n-1} \ldots A_0 X - \frac{1}{2} X^{-1} A_0^{-1} \ldots A_{n-1}^{-1} ((\Psi_n - B_n) \times$$

$$\times A_{n-1} \ldots A_0 + B_0 A_{n-1} \ldots A_0) X + X^{-1} A_0^{-1} \ldots A_{n-1}^{-1} \Big((A_n^2 - A_{n-1}^2) +$$

$$+ \frac{1}{2} [B_n, \Psi_n] \Big) A_{n-1} \ldots . A_0 X = C_n - C_{n-1}; \quad n \in \mathbb{N}; \quad \dot{D}_0 = C_0.$$

Аналогично проверяется, что $\dot{C}_n = C_n D_{n+1} - D_n C_n$; $n \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, оператор—функции (46) являются решениями системы (40). Тогда функции G_n, связанные с C_n, D_n соотношениями (42), будут решениями системы (41), причем

$$G_{n+1} = G_0 C_0 \ldots C_{n-1} C_n = G_0 X^{-1} A_0 \ldots A_{n-1} A_n^2 A_{n-1} \ldots A_0 X,$$

$$\dot{G}_n = G_0 C_0 \ldots C_{n-1} D_n = G_0 X^{-1} A_0 \ldots A_{n-1} B_n A_{n-1} \ldots A_0 X; \qquad n \in \mathbb{N},$$

а $\dot{G}_0 = G_0 X^{-1} B_0 X = 2 G_0 X^{-1} \dot{X}$, т. е. выполняется уравнение (43).

Обратно, предположим, что $(G_n)_{n=0}^{\infty}$ — решение системы (41), удовлетворяющее условию (44). Обозначим

$$\alpha_n = X G_0^{-1} G_{n+1} X^{-1}, \quad \beta_n = X G_0^{-1} \dot{G}_n X^{-1}; \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{47}$$

Рассмотрим

$$\dot{\alpha}_n = \frac{1}{2} X G_0^{-1} \dot{G}_0 G_0^{-1} G_{n+1} X^{-1} - \frac{1}{2} X G_0^{-1} G_{n+1} G_0^{-1} \dot{G}_0 X^{-1} -$$

$$- X G_0^{-1} \dot{G}_0 G_0^{-1} G_{n+1} X^{-1} + X G_0^{-1} \dot{G}_{n+1} X^{-1} = \beta_{n+1} - \frac{1}{2} (X G_0^{-1} \dot{G}_0 X^{-1} X G_0^{-1} \times$$

$$\times G_{n+1} X^{+1} + X G_0^{-1} G_{n+1} X^{-1} X G_0^{-1} \dot{G}_0 X^{-1}) = \beta_{n+1} - \frac{1}{2} (\beta_0 \alpha_n + \alpha_n \beta_0). \tag{48}$$

Отсюда и из условия (44) следует, что операторы $\beta_n = \dot{\alpha}_{n-1} + \frac{1}{2} (\beta_0 \alpha_{n-1} + \alpha_{n-1} \beta_0)$ самосопряжены при $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$\begin{gathered} A_0 = \alpha_0^{1/2}, \quad B_0 = \beta_0, \\ A_n = (A_{n-1}^{-1} \ldots A_0^{-1} \alpha_n A_0^{-1} \ldots A_{n-1}^{-1})^{1/2}, \\ B_n = A_{n-1}^{-1} \ldots A_0^{-1} \beta_n A_0^{-1} \ldots A_{n-1}^{-1}; \quad n \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{49}$$

Очевидно, операторы A_n положительны, а B_n самосопряжены. Рассмотрим $\dot{B}_0 = \dot{\beta}_0 = \frac{1}{2} \beta_0^2 + X G_0^{-1} G_1 X^{-1} - \frac{1}{2} \beta_0^2 = A_0^2$. В силу положительности A_0 существует единственный оператор Ψ_1 такой, что $A_0 \Psi_1 + \Psi_1 A_0 = [B_1 + B_0, A_0]$. Тогда

$$(B_1 - \Psi_1) A_0 - A_0 B_0 = A_0 (B_1 + \Psi_1) - B_0 A_0.$$

Так как

$$\dot{\alpha}_0 = (A_0 \dot{A}_0 + \dot{A}_0 A_0) = \beta_1 - \frac{1}{2} (\beta_0 \alpha_0 + \alpha_0 \beta_0) = A_0 B_1 A_0 - \frac{1}{2} (B_0 A_0^2 + A_0^2 B_0) =$$

$$= \frac{1}{2} A_0 ((B_1 - \Psi_1) A_0 - A_0 B_0) + \frac{1}{2} (A_0 (B_1 + \Psi_1) - B_0 A_0) A_0,$$

то получим $\dot{A}_0 = A_0(B_1 + \Psi_1) - B_0A_0$. Таким образом, проверили выполнение (31), (32) при $n = 0$.

Предположим, что B_k, A_k удовлетворяют уравнениям системы (32) $k \leqslant n-1$, и пусть Ψ_{k+2} — решение операторного уравнения $A_k(\Psi_{k+1} - \Psi_k) + (\Psi_{k+1} - \Psi_k)A_k = [B_{k+1} + B_k, A_k]$ при $k = 1, \dots, n$. Тогда, учитывая соотношение 1 леммы 2.1, получаем

$$\dot{B}_n = -\frac{1}{2}(B_n + \Psi_n)B_n + \frac{1}{2}B_n(\Psi_n - B_n) + \frac{1}{2}A_{n-1}^{-1}\dots A_0^{-1}(B_0\beta_n + \beta_nB_0)A_0^{-1}\dots A_{n-1}^{-1} + A_{n-1}^{-1}\dots A_0^{-1}\dot{\beta}_nA_0^{-1}\dots A_{n-1}^{-1}.$$

Но $\dot{\beta}_n = \frac{1}{2}(B_0\beta_n + \beta_nB_0) - \alpha_n - \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}^{-1} + \beta_n\alpha_{n-1}^{-1}\beta_n$. Поэтому

$$\dot{B}_n = \frac{1}{2}[B_n, \Psi_n] - B_n^2 + A_n^2 - A_{n-1}^{-1}\dots A_0^{-1}\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}^{-1}\alpha_{n-1}A_0^{-1}\dots A_{n-1}^{-1} + A_{n-1}^{-1}\dots A_0^{-1}\beta_n\alpha_{n+1}^{-1}\beta_nA_0^{-1}\dots A_{n-1}^{-1} = \frac{1}{2}[B_n, \Psi_n] - B_n^2 + A_n^2 - A_{n-1}^{-1}A_{n-1}^2A_{n-2}A_{n-2}^{-2}A_{n-2}A_{n-1}^2A_{n-1}^{-1} + B_nA_{n-1}A_{n-1}^{-2}A_{n-1}B_n = A_n^2 - A_{n-1}^2 + \frac{1}{2}[B_n, \Psi_n].$$

Аналогично,

$$(A_n^2)^{\cdot} = -\frac{1}{2}(\Psi_n + B_n)A_n^2 - \frac{1}{2}A_n^2(B_n - \Psi_n) + \frac{1}{2}A_{n-1}^{-1}\dots A_0^{-1}(\beta_0A_n + A_n\beta_0)A_0^{-1}\dots A_{n-1}^{-1} + A_{n-1}^{-1}\dots A_0^{-1}\left(\beta_{n+1} - \frac{1}{2}(B_0\alpha_n + \alpha_nB_0)\right)A_0^{-1}\dots A_{n-1}^{-1} =$$

$$= A_nB_{n+1}A_n - \frac{1}{2}(B_n + \Psi_n)A_n^2 - \frac{1}{2}A_n^2(B_n - \Psi_n) =$$

$$= \frac{1}{2}A_n((B_{n+1} - \Psi_{n+1})A_n - A_n(B_n - \Psi_n)) + \frac{1}{2}(A_n(B_{n+1} + \Psi_{n+1}) - (B_n + \Psi_n)A_n)A_n.$$

Отсюда следует

$$\dot{A}_n = \frac{1}{2}(A_n(B_{n+1} - \Psi_{n+1}) - (B_n + \Psi_n)A_n).$$

Тем самым показали, что оператор-функции (49) являются решениями системы (32). При этом

$$G_{n+1} = G_0X^{-1}\alpha_nX = G_0^{-1}X^{-1}A_0\dots A_{n-1}A_n^2A_{n-1}\dots A_0X,$$

$$\dot{G}_n = G_0X^{-1}A_0\dots A_{n-1}B_nA_{n-1}\dots A_0X; \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\dot{X} = \frac{1}{2}XG_0^{-1}\dot{G}_0X^{-1}X = \frac{1}{2}B_0X,$$

что и требовалось доказать.

2. Здесь рассмотрим связь между системой (32) и потоками Тоды, связанными с самосопряженными конечнодиагональными операторами [10]. Пусть $\tilde{L}$ — конечнодиагональный самосопряженный ограниченный опе-

ратор в l_2, порожденный разностным выражением

$$(\tilde{L}u)_n = c_{0n}u_n + \sum_{k=1}^{N}(c_{k,n-k}u_{n-k} + c_{nk}u_{n+k}); \qquad u = (u_j)_{j=0}^{\infty} \in l_2 \tag{50}$$

($n \in \mathbb{Z}_+$; $c_{kj} = 0$ при $j < 0$, $c_{nj} > 0$ при $|n - j| = N$). Тогда уравнение Лакса

$$\tilde{L}^{\cdot} = [\tilde{L}(t), \tilde{A}(t)], \tag{51}$$

где

$$(\tilde{A}u)_n = \sum_{k=1}^{N}(c_{k,n-k}u_{n-k} - c_{nk}u_{n+k}), \tag{52}$$

является частным случаем уравнений потоков Тоды, изученных в [10]. Покажем, что уравнение (51) может быть сведено к системе (32).

Операторы $\tilde{L}$ и $\tilde{A}$ могут быть записаны как блочно-трехдиагональные с блоками $N \times N$

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} C_{00} & \dots & C_{0,N-1} & C_{0N} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ C_{N-1,0} & \dots & C_{N-1,N-1} & \cdot & & C_{N-1,2N-1} \\ C_{N0} & & & \cdot & & \\ & \ddots & & & \cdot & \\ 0 & & C_{2N-1,N-1} & & \cdot & \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -C_{0,1} \dots & -C_{0,N-1} & & -C_{0N} & & 0 \\ C_{01} & 0 & & & & \cdot & \\ \vdots & \ddots & & 0 & & & \ddots \\ C_{N-1,0} & & & \cdot & & & C_{N-1,2N-1} \\ C_{N0} & \cdot & & & \cdot & & \\ 0 & \ddots & C_{2N-1,N-1} & & & \cdot & \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Обозначим блоки, стоящие на диагонали $\tilde{L}$, $\tilde{B}_n$, над диагональю — A_n. Тогда

$$\begin{gathered} \tilde{B}_n = \| \tilde{b}_{jk}^n \|_{j,k=0}^{N-1}, \quad \tilde{b}_{jk}^n = c_{|j-k|,nN+\max(j,k)}, \\ \tilde{A}_n = \| \tilde{a}_{jk}^n \|_{j,k=0}^{N-1}, \quad \tilde{a}_{jk}^n = \begin{cases} c_{N-j,nN+k}, & j \geqslant k, \\ 0, & j < k, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \end{cases} \end{gathered} \tag{54}$$

Для любого $n \geqslant 0$ справедливо представление $\tilde{A}_n(t)$ в виде

$$\tilde{A}_n(t) = C_n(t)V_n(t), \tag{55}$$

где $C_n(t) > 0$, а $V_n(t)$ — унитарная матрица. Положим

$$U_0(t) = 1, \quad U_{n+1}(t) = V_0(t) \dots V_n(t), \quad U(t) = \operatorname{diag}(U_0(t), \ U_1(t), \dots) \tag{56}$$

и сделаем замену $L(t) = U(t)\tilde{L}(t)U^{-1}(t)$. Тогда уравнение (51) перейдет в эквивалентное ему

$$\dot{L} = [L, U\tilde{A}U^{-1} - \dot{U}U^{-1}], \tag{57}$$

где $L(t)$ — трехдиагональный самосопряженный оператор, причем его внедиагональные элементы $A_n = U_n\tilde{A}_n U_{n+1}^{-1} = U\tilde{A}_n V_n^{-1}U_n^{-1} = U_n C_n U_n^{-1}$ положительны. Из (53) следует, что уравнение (57) имеет вид (10), (11), причем $\Phi_0 = -\Theta_0 = A_0$, $\Psi_0 = \delta_0^* \tilde{A}\delta_0 = D_0$. Таким образом, уравнение Лакса (51) эквивалентно системе (31), (32) с $\Psi_0 = D_0$. В ч. 3, 4 п. 2 рассматривалась система (32) при условии $\Psi_0 = 0$. Другой выбор Ψ_0 никак не влияет на рассуждения в ч. 4 п. 2, однако меняет вид эволюции спектральной меры, соответствующей L. Уравнение эволюции имеет в этом случае вид

$$d\dot{\rho}(\lambda; t) = (\lambda 1 - (\tilde{B}_0(t) + D_0(t)))\, d\rho(\lambda; t) + d\rho(\lambda; t)\,(\lambda 1 - (\tilde{B}_0(t) - D_0(t))). \quad (58)$$

Легко видеть, что матрица $\tilde{B}_0(t) + D_0(t)$ нижнетреугольная и $(\tilde{B}_0(t) + D_0(t))^* = \tilde{B}_0(t) - D_0(t)$. Запишем, как и в ч. 3 п. 2, решение системы (58) в виде $d\rho(\lambda; t) = X(t)\, e^{2\lambda t} d\rho(\lambda; 0)\, X^*(t)$, где $X(0) = 1$ и $\dot{X}(t) = -(\tilde{B}_0(t) + D_0(t))\, X(t)$. Из условия $\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho(\lambda; t) = 1$ следует $X^*(t)\, X(t) = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\lambda t} d\rho(\lambda; 0)\right)^{-1} = F^{-1}(t)$, откуда можно найти матрицу $X(t)$, учитывая ее нижнетреугольность и положительность ее диагональных элементов. Таким образом, справедлива теорема, аналогичная теореме 2.1.

Теорема 3.2. *Для произвольных ограниченных начальных данных* $\tilde{L}(0)$ *существует и единственно решение задачи Коши в классе ограниченных операторов для уравнения* (51). *Процедура построения решения такова: по* $\tilde{L}(0)$ *при помощи* (55), (56) *строится операторная якобиева матрица* $L(0) = U(0)\, \tilde{L}(0)\, U^{-1}(0)$ *и соответствующая ей спектральная мера* $d\rho(\lambda; 0)$. *Эволюция меры задается формулой*

$$d\rho(\lambda; t) = X(t)\, e^{2\lambda t} d\rho(\lambda; 0)\, X^*(t),$$

где $X(t)$ *— нижнетреугольная с положительными диагональными элементами матрица, удовлетворяющая уравнению*

$$X^*(t)\, X(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\lambda t} d\rho(\lambda; 0)^{-1}.$$

В произвольный момент времени t *по* $d\rho(\lambda; t)$ *восстанавливаются при помощи формул* (7) *коэффициенты операторной якобиевой матрицы* $L(t)$. *Тогда* $\tilde{L}(t) = U^{-1}(t)\, L(t)\, U(t)$, *где унитарный оператор* $U(t) = \mathrm{diag}(1, U_1, U_2, \ldots)$ *однозначно определяется условием нижнетреугольности матриц* $A_n(t)$; $n \in \mathbb{Z}_+$.

1. *Березанский Ю. М.* Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи // Докл. АН СССР.— 1985.— **281**, № 1.— С. 16—19.
2. *Berezanski Yu. T.* The integration of semi-infinite Toda chain by means of inverse spectral problem // Repts. Math. Phys.— 1986.— **24**, N 1.— P. 21—47.
3. *Березанский Ю. М., Гехтман М. И., Шмойш М. Е.* Интегрирование методом обратной спектральной задачи некоторых цепочек нелинейных разностных уравнений // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 1.— С. 84—89.
4. *Крейн М. Г.* Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов // Докл. АН СССР.— 1949.— **69**, № 2.— С. 125—128.
5. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях второго порядка // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1956.— **5**.— С. 203—268.
6. *Тарнопольский В. Г.* Про самоспряженість різницевих операторів з операторними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1959.— **11**.— С. 1189—1192.
7. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 800 с.
8. *The non-abelian* Toda lattice (discrete analogue of the matrix Schröedinger spectral problem / M. Brushi, S. V. Manakov, O. Ragnisco. D. Levi // J. Math. Phys.— 1980.— **21**.— P. 2749—2759.
9. *Кричевер И. М.* Периодическая неабелева цепочка Тоды и ее двумерное обобщение // Успехи мат. наук.— **1981**.— **36**, вып. 2.— С. 72—80.

10. *Deift P., Li L. C. Tomei C.* Toda flows with infinitely many variables // J. Funct. Anal.— 1985.— **64**, N 3.— P. 358—402.
11. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 534 с.
12. *Кричевер И. М.* Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // Успехи мат. наук.— 1977.— **32**, вып. 6.— С. 183—208.
13. *Манаков С. В.* О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1974.— **67**, № 2.— С. 543—545.
14. *Жернаков Н. В.* Интегрирование цепочки Тоды в классе операторов Гильберта — Шмидта // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 5.— С. 645—648.
15. *Далецкий А. Ю., Подколзин Г. Б.* Групповой подход к интегрированию бесконечной цепочки Тоды // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 4.— С. 518—521.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 04.12.89