УДК 519.4:513.88

С. В. Тищенко, В. С. Яковлев

О стандартности $*$-представлений алгебры гладких финитных функций

Изучаются сильно непрерывные $*$-представления неограниченными операторами алгебры гладких финитных функций на R^N. Установлена самосопряженность и стандартность замыкания сильно непрерывного $*$-представления алгебры $\mathcal{D}(R^N)$, удовлетворяющего некоторому условию. Изучено соответствие между сильно непрерывными $*$-представлениями $\mathcal{D}(R^N)$ и непрерывными представлениями группы R^N по сложению симметрическими операторами.

Вивчаються сильно неперервні $*$-зображення необмеженими операторами алгебри гладких фінітних функцій на R^N. Встановлено самоспряженість та стандартність замикання сильно неперервного $*$-зображення алгебри $\mathcal{D}(R^N)$, що задовольняє деякій умові. Досліджена відповідність між сильно неперервними $*$-зображеннями $\mathcal{D}(R^N)$ і неперервними забраженнями групи R^N відносно додавання симетричними операторами.

Важной задачей при рассмотрении представлений топологических $*$-алгебр неограниченными операторами является установление свойств самосопряженности и стандартности этих представлений [1—3]. В частности, свойствами самосопряженности и стандартности обладают замыкания сильно непрерывных $*$-представлений топологических квазианалитических $*$-алгебр, введенных в [4]. Примером коммутативной топологической $*$-алгебры, не являющейся квазианалитической, является пространство $\mathcal{D}(R^N)$ гладких финитных функций на R^N с обычной топологией, в котором умножение элементов $f, g \in \mathcal{D}(R^N)$ задается с помощью свертки функций $f * g$, а инволюция $*$ — комплексным сопряжением: $f^*(x) = \overline{f(x)}$. В настоящей работе устанавливается самосопряженность и стандартность замыкания сильно непрерывного $*$-представления $*$-алгебры $\mathcal{D}(R^N)$, удовлетворяющего некоторому условию (см. далее условие (A)). Доказательство этого результата основано на том, что каждому такому $*$-представлению соответствует непрерывное представление группы R^N симметрическими (неограниченными) операторами и обратно, любое непрерывное представление R^N симметрическими операторами порождает самосопряженное стандартное $*$-представление $*$-алгебры $\mathcal{D}(R^N)$, удовлетворяющее условию (A).

Введем необходимые определения. Пусть D есть плотное линейное подмножество сепарабельного гильбертова пространства H. Пусть $L_+(D)$ есть множество всех линейных (неограниченных) операторов B в гильбертовом пространстве H таких, что: а) $\mathcal{D}(B) = D$ и $BD \subseteq D$ ($\mathcal{D}(B)$ — область определения оператора B); б) $\mathcal{D}(B^*) \supseteq D$ и $B^*D \subseteq D$. Множество $L_+(D)$ является $*$-алгеброй с обычными операциями над операторами и инволюцией $B \mapsto B^+ = B^* \upharpoonright_D$ ($\upharpoonright$ — сужение оператора на подмножество). Назовем $*$-представлением π $*$-алгебры U на плотном линейном подмножестве $D(\pi) \subseteq H$ любой $*$-гомоморфизм $*$-алгебры U в $*$-алгебру $L_+(D(\pi))$; π называется сильно непрерывным представлением топологической $*$-

алгебры U, если вектор-функция $U \ni f \mapsto \pi(f)\xi \in H$ непрерывна для любого $\xi \in D(\pi)$. Будем говорить, что $*$-представление π удовлетворяет условию (A), если существует последовательность $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \subset U$ такая, что $\pi(\varphi_n)\xi \to \xi$ в H для любого $\xi \in D(\pi)$. Замыканием $\tilde{\pi}$ $*$-представления π называется $*$-представление, заданное равенствами $\tilde{\pi}(f) = \overline{\pi(f)} \restriction_{D(\tilde{\pi})}$, $D(\tilde{\pi}) = \bigcap_{f \in U} \mathcal{D}(\overline{\pi(f)})$ ($\overline{\pi(f)}$ есть замыкание оператора $\pi(f)$). Представление π называется самосопряженным, если $D(\pi) = \bigcap_{f \in U} \mathcal{D}(\pi(f)^*)$ ($\pi(f)^*$ — оператор, сопряженный к $\pi(f)$), и стандартным, если для произвольного $f \in U$, $f = f^*$ оператор $\pi(f)$ существенно самосопряжен на $D(\pi)$. Под непрерывным представлением R^N симметрическими операторами на плотном линейном подмножестве D гильбертова пространства H понимается отображение $R^N \ni x \mapsto S_x \in L_+(D)$ такое, что выполнены следующие четыре условия: 1) S_x симметрический оператор для любого $x \in R^N$; 2) $S_0 = I\restriction_D$, где I обозначает тождественный оператор в H; 3) для произвольных $x, y \in R^N$ справедливо равенство $S_{x+y} = S_x S_y$; 4) вектор-функция $R^N \ni x \mapsto S_x\xi \in H$ непрерывна для любого $\xi \in D$.

1. Построим по непрерывному представлению $R^N \ni x \mapsto S_x \in L_+(D)$ сильно непрерывное самосопряженное стандартное $*$-представление $\mathcal{D}(R^N)$, удовлетворяющее условию (A). Операторы S_x, $x \in R^N$, удовлетворяют всем аксиомам эрмитовой локальной полугруппы в смысле работы [5], если положить $Q = R^N$. Более того, в рассматриваемом случае операторы S_x плотно определены и в силу условий 2 и 3 имеют плотный образ. Следовательно, основная теорема работы [5] может быть переформулирована следующим образом. Для произвольного непрерывного представления $R^N \ni x \to S_x \in L_+(D)$ симметрическими операторами существует единственное разложение единицы E в H, определенное на борелевских множествах $B(R^N)$, такое, что

$$S_x \subseteq T_x = \int_{R_N} e^{(\lambda, x)} dE(\lambda) \tag{1}$$

для любого $x \in R^N$. Для произвольного $h \in H$ такого, что $((S_x \pm iI)\xi, h) = 0$ для любого $\xi \in D$, подставляя $\xi = S_t\eta$, где $t \in R^N$ и $\eta \in D$ произвольны, получаем $((S_x \pm iI) S_t\eta, h) = \int e^{(\lambda, t)} (e^{(\lambda, x)} \pm i)\, d(E(\lambda)\eta, h) = 0$. Из теоремы единственности для интеграла Лапласа — Стилтьеса и из $(e^{(\lambda, x)} \pm i) \neq 0$ имеем $(E(\Delta)\eta, h) = 0$ для любого $\Delta \in B(R^N)$ и, следовательно, $(\eta, h) = 0$. Поскольку $\eta \in D$ произвольно, то $h = 0$, и в силу критерия существенной самосопряженности в терминах дефектных подпространств получаем существенную самосопряженность операторов S_x на D и равенство $\overline{S}_x = T_x$, $x \in R^N$.

Рассмотрим семейство коммутирующих нормальных операторов

$$\pi_1(f) = \int_{R^N} \hat{f}(\lambda)\, dE(\lambda), \tag{2}$$

где $\hat{f}(\lambda) = \int f(x) e^{(\lambda, x)} dx$ — преобразование Лапласа функции $f \in \mathcal{D}(R^N)$. Существенная самосопряженность операторов $\pi_1(f)\restriction_D$ для $f = f^*$, $f \in \mathcal{D}(R^N)$, доказывается аналогично доказательству существенной самосопряженности S_x с заменой $e^{(\lambda, x)}$ на $\hat{f}(\lambda)$. Оценки спектральных интегралов позволяют доказать равенство $\bigcap_{f \in \mathcal{D}(R^N)} \mathcal{D}(\pi_1(f)) = \bigcap_{x \in R^N} \mathcal{D}(\overline{S}_x) = D(\pi)$, а также инвариантность множества $D(\pi)$ относительно операторов $\pi_1(f)$ для любого

$f \in \mathcal{D}(R^N)$ и $\overline{S}_x$ для любого $x \in R^N$. Для любого $f \in \mathcal{D}(R^N)$ определим оператор

$$\pi(f) = \pi_1(f) \upharpoonright_{D(\pi)}. \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что отображение $\mathcal{D}(R^N) \ni f \mapsto \pi(f) \in L_+(D(\pi))$ является сильно непрерывным самосопряженным стандартным $*$-представлением $*$-алгебры $\mathcal{D}(R^N)$ и $\pi_1(f) = \overline{\pi(f)}$ для любого $f \in \mathcal{D}(R^N)$. Условие (A) для $*$-представления π проверяется, если в качестве последовательности $\varphi_n \in \mathcal{D}(R^N)$, $n = 1, 2, \ldots$, взять «δ-образную» последовательность функций с равномерно ограниченными носителями.

2. В следующей теореме подведен итог конструкций и рассуждений п. 1, а также сформулирован обратный результат о порожденности произвольного сильно непрерывного $*$-представления $*$-алгебры $\mathcal{D}(R^N)$, удовлетворяющего условию (A), непрерывным представлением R^N симметрическими операторами.

Теорема. *Непрерывное представление R^N симметрическими операторами порождает по формулам* (1)—(3) *сильно непрерывное самосопряженное стандартное $*$-представление $*$-алгебры $\mathcal{D}(R^N)$, удовлетворяющее условию (A). Обратно, замыкание сильно непрерывного $*$-представления $*$-алгебры $\mathcal{D}(R^N)$, удовлетворяющего условию (A), является сильно непрерывным самосопряженным и стандартным. Оно порождается некоторым непрерывным представлением R^N симметрическими операторами по формулам* (1)—(3).

Прямое утверждение теоремы уже доказано. Приведем схему доказательства обратного утверждения. Пусть имеется произвольное сильно непрерывное $*$-представление π $*$-алгебры $\mathcal{D}(R^N)$, удовлетворяющее условию (A). Рассмотрим линейное множество $D =$ л. о. $\{\pi(f)\xi \in H \mid f \in \mathcal{D}(R^N), \xi \in D(\pi)\} \subseteq D(\pi)$ (л. о. — линейная оболочка). Множество D плотно в H в силу условия (A). Определим на D линейные операторы S_x для любого $x \in R^N$. Пусть $\eta = \sum_{k=1}^{n} \pi(g_k)\xi_k \in D$ для некоторых $g_k \in \mathcal{D}(R^N)$ и $\xi_k \in D(\pi)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Для $x \in R^N$ положим $S_x\eta = \sum_{k=1}^{n} \pi((g_k)_x)\xi_k$, где по определению $g_x(y) = g(y - x)$ для произвольной $g \in \mathcal{D}(R^N)$. Нетрудно проверить, что S_x — корректно определенные операторы, $S_x \in L_+(D)$ и отображение $R^N \ni x \mapsto S_x \in L_+(D)$ есть непрерывное представление R^N симметрическими операторами. Для доказательства теоремы осталось только доказать, что, $*$-представление π', порожденное представлением S_x по формулам (1)—(3), совпадает с замыканием $\tilde{\pi}$ $*$-представления π. В силу равенства $\bigcap_{f \in U} \mathcal{D}(\overline{\pi(f)}) = \bigcap_{f \in U, f = f^*} \mathcal{D}(\overline{\pi(f)})$, справедливого для любого $*$-представления $*$-алгебры U, и существенной самосопряженности операторов $\pi_1(f)$ для $f \in \mathcal{D}(R^N)$, $f = f^*$, определенных формулой (2) на множестве D, достаточно доказать равенство $\pi_1(f)\upharpoonright_D = \pi(f)\upharpoonright_D$ для любой $f = f^*$, $f \in \mathcal{D}(R^N)$. Пусть $h \in H$ и $\xi = \pi(g)\eta \in D$, где $\eta \in D(\pi)$ произвольно. Тогда, используя равенство $(\pi_1(f)\xi, h) = \int_{R^N} f(x)(S_x\xi, h)\,dx$, справедливое в силу теоремы Фубини, представляя интеграл в виде предела интегральных сумм и используя непрерывность π, получаем равенства $(\pi_1(f)\xi, h) = (\pi(f * g)\eta, h) = (\pi(f)\xi, h)$. В силу произвольности $h \in H$ имеем равенство $\pi_1(f)\xi = \pi(f)\xi$ для $\xi = \pi(g)\eta \in D$, а с учетом линейности — на всем D. Таким образом, $\pi' = \tilde{\pi}$ и в силу самосопряженности и стандартности π' получаем обратное утверждение теоремы.

Из приведенной теоремы вытекает такое следствие.

Следствие 1. *Выполнение условия* (A) *для сильно непрерывного представления* π *обеспечивает выполнение условия* (A) *для его замыкания (возможно с другой последовательностью* $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(R^N)$).

Следствие 2. *Из формул* (2) *и* (3) *вытекает, что сильно непрерывное* $*$*-представление* $\mathcal{D}(R^N)$, *удовлетворяющее условию* (A), *продолжается до непрерывного представления сверточной* $*$*-алгебры* $\mathcal{E}'(R^N)$ *обобщенных функций* $F(\cdot)$ *с компактным носителем* [6] *и инволюцией* $F^*(\varphi) = \overline{F(\overline{\varphi})}$, $\varphi \in \mathcal{E}(R^N)$.

Замечание 1. Условие (A) заведомо выполнено для ГНС-представления, построенного по произвольной обобщенной экспоненциально-выпуклой функции $F \in \mathcal{D}'(R^N)$ (положительному функционалу на $\mathcal{D}(R^N)$). В качестве последовательности φ_n можно взять любую аппроксимативную единицу в $\mathcal{D}(R^N)$, т. е. «δ-образную» последовательность (не обязательно имеющую равномерно ограниченный носитель).

Замечание 2. Назовем $*$-представление π $*$-алгебры U невырожденным, если для любого $\xi \in D(\pi)$, $\xi \neq 0$, найдется $f \in U$ такой, что $\pi(f) \times \times \xi \neq 0$. Условие (A) является необходимым для самосопряженности невырожденного замыкания сильно непрерывного представления $\mathcal{D}(R^N)$. В формулировке обратного утверждения теоремы вместо условия (A) можно потребовать, чтобы замыкание $\tilde{\pi}$ представления π было невырожденным и для любых $f \in \mathcal{D}(R^N)$ и $\xi \in \bigcap_{g \in \mathcal{D}(R^N)} \mathcal{D}(\pi(g)^*)$ выполнялось $\pi(f)^* \xi \in D(\tilde{\pi})$.

1. *Powers R. T.* Self-adjoint algebras of unbounded operators // Communs Math. Phys.— 1971.— **21**, N 2.— P. 85—124.
2. *Inoue A., Takesue K.* Self-adjoint representations of polynomial algebras // Trans. Amer. Math. Soc.— 1983.— **280**, N 1.— P. 393—400.
3. *Lassner L.* Topological algebras of operators // Rept. Math. Phys.— 1972.— 3, N 4.— P. 279—293.
4. *Яковлев В. С.* О представлениях некоторых коммутативных ядерных $*$-алгебр // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 2.— С. 235—243.
5. *Nussbaum A. E.* Multi-parameter local semi-groups of Hermetian operators // J. Funct. Anal.— 1982.— **48**.— P. 213—223.
6. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике.— М. : Наука, 1979.— 318 с.

Киев. ун-т

Получено 07.06.88