УДК 517.977.1

В. И. Коробов

Почти полная управляемость линейной стационарной системы

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где A и B — постоянные вещественные матрицы размерности $n \times n$ и $n \times \times r$ соответственно, x — вектор n-мерного пространства E_n. Пусть задано подпространство $G = \{x : Hx = 0\}$, где H — постоянная вещественная матрица размерности $m \times n$. Будем рассматривать управляемость системы (1) на подпространство G.

Проблема управляемости на подпространство возникает в задачах оптимального управления со свободными концами [1]. Управляемость системы (1) на подпространство G изучалась в работах [2—5]. По сравнению с задачами управляемости в точку задачи управляемости на подпространство (размерность которого отлична от 0 и n) имеют некоторые особенности. Можно рассматривать попадание на G из произвольной точки x_0 как за заданное время T, так и за свободное время $T(x_0)$ [2]. Причем, если $\dim(L + G) = n - 1$, где L — подпространство, натянутое на вектор-столбцы матрицы $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$, величину $T(x_0)$ нельзя изменить, меняя управление. В случае же возможности попадания в точку O из произвольной точки за время $T(x_0)$ легко показать, что возможно попадание из любой точки за наперед заданное время T. Другой особенностью является то, что возможно попадание на G из почти всех точек фазового пространства, а изо всех невозможно. Случаи такого попадания рассматриваются в данной статье. Даются необходимые и достаточные условия управляемости системы (1) из почти всех точек E_n на подпространство G и на плоскость $\widetilde{G} = G + d$, где d — заданный вектор пространства E_n. Приводится вид управления $u(t)$, переводящего точку x_0 на $\widetilde{G}$ в силу системы $\dot{x} = Ax + Bu(t)$.

Определение 1. *Система* (1) *называется управляемой из точки x_0 на множество $\widehat{G}$, если существует число $T(x_0) \geqslant 0$ и суммируемое управление $u_{x_0}(t)$, заданное на отрезке $[0, T(x_0)]$, такое, что решение $x(t)$ системы*

$$\dot{x} = Ax + Bu_{x_0}(t), \tag{2}$$

удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$ при $t = T(x_0)$, удовлетворяет условию $x(T(x_0)) \in \widehat{G}$.

Определение 2. *Систему* (1) *назовем почти полностью управляемой на множество* $\widehat{G}$, *если она управляема из точек* $E_n \setminus N$, *где* N — *некоторое подпространство,* $\dim N \leqslant n-1$.

Определение 3. *Множество* $\widehat{G}$ *называется достижимым за свободное время из точки* x_0 *в силу системы*

$$\dot{x} = Ax, \tag{3}$$

если решение $x(t)$ *системы* (3) *с начальным условием* $x(0) = x_0$ *удовлетворяет в некоторый момент времени* $T(x_0)$ *условию* $x(T(x_0)) \in \widehat{G}$.

Определение 4. *Множество* $\widehat{G}$ *называется достижимым за свободное время из почти всех точек фазового пространства* E_n *в силу системы* (3), *если множество* $\widehat{G}$ *достижимо из точек* $E_n \setminus N$, *где* N — *некоторое подпространство,* $\dim N \leqslant n-1$.

Рассмотрим следующий пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае [2] из всех точек фазового пространства возможно попасть в силу (1) только на подпространство, определяемое равенством $h_1x_1 + h_2x_2 = 0$. Но на подпространство $G = \{x : h_1x_1 + h_2x_2 + \varepsilon x_3 = 0\}$ при $\varepsilon \neq 0$ из всех точек попасть невозможно. Можно убедиться и непосредственно, что на это подпространство возможно попасть за время $T(x_0)$ из всех точек x_0 фазового пространства, кроме точек оси x_3 (при $x_3 \neq 0$). Таким образом, может оказаться, что управляемая система (1) на множество $G = \{x : Hx = 0\}$ при достаточно малом изменении коэффициентов матрицы H (или матриц A и B) становится почти полностью управляемой.

Пусть $h \in E_n$. Найдем выражение для $(e^{At}x_0, h)$ в удобном для дальнейших рассмотрений виде и введем обозначения. Пусть C_n — комплексное расширение пространства E_n, произвольный элемент которого обозначим через $z = x + iy$ $(x \in E_n,\ y \in E_n)$. Положим $Az = Ax + iAy$. Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ различные собственные значения матрицы A, $\mu_j = \operatorname{Re}\lambda_j$, $\nu_j = \operatorname{Im}\lambda_j$.

Пусть K_j^* — корневое подпространство матрицы A^*, соответствующее значению λ_j. Комплексное пространство C_n есть прямая сумма всех корневых подпространств K_j^*, поэтому справедливо равенство

$$h + i\cdot 0 = \sum_{j=1}^{s} \eta_j, \tag{4}$$

где $\eta_j \in K_j^*$, $h \in E_n$, $0 \in E_n$.

Обозначим через P множество всех индексов j таких, что $\eta_j \neq 0$ в выражении (4); через P_1 — множество всех индексов j из P таких, что $\operatorname{Im}\lambda_j = 0$; через P_2 — множество всех индексов $j \in P$ таких, что $\operatorname{Im}\lambda_j > 0$. Пусть P_2^+ (P_2^-) — множество всех индексов $j \in P_2$ таких, что $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$ $(\operatorname{Re}\lambda_j < 0)$. И наконец, пусть P_2^1 обозначает множество всех индексов из P_2 таких, что $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$ и высота корневого вектора η_j в соотношении (4) равна единице (т. е. η_j — собственный вектор матрицы A^*), а P_2^2 — множество всех индексов из P_2 таких, что $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, высота корневого вектора η_j в выражении (4) не меньше, чем два.

Пусть высота корневого вектора η_j $(j \in P)$ в выражении (4) равна $s_j + 1$, тогда $e^{A^*t}\eta_j = e^{\lambda_j t}[\eta_j + (A^* - \lambda_j E)\eta_j + \ldots + (A^* - \lambda_j E)^{s_j}\eta_j t^{s_j}/s_j!]$. Обозначив $(A^* - \lambda_j E)^k \eta_j$ через w_j^k, получим $e^{A^*t}(h + i\cdot 0) = \sum_{j\in P} e^{\lambda_j t} \sum_{k=0}^{s_j} \frac{t^k}{k!} w_j^k$. Тогда

$$(e^{At}(x_0 + i\cdot 0),\ h + i\cdot 0) = (e^{At}x_0, h) = (x_0, e^{A^*t}h) = \sum_{j\in P} e^{\lambda_j t} \sum_{k=0}^{s_j} \frac{t^k}{k!}(x_0, w_j^k).$$

Пусть $Q \subset P$, обозначим $\psi(t, Q) = \sum_{j \in Q} e^{\lambda_j t} \sum_{k=0}^{s_j} \frac{t^k}{k!} (x_0, w_j^k)$, $\varphi(t, Q) = \sum_{j \in Q} e^{\mu_j t} \sum_{k=0}^{s_j} \frac{t^k}{k!}$. Если $Q = \varnothing$, то будем считать, что $\psi(t, Q) = 0$, $\varphi(t, Q) = 0$, $\max_Q \mu_j = -\infty$. Пусть множество чисел $\{\lambda_j\}$ при $j \in Q$ вместе с λ_j содержит и $\overline{\lambda}_j$. Представим w_j^k в виде $w_j^k = w_j^{1,k} + i w_j^{2,k}$, а множество Q в виде $Q^1 \cup Q_+^2 \cup Q_-^2$, где $\operatorname{Im} \lambda_j = 0$ при $j \in Q^1$, $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$ при $j \in Q_+^2$, $\operatorname{Im} \lambda_j < 0$ при $j \in Q_-^2$. Тогда

$$\psi(t, Q) = \sum_{j \in Q^1} e^{\lambda_j t} \sum_{k=0}^{s_j} \frac{t^k}{k!} (x_0, w_j^{1,k}) + 2\operatorname{Re} \sum_{j \in Q_+^2} e^{\mu_j t} \sum_{k=0}^{s_j} \frac{t^k}{k!} [(x_0, w_j^{1,k}) \cos \nu_j t - (x_0, w_j^{2,k}) \sin \nu_j t] = \psi(t, Q^1) + 2\psi(t, Q_+^2).$$

Для вектора $h + i \cdot 0$ множество индексов P таково, что совокупность чисел $\{\lambda_j\}$ вместе с λ_j содержит и $\overline{\lambda}_j$. Полагая $Q = P$, получаем выражение для $(e^{At} x_0, h)$ в следующем виде:

$$(e^{At} x_0, h) = (x_0, e^{A^* t} h) = \psi(t, P) = \sum_{j \in P_1} e^{\lambda_j t} \sum_{k=0}^{s_j} \frac{t^k}{k!} (x_0, w_j^{1,k}) + $$
$$+ 2 \sum_{j \in P_2} e^{\mu_j t} \sum_{k=0}^{s_j} \frac{t^k}{k!} [(x_0, w_j^{1,k}) \cos \nu_j t - (x_0, w_j^{2,k}) \sin \nu_j t] = \psi(t, P_1) + 2\psi(t, P_2). \tag{5}$$

Обозначим $m = \max_{j \in P_1} \mu_j$ (если $P_1 = \varnothing$, то полагаем $m = -\infty$). Пусть $j_0 \in P_1$ — индекс, для которого $\mu_{j_0} = m$. Пусть $\mu = \max_{j \in Q} \mu_j$, где $Q \subset P_2$, а Q_1 обозначает множество индексов из Q таких, что $\mu_j = \mu$ при $j \in Q_1$. Пусть $q = \max_{j \in Q_1} s_j$ и $Q_2 = \{j_1, \ldots, j_p\}$ — все те же индексы из Q_1, для которых $s_{j_1} = s_{j_2} = \ldots = s_{j_p} = q$.

Теорема. *Пусть $\tilde{G} = G + d$, где $d \in E_n$, а G — подпространство E_n. Для того чтобы система $\dot{x} = Ax + Bu$ была почти полностью управляемой на плоскость $\tilde{G}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

1) $\dim(L + \tilde{G}) = n$, *где L — подпространство управляемости;*

2) $\dim(L + \tilde{G}) = n - 1$ *(в этом случае пусть уравнение гиперплоскости $H = L + \tilde{G}$ будет $(h, x) = c$, $c > 0$, а разложение (4) — это разложение вектора $h + i \cdot 0$ по корневым подпространствам матрицы A^*), множество $Q \neq \varnothing$ (где $Q = P_2$ при $d \in (L + \tilde{G})$ и $Q = P_2^2 \cup P_2^+$ при $d \overline{\in} (L + \tilde{G})$) и либо $m < \mu$, либо $m = \mu$, $s_{j_0} < q$.*

Если $\dim(L + \tilde{G}) = n$, то множество точек, из которых нельзя попасть на $\tilde{G}$, пусто. Если $\dim(L + \tilde{G}) = n - 1$, то это множество принадлежит подпространству N, размерность которого не больше $(n - 2)$ и $N = \{x : (x, w_j^{1,q}) = 0, (x, w_j^{2,q}) = 0, \ j \in Q_2\}$.

Для доказательства теоремы воспользуемся следующим результатом работы [2].

Система (1) управляема из точки x_0 за свободное время на множество $\hat{G}$ тогда и только тогда, когда множество $L + \hat{G}$ достижимо из точки x_0 в силу системы (3) ($e^{AT(x_0)} x_0 \in (L + \hat{G})$).

Достаточность. Покажем, что плоскость $L+\tilde{G}$ достижима из любой точки $x_0 \in E_n \setminus N$ в силу (3), что будет означать управляемость из этих же точек системы (1) на плоскость $\tilde{G}$. Выражение для $(h, x(T)) = (e^{A^*T}h, x_0)$ представим в виде

$$(h, x(T)) = (e^{A^*T}h, x_0) = e^{\mu T} \frac{T^q}{q!} \left\{ 2 \sum_{i \in Q_2} [(x_0, w_j^{1,q}) \cos \nu_j T - \right.$$
$$\left. - (x_0, w_j^{2,q}) \sin \nu_j T] + R_1(T) \right\},$$

где $R_1(T)$ содержит остальные слагаемые из выражения (5). Нетрудно видеть, что $R_1(T) \to 0$ при $T \to \infty$. Пусть $\alpha(T) = \sum_{j \in Q_2} [(x_0, w_j^{1,q}) \cos \nu_j T - (x_0, w_j^{2,q}) \sin \nu_j T]$. Если x_0 таково, что при некотором $j \in Q_2$ либо $(x_0, w_j^{1,q}) \neq 0$, либо $(x_0, w_j^{2,q}) \neq 0$, то функция $\alpha(T)$ является конечной тригонометрической суммой, не равной тождественно нулю, с нулевым средним значением. Ввиду почти периодичности функции $\alpha(T)$ существует $\delta > 0$ и две неограниченно растущие последовательности [6] $t_1, \ldots, t_k, \ldots$ и $t_1', \ldots, t_k', \ldots$ такие, что $\alpha(t_k) > \delta$ и $\alpha(t_k') < -\delta$. Пусть k настолько большое, что $|R(t_k')| < \delta/2$, $|R(t_k)| < \delta/2$. Тогда (в случае $d \in (L+\tilde{G})$) существует $T = T(x_0)$ такое, что $(h, x(T)) = (e^{A^*T}h, x_0) = 0$. В случае $d \bar{\in} (L+\tilde{G})$ имеем $\mu \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ (так как $Q \neq \varnothing$, $Q = P_2^+ \cup P_2^2$), причем если $\mu = 0$, то $q > 0$. Поэтому также существует $T = T(x_0)$ такое, что $(h, x(T)) = (e^{A^*T}h, x_0) = c$.

Таким образом, если при некотором $j \in Q_2$ либо $(x_0, w_j^{1,q}) \neq 0$, либо $(x_0, w_j^{2,q}) \neq 0$, то из точки x_0 можно попасть в силу (3) за время $T(x_0)$ на гиперплоскость $L+\tilde{G}$. Совокупность точек x_0, из которых, быть может, невозможно попасть в силу (3) на $L+\tilde{G}$, удовлетворяет условиям $(x_0, w_j^{1,q}) = 0$, $(x_0, w_j^{2,q}) = 0$, $j \in Q_2$.

Итак, множество тех точек, из которых нельзя попасть в силу (3) на гиперплоскость $L+\tilde{G}$, а следовательно, в силу (1) на G, принадлежит подпространству N, $\dim N \leqslant n-2$.

Необходимость. Пусть $\dim(L+\tilde{G}) = n-k$. Если $k \geqslant 2$, то существуют точки, из окрестности которых невозможно попасть в силу системы (3) на множество $L+\tilde{G}$. Действительно, если рассмотреть систему с обращенным временем $\dot{x} = -Ax$, то все точки $x_0 \in E_n$, из которых можно попасть на $\tilde{G}$ в силу системы (3), опишутся соотношениями $x = e^{-At}y_0$, $y_0 \in \tilde{G}$, $0 \leqslant t < \infty$. Эти соотношения задают в пространстве E_n гладкую поверхность размерности не выше $(n-k+1)$, которая не может заполнить все пространство. Таким образом, $\dim(L+\tilde{G}) \geqslant n-1$. Если $\dim(L+\tilde{G}) = n$, то $L+\tilde{G} = E_n$, поэтому остается исследовать случай $\dim(L+\tilde{G}) = n-1$.

А. Докажем, что множество $Q \neq \varnothing$. Предположим противное, т. е. пусть $Q = \varnothing$. Для почти каждой точки x_0 из E_n существует такое $T = T(x_0)$, что справедливо равенство

$$(x_0, e^{A^*T}h) = \psi(t, P_1) + 2\psi(t, P_2) = c. \tag{6}$$

Функция $\varphi(t, P_2) > 0$ и ограничена при всех $t \geqslant 0$ (так как $Q = \varnothing$, то при $d \in (L+G)$ будет $Q = P_2 = \varnothing$ и $\varphi = 0$, а если $d \bar{\in} (L+G)$, то $Q = P_2^2 \cup P_2^+ = \varnothing$ и поэтому $P_2 = P_2^- \cup P_2^1$); пусть $\varphi(t, P_2) < M$. Выберем x_0 таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$|(x_0, w_j^{1,k})| < c/(2M), \quad |(x_0, w_j^{2,k})| < c/(2M), \quad k = 0, \ldots, s_j, \quad j \in P_2,$$
$$(x_0, w_i^{1,k}) < -c-M, \quad k = 0, \ldots, s_j, \quad j \in P_1. \tag{7}$$

Число неравенств (7) не более n (векторы $w_j^{1,k}$, $w_j^{2,k}$ в различных неравенствах линейно независимы), поэтому множество точек x_0, для которых выполняются неравенства (7), имеет внутреннюю точку. При выполнении этих неравенств имеем $(x(T), h) < -(c+M)\varphi(T, P_1) + \frac{c}{M}\varphi(T, P_2)$. Так как $\varphi(T, P_1) \geqslant 0$, $\varphi(T, P_2) < M$ при $T \geqslant 0$, то

$$(x(T), h) < c \tag{8}$$

где $T \geqslant 0$. Таким образом, множество точек x_0, для которых справедливо неравенство (8), имеет внутреннюю точку. Получили противоречие.

Б. Докажем, что

$$m = \max_{j\in P_1} \mu_j \leqslant \max_{j\in Q} \mu_j = \mu. \tag{9}$$

Возможен один из двух случаев: либо $P_1 = \varnothing$, либо $P_1 \neq \varnothing$. Если $P_1 = \varnothing$, то так как $Q \neq \varnothing$, неравенство (9) справедливо ($m = -\infty$).

Рассмотрим случай, когда $P_1 \neq \varnothing$. Предположим противное, т. е. пусть $m > \mu$. Для почти всех точек x_0 из E_n существует такой момент времени $T = T(x_0)$, что справедливо равенство (6). Функция $2e^{-mT}\varphi(T, P_2) > 0$ ограничена при $T \geqslant 0$. Так как $2e^{-mT}\varphi(T, P_2) > 0$ при $T \geqslant 0$ и $e^{-mT}\varphi(T, P_2) \to 0$ при $T \to \infty$, то существует M такое, что $2e^{-mT}\varphi(T, P_2) < M$. Пусть точка x_0 выбрана так, что выполняются неравенства (7). Тогда $(h, x(T)) \leqslant e^{mT}(-(c+M) + 2e^{-mT}\varphi(T, P_2)) < 0$, поэтому

$$(h, x(T)) = (e^{A^*T}h, x_0) < c. \tag{10}$$

Как и ранее, убеждаемся в том, что множество начальных условий x_0, для которых справедливо (10), имеет внутреннюю точку. Пришли к противоречию, следовательно, $m \leqslant \mu$.

В. Докажем, что при $m = \max_{j\in P_1} \mu_j = \max_{j\in Q} \mu_j = \mu$ необходимо, чтобы $s_{j_0} < q = \max_{j\in Q_1} s_j$.

Предположим противное, пусть $s_{j_0} \geqslant \max_{j\in Q_1} s_j$. Для почти всех точек x_0 из E_n существует такой момент времени $T(x_0)$, что справедливо равенство

$$c = (h, x(T)) = (e^{A^*T}h, x_0) = e^{mT}\left[\frac{T^{s_{j_0}}}{s_{j_0}!}(x_0, w_{j_0}^{1,s_{j_0}}) + (x_0, w_{j_0}^{1,0}) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{s_{j_0}-1} \frac{T^k}{k!}(x_0, w_{j_0}^{1,k})\right] + \psi(T, P_1 \setminus j_0) + 2\psi(T, P_2). \tag{11}$$

Пусть x_0 таково, что выполняются неравенства

$$|(x_0, w_j^{1,k})| < 1,\ j \in P_1 \setminus \gamma_0\quad k = 1, \dots, s_j - 1, \tag{12}$$

$$|(x_0, w_j^{i,k})| < 1/2,\ \ j \in P_2,\ \ k = 0, \dots, s_j,\ \ i = 1, 2, \tag{13}$$

тогда если $0 \leqslant T \leqslant 1$, из (11) следует

$$(h, x(T)) \leqslant e^{mT}\left[\frac{T^{s_{j_0}}}{s_{j_0}!}(x_0, w_{j_0}^{1,s_{j_0}}) + (x_0, w_{j_0}^{1,0}) + n - 2\right]. \tag{14}$$

Если же $T > 1$, то при выполнении неравенств (12), 13) из выражения (11) имеем

$$(h, x(T)) \leqslant T^{s_{j_0}}e^{mT}\left[\frac{1}{s_{j_0}!}(x_0, w_{j_0}^{1,s_{j_0}}) + (x_0, w_{j_0}^{1,0})T^{-s_{j_0}} + n - 2\right]. \tag{15}$$

Положим

$$\frac{1}{s_{j_0}!}(x_0, w_{j_0}^{1,s_{j_0}}) < -(n-2), (x_0, w_{j_0}^{1,0}) < -(n-2). \tag{16}$$

Если неравенства (16) выполняются, то из (14) и (15) следует, что при любом T

$$(h, x(T)) = (e^{A^*T}h, x_0) < 0. \tag{17}$$

Как и ранее, устанавливаем, что множество тех x_0, для которых выполняется условие (17), имеет внутреннюю точку. Пришли к противоречию. Следовательно, при $m = \mu$ необходимо, чтобы $s_{j_0} < q$. Теорема доказана.

Найдем теперь управление $u(t)$, переводящее согласно (1) точку x_0 в некоторую точку плоскости $\tilde{G}$. Вначале рассмотрим случай, когда $\dim(L + \tilde{G}) = n - 1$. Пусть уравнение гиперплоскости $L + \tilde{G}$ будет $(h, x) = c$, $c > 0$. Найдем время $T(x_0)$ попадания на плоскость $L + \tilde{G}$ (оно же будет равно времени попадания на плоскость $\tilde{G}$) из равенства $(h, e^{AT}x_0) = c$.

Представим $e^{AT(x_0)}x_0$ в виде $e^{AT(x_0)}x_0 = l + g$, $l \in L$, $g \in \tilde{G}$. Искомое управление $u(t)$ совпадает с управлением, переводящим точку $x = 0$ в точку $x = -l$ за время $T(x_0)$ согласно системе (2) (в подпространстве L система (2) полностью управляема [7]). Положим, например,

$$u(t) = -B^*e^{-A^*t}Ke^{AT(x_0)}l, \tag{18}$$

где K — любая матрица, удовлетворяющая условию

$$WKx = x, \quad x \in L. \tag{19}$$

Здесь $W = \int\limits_0^{T(x_0)} e^{-At}BB^*e^{-A^*t}dt$. Можно положить $WK = P$ — проектору на подпространство L. Проверим, что управление (18) переводит точку x_0 на $\tilde{G}$. Имеем при $T = T(x_0)$

$$x(T) = e^{AT}\left(x_0 + \int\limits_0^T e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau\right) = e^{AT}x_0 -$$

$$- e^{AT}\int\limits_0^T e^{-A\tau}BB^*e^{-A^*\tau}d\tau Ke^{-AT}l = l + g - e^{AT}WKe^{-AT}l.$$

Так как $e^{-AT}l \in L$ (в силу инвариантности подпространства L относительно оператора A), то в силу (19) $WKe^{-AT}l = e^{-AT}l$. Поэтому $x(T) = l + g - l = g \in \tilde{G}$.

В случае, когда $\dim(L + \tilde{G}) = n$, время попадания $T(x_0)$ на плоскость $\tilde{G}$ может быть наперед задано, а далее управление $u(t)$ определяется, как и в случае $\dim(L + \tilde{G}) = n - 1$.

Пример 1. Пусть в (1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим задачу попадания на плоскость $\tilde{G}$, заданную равенствами

$$x_1 - x_3 = 1, \quad x_1 - x_2 - x_4 - 0. \tag{20}$$

Имеем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2 + i$, $\lambda_4 = 2 - i$. Векторы $l_1 = (1, 0, 0, 0)^*$, $g_1 = (0, 1, 0, -1)^*$, $g_2 = (1, 0, 1, 1)^*$ (звездочка здесь и далее означает транспонирование) линейно независимы и принадлежат $L + G$ ($l_1 \in L$; $g_1, g_2 \in G$), плоскость G определяется равенствами (20), в правой части которых стоят нули. Здесь $\tilde{G} = G + d$, где вектор $d = (0, 0, -1, 0)^*$, вектор $h = (0, 1, -1, 1)^*$, $h \perp (L + G)$, равенство $x_2 - x_3 + x_4 = 1$ задает плоскость $L + \tilde{G} = L +$

$+G+d$. Равенство (4) имеет вид $h=\eta_2+\eta_3+\eta_4$, где $\eta_2=(0, 1, 0, 0)^*+ i\cdot 0 = w_2^{1,0}+i\cdot 0$, $\eta_3=(0, 0, -1/2, 1/2)^*+i(0, 0, 1/2, 1/2)^* = w_3^{1,0}+iw_3^{2,0}$, $\eta_4=w_3^{1,0}-iw_3^{2,0}$. Поэтому множество $P_1=\{2\}$, $P_2=\{3\}$, $P_2^+=\{3\}$, $Q=Q_2^+= =Q_1=Q_2=\{3\}$. Так как $m=1$, $\mu=2$, то условия теоремы выполнены (справедливо условие 2) и рассматриваемая система почти полностью управляема на $\tilde{G}$. Попадание на $\tilde{G}$, быть может, невозможно из точек двумерного подпространства N, определенного равенством $N=\{x:(x, w_3^{1,0})=0, (x, w_3^{2,0})=0\}=\{x:x_3=0,\ x_4=0\}$.

Найдем вид управления, переводящего любую точку $x_0\in E_n\setminus N$ (где $x_0=(x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})^*$) на плоскость $\tilde{G}$. Время $T(x_0)$ попадания на плоскость $\tilde{G}$ определяется из уравнения $(h, e^{AT}x_0)=1$, которое имеет вид $e^Tx_{20}+e^{2T}(-x_{30}+x_{40})\cos T-e^{2T}(x_{30}+x_{40})\sin T=1$. Из этого равенства следует, что из точек $x_0\in N$ (т. е. при $x_{30}=x_{40}=0$) таких что $x_{20}\leqslant 0$, попадание на $\tilde{G}$ в силу (1) невозможно. Далее, $e^{AT(x_0)}x_0=(x_{10}, e^Tx_{20}, e^{2T}\cos T\cdot x_{30}+e^{2T}\sin T\cdot x_{40}, -e^{2T}\sin T\cdot x_{30}+e^{2T}\cos Tx_{40})^*\equiv(y_1, y_2, y_3, y_4)^*$. Так как $(h, e^{AT}x_0)=1$, то $y_4=y_3-y_2+1$. Найдем вектор l в разложении $e^{AT}x_0=l+g$. Имеем $\alpha_1l_1+\alpha_2g_1+\alpha_3g_2+d=e^{AT(x_0)}x_0$, откуда $\alpha_1=y_1- -y_3-1$, $\alpha_2=y_2$, $\alpha_3=y_3+1$, т. е. $l=\alpha_1l_1=(y_1-y_3-1, 0, 0, 0)^*$.

Все компоненты w_{ij} матрицы $W=\int\limits_0^{T(x_0)}e^{-At}BB^*e^{-A^*t}dt$ равны нулю, кроме $w_{11}=T(x_0)$. Компоненты k_{ij} матрицы K положим равными 0 при i и $j\neq 1$, $k_{11}=1/T(x_0)$. Тогда $WKx=x$ при $x\in L$ и тогда

$$u(t)=-B^*e^{-A^*t}Ke^{-AT(x_0)}l=\frac{-y_1+y_3+1}{T(x_0)}=$$

$$=\frac{-x_{10}+e^{2T(x_0)}x_{30}\cos T(x_0)+e^{2T(x_0)}x_{40}\sin T(x_0)+1}{T(x_0)}.$$

1. *Математическая* теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко.— М. : Физматгиз, 1961.— 391 с.
2. *Коробов В. И., Луценко А. В.* Управляемость линейной стационарной системы на подпространство за нефиксированное время.— Укр. мат. журн., 1977, **29**, № 4, с. 531—534.
3. *Коробов В. И.* Критерии управляемости линейной системы на подпространство.— Вестн. Харьк. ун-та. Прикл. математика и механика, 1981, № 221, вып. 46, с. 3—11.
4. *Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов.— М. : Наука, 1971.— 507 с.
5. *Крахотко В. В., Размыслович Г. П.* К проблеме полной управляемости динамических систем.— Дифференц. уравнения, 1979, **15**, № 9, с. 1707—1709.
6. *Коробов В. И., Маринич А. П., Подольский Е. Н.* Управляемость линейных автономных систем при наличии ограничений на управление.— Там же, 1975, **11**, № 11, с. 1967—1979.
7. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением.— М. : Наука, 1968.— 475 с.

Харьк. ун-т Получено 24.01.83