УДК 517.9:517.5

А. Н. Кулик

О приближениях непрерывных периодических функций, дифференцируемых вдоль траекторий динамических систем

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dy/dx = f(y), \ y|_{x=0} = y_0, \tag{1}$$

где $f(y) = (f_1(y_1, \dots, y_m), \dots, f_m(y_1, \dots, y_m))$ — непрерывная по совокупности переменных $(y_1, \dots, y_m) \in R^m$ и 2π-периодическая по каждой переменной y_j функция, $j = \overline{1, m}$. Будем предполагать, что задача Коши (1) имеет единственное решение $y(x; y_0)$ при каждом фиксированном $y_0 \in R^m$, непрерывно зависящее от начальной точки y_0.

Обозначим через $C^{(0)}(\mathscr{T}_m)$ пространство функций, непрерывных по совокупности переменных $(y_1, \dots, y_m) = y$ и 2π-периодических по каждой переменной, т. е. заданных на m-мерном торе $\mathscr{T}_m$; $C^{(1)}(\mathscr{T}_m)$ — подпространство из $C^{(0)}(\mathscr{T}_m)$ функций, имеющих непрерывные производные первого порядка по любой из переменных y_j; $C'(\mathscr{T}_m; f)$ — подпространство функций $F(y) \in C^{(0)}(\mathscr{T}_m)$ таких, что суперпозиция $F(y(x; y_0))$, где $y(x; y_0)$ — решение задачи (1), как функция переменной x непрерывно дифференцируема по x при каждом фиксированном $y_0 \in R^m$ и при этом производная $dF(y(x; y_0))/dx$, вычисленная при $x = 0$, $dF(y(x; y_0))/dx|_{x=0} \overset{\text{def}}{=} \partial_f F(y_0)$, является функцией от y_0, принадлежащей пространству $C^{(0)}(\mathscr{T}_m)$ см. [1]). Типичными примерами функций из пространства $C'(\mathscr{T}_m; f)$ являются функции переменных y_0 вида $s(y_0) = \int_0^\infty \exp\{-x\} F(y(x; y_0))\, dx$, где $F(y) \in C^0(\mathscr{T}_m)$.

Пространство непрерывно дифференцируемых функций $C^{(1)}(\mathscr{T}_m)$ является подпространством пространства $C'(\mathscr{T}_m; f)$. Важной является задача (см. [1, 2]) об одновременном приближении функций и их производных $C'(\mathscr{T}_m; f)$ функциями пространства $C^{(1)}(\mathscr{T}_m)$ вдоль решений задачи (1). Обозначим через $\omega(\sigma; F)$ модуль непрерывности функции $F(y) \in C^{(0)}(\mathscr{T}_m)$, определяемый равенством $\omega(\sigma; F) = \sup\limits_{\|y - \bar{y}\| \leqslant \sigma} \|F(y) - F(\bar{y})\|$, где $\|\cdot\|$ — обычная норма в R^m: $\|y\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2$, $H^{\omega_0}(\mathscr{T}_m)$ — класс функций $F(y) \in C^{(0)}(\mathscr{T}_m)$, удовлетворяющих оценке $\|F(y) - F(\bar{y})\| \leqslant \omega_0(\|y - \bar{y}\|)$, где $\omega_0(\sigma)$ — некоторый фиксированный модуль непрерывности.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть для некоторого модуля непрерывности $\omega_0(\sigma)$ выполняется условие*

$$\lim_{\sigma \to +0} \sigma^{-1} \omega(\sigma; f)\, \omega_0(\sigma) = 0. \tag{2}$$

Тогда для каждой функции $s(y) \in C'(\mathscr{T}_m; f) \cap H^{\omega_0}(\mathscr{T}_m)$ существует последовательность $s_k(y) \in C^{(1)}(\mathscr{T}_m)$ такая, что

$$\lim_{k \to \infty} (\max_{y \in R^m} \|s(y) - s_k(y)\| + \max_{y \in R^m} \|\partial_f s(y) - \partial_f s_k(y)\|) = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть скалярные функции $s(y) \in C'(\mathscr{T}_m; f) \cap H^{\omega_0}(\mathscr{T}_m)$. Пусть $\nu_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2, 3,$ — непрерывные скалярные функции, зависящие от переменной ε, определены при $\varepsilon \in [0, 1]$ и $\nu_i(0) = 0$. Тогда существуют функции $f_\varepsilon(y)$, $s_\varepsilon(y)$, $g_\varepsilon(y) \in C^{(1)}$ такие, что

$$\|f_\varepsilon(y) - f(y)\| \leqslant \nu_1(\varepsilon), \ |s_\varepsilon(y) - s(y)| \leqslant \nu_2(\varepsilon),$$
$$\|g_\varepsilon(y) - \partial_f s(y)\| \leqslant \nu_3(\varepsilon), \ \varepsilon \in [0, 1]. \tag{4}$$

Обозначим
$$W(\varepsilon)=\max\{1, \max_{y\in R^m}\|\partial f_\varepsilon(y)/\partial y\|\} \tag{5}$$

и покажем, что функциями $s_k(y)\in C^{(1)}(\mathscr{T}_m)$, удовлетворяющими условию (3), могут быть функции вида
$$s^{(\varepsilon)}(y)=\int_0^\infty \exp\{-2W(\varepsilon)x\}(2W(\varepsilon)s_\varepsilon(y^\varepsilon(x;y))-g_\varepsilon(y^\varepsilon(x;y)))\,dx, \tag{6}$$

где $\varepsilon=k^{-1}$, $s^{(k-1)}=s_k$, $y^\varepsilon(x;y_0)$ — решение системы $dy/dx=f_\varepsilon(y)$ при начальном условии $y^\varepsilon(0;y_0)=y_0$. При $x\geqslant 0$ оценим разность $(y(x;y_0)-y^\varepsilon(x;y_0)$. Имеем
$$y(x;y_0)-y^\varepsilon(x;y_0)=\int_0^x (f(y(\tau;y_0))-f_\varepsilon(y^\varepsilon(\tau;y_0)))\,d\tau,$$
$$\|y(x;y_0)-y^\varepsilon(x;y_0)\|\leqslant\int_0^x\|f(y(\tau;y_0))-f_\varepsilon(y(\tau;y_0))\|\,d\tau+$$
$$+\int_0^x\|f_\varepsilon(y(\tau;y_0))-f_\varepsilon(y^\varepsilon(\tau;y_0))\|\,d\tau\leqslant\nu_1(\varepsilon)x+$$
$$+W(\varepsilon)\int_0^x\|y(\tau;y_0)-y^\varepsilon(\tau;y_0)\|\,d\tau.$$
Отсюда получаем
$$\|y(x;y_0)-y^\varepsilon(x;y_0)\|\leqslant W^{-1}(\varepsilon)\nu_1(\varepsilon)(\exp\{W(\varepsilon)x\}-1),\ \ x\geqslant 0. \tag{7}$$

Непосредственным интегрированием по частям убеждаемся, что функцию $s(y)$ можно представить в таком виде:
$$s(y)=\int_0^\infty\exp\{-2W(\varepsilon)x\}(2W(\varepsilon)s(y(x;y))-\partial_f s(y(x;y)))\,dx.$$

Это позволяет получить следующие оценки:
$$|s^\varepsilon(y)-s(y)|\leqslant 2W(\varepsilon)\int_0^\infty\exp\{-2W(\varepsilon)x\}|s_\varepsilon(y^\varepsilon(x;y))-s(y(x;y))|\,dx+$$
$$+\int_0^\infty\exp\{-2W(\varepsilon)x\}|g_\varepsilon(y^\varepsilon(x;y))-\partial_f s(y(x;y))|\,dx\leqslant$$
$$\leqslant 2W(\varepsilon)\int_0^\infty\exp\{-2W(\varepsilon)x\}(|s_\varepsilon(y^\varepsilon(x;y))-s(y^\varepsilon(x;y))|+$$
$$+|s(y^\varepsilon(x;y))-s(y(x;y))|)\,dx+\int_0^\infty\exp\{-2W(\varepsilon)x\}(|g_\varepsilon(y^\varepsilon(x;y))-$$
$$-\partial_f s(y^\varepsilon(x;y))|+|\partial_f s(y^\varepsilon(x;y))-\partial_f s(y(x;y))|)\,dx\leqslant\nu_2(\varepsilon)+$$
$$+2W(\varepsilon)\int_0^\infty\exp\{-2W(\varepsilon)x\}\omega_0(\|y^\varepsilon(x;y)-y(x;y)\|)\,dx+(2W(\varepsilon))^{-1}\nu_3(\varepsilon)+$$
$$+\int_0^\infty\exp\{-2W(\varepsilon)x\}\omega(\|y^\varepsilon(x;y)-y(x;y)\|;\ \partial_f s)\,dx.$$

Учитывая оценку (7), а также полуаддитивность модулей непрерывности $\omega_0(\sigma)$ и $\omega(\sigma; \partial_f s)$, получаем неравенство

$$s^{(\varepsilon)}(y) - s(y) | \leqslant \nu_2(\varepsilon) + (2w(\varepsilon))^{-1}\nu_3(\varepsilon) + \omega_0(W^{-1}(\varepsilon)\nu_1(\varepsilon)) + \\ + W^{-1}(\varepsilon)\,\omega(W^{-1}(\varepsilon)\nu_1(\varepsilon); \partial_f s). \quad (8)$$

В этом неравенстве все слагаемые справа стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, $s^{(\varepsilon)}(y) \Rightarrow s(y)$. Замечая, что $\partial_{f\varepsilon} s^{(\varepsilon)}(y) = 2W(\varepsilon)s^{(\varepsilon)}(y) + (-2W(\varepsilon)s_\varepsilon(y) + g_\varepsilon(y))$, с учетом тождества $\partial_f s(y) \equiv 2W(\varepsilon)s(y) + (-2W(\varepsilon)s(y) + \partial_f(s(y))$ получаем

$$|\partial_f s(y) - \partial_f s^{(\varepsilon)}(y)| \leqslant |\partial_f s(y) - \partial_{f\varepsilon} s^{(\varepsilon)}(y)| + |\partial_{f\varepsilon} s^{(\varepsilon)}(y) - \partial_f s^{(\varepsilon)}(y)| \leqslant \\ \leqslant 2W(\varepsilon)|s^{(\varepsilon)}(y) - s(y)| + 2W(\varepsilon)|s_\varepsilon(y) - s(y)| + |g_\varepsilon(y) - \partial_f s(y)| + \\ + \left|\sum_{j=1}^{m}(\partial s^{(\varepsilon)}(y)/\partial y_i)(f_{j\varepsilon}(y) - f_j(y))\right| \leqslant 4W(\varepsilon)\nu_2(\varepsilon) + \\ + (c)\,W_2(\varepsilon)\nu_1(\varepsilon) + 4w(\varepsilon)\,\omega_0(W^{-1}(\varepsilon)\nu_1(\varepsilon)),$$

где величина $W_2(\varepsilon)$ определена неравенством $|\partial s_\varepsilon(y)/\partial y_i| \leqslant W_2(\varepsilon)$, (c) — некоторая постоянная. Выбирая в качестве приближающих функций $f_\varepsilon(y)$, $s_\varepsilon(y)$, $g_\varepsilon(y)$ конкретные, например тригонометрические полиномы, функции Стеклова и т. д. (см. [5—7]), можно полагать, что $\nu_1(\varepsilon) = \omega(\varepsilon; f)$, $\nu_2(\varepsilon) = \omega_0(\varepsilon)$ и при этом $W(\varepsilon) = \omega(\varepsilon; f)\,\varepsilon^{-1}$, $W_2(\varepsilon) = \omega_0(\varepsilon)\,\varepsilon^{-1}$. Таким образом, условие (2) гарантирует равномерное стремление к нулю разности $\partial_f s^{(\varepsilon)}(y) - \partial_f s(y)$ при $\varepsilon \to 0$. Остается проверить, что функции $s^{(\varepsilon)}(y)$ принадлежат пространству $C^{(1)}(\mathscr{T}_m)$. Для этого достаточно оценить производные по y_i от подынтегрального выражения в (6) $\Phi(\varepsilon, y, x) = \exp\{-2W(\varepsilon)x\}(2W(\varepsilon) \times s_\varepsilon(y^\varepsilon(x; y)) - g_\varepsilon(y^\varepsilon(x; y))$. Запишем производную, например по y_1. Имеем

$$\partial\Phi(\varepsilon, y, x)/\partial y_1 = \exp\{-2W(\varepsilon)x\}\left(2W(\varepsilon)\sum_{j=1}^{m}(\partial s_\varepsilon/\partial y_j^\varepsilon)(\partial y_j^\varepsilon/\partial y_1) - \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^{m}(\partial g_\varepsilon/\partial y_j^\varepsilon)(\partial y_j^\varepsilon/\partial y_1)\right). \quad (9)$$

Учитывая оценку производной $\|\partial y^\varepsilon(x; y)/\partial y_i\| \leqslant M_1 \exp\{W(\varepsilon)x\}$ при $x \geqslant 0$, из равенства (9) получаем

$$|\partial\Phi(\varepsilon, y, x)/\partial y_1| \leqslant M_1 \exp\{-W(\varepsilon)x\}\left(\sum_{j=1}^{m}(2W(\varepsilon)|\partial s_\varepsilon/\partial y_j| + |\partial g_\varepsilon/\partial y_j|)\right). \quad (10)$$

Оценка (10) указывает на равномерную сходимость несобственного интеграла $\int_0^\infty (\partial\Phi/\partial y_1)\,dx$. Таким образом, функция $s^{(\varepsilon)}(y)$, определяемая равенством (6), имеет непрерывные производные первого порядка по каждой переменной y_j, $j = \overline{1, m}$, следовательно, $s^\varepsilon(y) \in C^{(1)}(\mathscr{T}_m)$.

З а м е ч а н и е. В случае, когда хотя бы одна из функций $f(y)$, $s(y)$ удовлетворяет условию Липшица, условие (2) будет выполняться.

1. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на римановых многообразиях отрицательной кривизны.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1967, 90, с. 1—210.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 244 с.
3. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении.—Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, 34, № 6, с. 1219—1240.

4. *Wilson F. W.* Smoothing derivatives of functions and applications.— Trans. AMS, 1969 139, p. 413—428.
5. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 511 с.
6. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами.— Киев : Наук. думка, 1981.— 339 с.
7. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений.—М. : Наука, 1976.— 320 с.

Киев. политехн. ин-т

Получено 01.06.84
после доработки — 10.10.85