УДК 517.5

А. К. Кушпель

Об интерполяции периодических функций

Интерполяционный тригонометрический полином n-го порядка, совпадающий с функцией $f(x)$ в узлах интерполяции $x_k^{(n)} = kh$, $h = 2\pi/(2n+1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, выражается, как известно, формулой $\tilde{S}_n(f, x) = 2(2n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{2n} \mathcal{D}_n(x - x_k^{(n)}) f(x_k^{(n)})$, где $\mathcal{D}_n(t) = \sin((2n+1)t/2)/\sin(t/2)$ — ядро Дирихле порядка n. Представляет интерес определение асимптотического поведения величины

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N}, x) = \sup_{f \in \mathfrak{N}} |f(x) - \tilde{S}_n(f, x)|, \quad n \to \infty,$$

где $\mathfrak{N}$ — некоторое множество непрерывных 2π-периодических функций. Случай, когда $\mathfrak{N}$ есть класс дифференцируемых функций $W^r = \{f : f \in C_{2\pi}, |f^{(r)}| \leqslant 1, r \in N\}$, рассматривался в [1].

Пусть $\mathfrak{N}$ — класс сверток, т. е. $\mathfrak{N} = K * U_\infty$, где $U_\infty = \{f : \operatorname{ess\,sup} |f(\cdot)| \leqslant 1\}$, а функция K представима в виде

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt - \beta\pi/2), \tag{1}$$

$\beta \in R$, $\psi(k) = \varphi(k) \exp(-\alpha k^\gamma)$, $\alpha > 0$, $\gamma \geqslant 1$, $\varphi(k)$ — произвольная невозрастающая функция. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Найдутся такие постоянные c_1 и c_2, что при всех $n \in N$*

$$c_1 \psi(n) \ln n |\sin(n + 1/2)x| + O(\psi(n)) \leqslant \mathcal{E}_n(K * U_\infty, x) \leqslant$$
$$\leqslant c_2 \psi(n) \ln n |\sin(n + 1/2)x| + O(\psi(n)).$$

Доказательство. На основании неравенства С. Н. Бернштейна [1] для величины $\mathcal{E}_n(K * U_\infty, x)$ имеем

$$\mathcal{E}_n(K * U_\infty, x) \leqslant (1 + M(x)) E_n(K * U_\infty). \tag{2}$$

Здесь

$$M(x) = 2(2n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{2n} |\mathcal{D}_n(x - x_k^{(n)})| = 2\pi^{-1} \ln n |\sin(n + 1/2)x| + O(1), \tag{3}$$

$$E_n(K * U_\infty) = \sup_{f \in K * U_\infty} \inf_{T_{n-1}} \|f(\cdot) - T_{n-1}(\cdot)\|_C, \tag{4}$$

$T_{n-1}(\cdot)$ — тригонометрический полином порядка не выше $n - 1$. В работах [2, 3] показано, что найдутся такие постоянные c_3, c_4, что при всех $n \in N$

$$c_3 \psi(n) \leqslant E_n(K * U_\infty) \leqslant c_4 \psi(n). \tag{5}$$

Сопоставление соотношений (2)—(5) дает оценку сверху для величины $\mathscr{E}_n(K* *U_\infty, x)$. Получим теперь необходимую оценку снизу. Заметим, что в силу инвариантности класса функций $K*U_\infty$ относительно сдвига аргумента, величина $\mathscr{E}_n(K*U_\infty, x)$ имеет период, равный h, и так как при $x = 0$ утверждение теоремы очевидно, то достаточно рассмотреть случай $0 < x < h$. Построим функцию $f_n(\cdot) \in K*U_\infty$ такую, что $f_n(x_k^{(n)}) = (-1)^k c_5 \psi(n)$, где c_5 — некоторая постоянная, не зависящая от n, которая будет выбрана позже. Пусть $\xi_n(\cdot)$ — кусочно-постоянная функция на разбиении $\Delta_n = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots$ $\ldots, x_{2n}^{(n)}\}$. Рассмотрим функцию

$$f_n(\cdot) = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} K(\cdot - t)\, \xi_n(t)\, dt = (K*\xi_n)(\cdot),$$

которую в силу теоремы 2.1 из [4] можно представить в виде

$$f_n(\cdot) = \sum_{p=0}^{2n} f(x_k^{(n)})\, \overline{S}_p^K(0;\ \cdot), \tag{6}$$

где $\overline{S}_p^K(0;\ \cdot)$ — фундаментальные сплайны, т. е. функции вида $\overline{S}_p^K(0;\ \cdot) = (K*\tau_{n,p})(\cdot)$, $\tau_{n,p}(\cdot)$ — кусочно-постоянная функция на разбиении Δ_n и

$$\overline{S}_p^K(0;\ t) = \begin{cases} 1, & t = x_p^{(n)}, \\ 0, & t \in \Delta_n \setminus x_p^{(n)}. \end{cases}$$

Пусть $f_n(x_k^{(n)}) = (-1)^k c_5 \psi(n)$. Покажем, что $f_n \in K*U_\infty$. Так как $f_n(\cdot) = (K*\xi_n)(\cdot)$, то для этого достаточно установить, что

$$|\xi_n(\cdot)| = |(f_n(\cdot))_\beta^\psi| \leqslant 1, \tag{7}$$

где $(f(\cdot))_\beta^\psi$ обозначает (ψ, β)-производную функции $f(\cdot)$ (см. [2]). Используя представление (6), находим

$$|(f_n(\cdot))_\beta^\psi| = \left| \sum_{p=0}^{2n} f_n(x_k^{(n)})\, (\overline{S}_p^K(0;\ \cdot))_\beta^\psi \right| = c_5 \psi(n) \left| \sum_{p=0}^{2n} (-1)^k\, (\overline{S}_p^K(0;\ \cdot))_\beta^\psi \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_5 \psi(n) \sum_{p=0}^{2n} |(\overline{S}_p^K(0;\ \cdot))_\beta^\psi|. \tag{8}$$

Из замечания 1 к лемме 1 в [4] следует, что если функция представима в виде (1), то

$$\sum_{p=0}^{2n} |(\overline{S}_p^K(0;\ \cdot))_\beta^\psi| \leqslant c_6/\psi(n). \tag{9}$$

Оценки (8) и (9) позволяют заключить, что

$$|(f_n(\cdot))_\beta^\psi| \leqslant c_5 c_6. \tag{10}$$

Выбирая теперь $c_5 = c_6^{-1}$, из (10) получаем (7). Таким образом, $f_n(\cdot) \in K*U_\infty$ и принимает значения $\pm c_5 \psi(n)$ в точках $x_k^{(n)}$ со знаками, совпадающими соответственно со знаками $\operatorname{sign} \mathscr{D}_n(x - x_k^{(n)})$, при $0 < x < h$. Поэтому

$$|f_n(x) - \tilde{S}_n(f;\ x)| = c_5 \psi(n)\, M(x).$$

Теорема доказана.

В заключение отметим следующее. Пусть, в частности, $\varphi(k) = 1$, $\gamma = 1$, $\alpha > 0$, тогда класс функций $K * U_\infty$ есть класс аналитических 2π-периодических функций [5]. Известно, что на таких функциональных классах суммы Фурье дают наилучшее по порядку приближение [6]. Из доказанной теоремы следует, что интерполяционные полиномы $\tilde{S}_n(f, \cdot)$ приближают функции этих классов в $\ln n$ раз хуже, чем соответствующие суммы Фурье.

При этом, на классах дифференцируемых и бесконечно дифференцируемых функций суммы Фурье и интерполяционные полиномы дают одинаковый порядок приближения [1, 6, 7].

1. *Никольский С. М.* Асимптотическая оценка остатка при приближении интерполяционными тригонометрическими полиномами.— Докл. АН СССР, 1941, 31, № 3, с. 215—218.
2. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций.— Киев, 1984.— 44 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 84.15).
3. *Кушпель А. К., Степанец А. И.* Оценки наилучших приближений на классах периодических функций.— В кн.: Междунар. конф. по теории приближения функций : Тез. докл. (Киев, 30 мая — 6 июня 1983 г.) Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983, с. 111.
4. *Кушпель А. К.* Экстремальные свойства сплайнов и поперечники классов периодических функций в пространстве $C_{2\pi}$.— Киев, 1984.— 41 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 84.25).
5. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций.— М. : ОГИЗ, 1948.— 291 с.
6. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и приближение их суммами Фурье.— Киев, 1983.— 57 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 83.69).
7. *Kolmogoroff A.* Zur grossenordnung des restgliedes fouriershen reihen differenzienbaren functionen.— Ann. Math., 1935, 36, N 2, p. 521—526.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 07.07.83