УДК 517.5

Б. В. Винницкий

О построении целой функции произвольного порядка с заданными асимптотическими свойствами

При изучении ряда вопросов, связанных с разложением аналитических функций в ряды типа экспонент, нужно по заданной целой функции f построить другую целую функцию L с простыми нулями, рост которой в некотором понимании близок к росту f. В случае, когда f порядка ρ, $0 < \rho < \infty$, такие функции L строились во многих работах (см. [1—3]). Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любой целой трансцендентной функции f существует целая функция L, имеющая бесконечное множество нулей $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, причем все нули простые, и такая, что:* а) $M_L(r) = M_f((1 + o(1))r)$ *при* $r \to \infty$; б) $m_L(r_n) = M_f((1 + o(1))r_n)$ *при* $n \to \infty$; в) $|\lambda_n L'(\lambda_n)| = M_f((1 + o(1))|\lambda_n|)$ *при* $n \to \infty$, *где* $r_n \uparrow \infty$ — *некоторая последовательность положительных чисел,* $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $m_f(r) = \min\{|f(z)| : |z| = r\}$.

Доказательство теоремы 1 проведем в ряд этапов. При этом, учитывая известные свойства мажоранты Ньютона (см. [4, 5]), будем считать, не уменьшая общности, что все тейлоровские коэффициенты f_n функции f отличны от 0 и последовательность $\varkappa_n = |f_{n-1}/f_n|$ не убывает.

Пусть $\mu_f(r) = \max\limits_{n\geqslant 0}\{|f_n| r^n\}$, $\nu_f(r) = \max\{n : \mu_f(r) = |f_n| r^n\}$ и $u(r)$ — положительная на $[0; \infty)$ функция такая, что $u(r) \uparrow \infty$ при $r \to \infty$ и для всякого $\varepsilon > 0$ при $r \geqslant r_0(\varepsilon)$ выполняется

$$\exp(u(r))\,\mu_f(r) \leqslant \mu_f((1 + \varepsilon) r). \tag{1}$$

В качестве $u(r)$ можно взять, например, функцию $u(r) = \max\{1; \sqrt{\nu_f(r)}\}$. Пусть, далее, $\varphi(x)$ — положительная и непрерывно дифференцируемая на $[0; \infty)$ функция, удовлетворяющая при $x \to \infty$ условиям

$$\varphi(x) \uparrow \infty, \quad x\varphi'(x)/\varphi(x) \to 0, \quad \varphi(x) \leqslant \sqrt{u(x)}/10. \tag{2}$$

Положим $\gamma(x) = x/\varphi(x)$, $q_n = \exp(\gamma(n) - \gamma(n + 1))$. Очевидно, $\gamma(x) \uparrow \infty$ при $x \to \infty$ и $1 > q_n \to 1$ при $n \to \infty$. Построим последовательности (ρ_n) и (τ_n) следующим образом (ср. с [6]). Пусть $\nu_0 = \tau_0 = 0$, $\nu_1 = 1$, $\rho_0^* = \varkappa_1$, $\nu_2 = \min\{k > \nu_1 : \rho_0^* \leqslant q_1 |f_{\nu_1}/f_k|^{1/(k-\nu_1)}\}$, $T_2 = |f_{\nu_1}/f_{\nu_2}|^{1/(\nu_2-\nu_1)}$. Имеем $\varkappa_{\nu_1} \leqslant T_1 \leqslant \varkappa_{\nu_2}$, ибо $\varkappa_n \uparrow \infty$. Если $\nu_2 = \nu_1 + 1$ или $T_1 \geqslant \varkappa_{\nu_2} q_1$, то положим $\rho_1 = \rho_0^*$, $\tau_1 = \nu_1$, $\rho_1^* = T_1$. Если же $\nu_2 > \nu_1 + 1$ и $T_1 < \varkappa_{\nu_2} q_1$, то $\tau_1 = \nu_2 - 1$, $\rho_1^* = \varkappa_{\nu_2}$, $\rho_1 = |f_{\tau_0}/f_{\tau_1}|^{1/(\tau_1-\tau_0)}$. Предположим, что числа τ_{n-1}, ρ_{n-1}, ρ_{n-1}^*, T_{n-1} и ν_n определены. Пусть

$$\nu_{n+1} = \min\{k > \nu_n : \rho_{n-1}^* \leqslant q_n |f_{\nu_n}/f_k|^{1/(k-\nu_n)}\}, \quad T_n = |f_{\nu_n}/f_{\nu_{n+1}}|^{1/(\nu_{n+1}-\nu_n)}. \tag{3}$$

Имеем

$$\varkappa_{\nu_n} \leqslant T_n \leqslant \varkappa_{\nu_{n+1}}, \quad T_n \geqslant q_n \rho_{n-1}^*, \quad q_n |f_{\nu_n}/f_{\nu_{n+1}-1}|^{1/(n_{n+1}-\nu_n-1)} < \rho_{n-1}^*, \tag{4}$$

причем последнее неравенство справедливо при условии $\nu_{n+1} > \nu_n + 1$. Если $\nu_{n+1} = \nu_n + 1$ или $T_n \geqslant \varkappa_{\nu_{n+1}} q_n$, то положим $\rho_n = \rho^*_{n-1}$, $\tau_n = \nu_n$, $\rho^*_n = T_n$. Если же $\nu_{n+1} > \nu_n + 1$ и $T_n < \varkappa_{\nu_{n+1}} q_n$, то пусть $\tau_n = \nu_{n+1} - 1$, $\rho_n = |f_{\tau_{n-1}}/f_{\tau_n}|^{1/(\tau_n - \tau_{n-1})}$, $\rho^*_n = \varkappa_{\nu_{n+1}}$. Полагая $\Delta_n = \tau_n - \tau_{n-1}$, при всех $n \geqslant 1$ имеем $\rho_n = |f_{\tau_{n-1}}/f_{\tau_n}|^{1/\Delta_n}$ и $\Delta_n \geqslant 1$.

Лемма 1. *Для всех* $n \geqslant 2$ *выполняется*

$$\rho_{n-1} \leqslant \varkappa_{\tau_{n-1}} \leqslant \varkappa_{\tau_{n-1}+1} \leqslant \rho_n \leqslant \varkappa_{\tau_n}, \tag{5}$$

$$\rho_{n-1} \leqslant q_{n-1}\rho_n, \tag{6}$$

$$\rho_n \leqslant \bar{q}_n \varkappa_{\tau_{n-1}+1}, \tag{7}$$

где $(\bar{q}_n)$ — *некоторая последовательность положительных чисел таких, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{q}_n - 1$.

Доказательство. Неравенства (5) очевидны, ибо $\varkappa_n \uparrow \infty$. Далее, возможны четыре случая: 1) $\rho_n = \rho^*_{n-1}$, $\rho_{n-1} = \rho^*_{n-2}$; 2) $\rho_n = \rho^*_{n-1}$, $\rho_{n-1} = |f_{\tau_{n-2}}/f_{\nu_n - 1}|^{1/\Delta_{n-1}}$; 3) $\rho_n = |f_{\tau_{n-1}}/f_{\nu_{n+1}-1}|^{1/\Delta_n}$, $\rho_{n-1} = |f_{\tau_{n-2}}/f_{\nu_n-1}|^{1/\Delta_{n-1}}$; 4) $\rho_n = \rho^*_{n-2}$, $\rho_n = |f_{\tau_{n-1}}/f_{\nu_{n+1}-1}|^{1/\Delta_n}$.

В случае 1 $\tau_n = \nu_n$, $\tau_{n-1} = \nu_{n-1}$. Поэтому $\rho_n = \rho^*_{n-1} = T_{n-1} \geqslant \rho^*_{n-2}/q_{n-1} = \rho_{n-1}/q_{n-1}$, т. е. (6) выполняется. Далее, если $\nu_n = \nu_{n-1} + 1$, то $\rho_n = \rho^*_{n-1} = T_{n-1} = |f_{\nu_{n-1}}/f_{\nu_n}|^{1/(\nu_n - \nu_{n-1})} = \varkappa\tau_{\tau_{n-1}+1}$, т. е. (7) доказано. Пусть $\nu_n > \nu_{n-1} + 1$. Тогда из (4) получаем

$$\rho_{n-1} = \rho^*_{n-2} \geqslant q_{n-1} |f_{\nu_{n-1}}/f_{\nu_n - 1}|^{1/(\nu_n - 1 - \nu_{n-1})} = q_{n-1} (T_{n-1}^{\nu_n - \nu_{n-1}}/\varkappa_{\nu_n})^{1/(\nu_n - 1 - \nu_{n-1})} \geqslant$$

$$\geqslant q_{n-1} (q_{n-1} T_{n-1}^{\nu_n - \nu_{n-1} - 1})^{1/(\nu_n - \nu_{n-1} - 1)} \geqslant T_{n-1} q^2_{n-1} = \rho^*_{n-1} q^2_{n-1} = \rho_n q^2_{n-1}.$$

Поэтому в силу (5) $\rho_n q^2_{n-1} \leqslant \rho_{n-1} \leqslant \varkappa_{\tau_{n-1}} \leqslant \varkappa_{\tau_{n-1}+1}$, откуда следует (7).

В случае 4 $\tau_n = \nu_{n+1} - 1$, $\tau_{n-1} = \nu_{n-1}$. Поэтому из (4) получаем

$$\rho_n = (T_{n-1}^{\nu_n - \nu_{n-1}} |f_{\nu_n}/f_{\nu_{n+1}-1}|)^{1/\Delta_n} \geqslant (T_{n-1}^{\nu_n - \nu_{n-1}} \varkappa_{\nu_{n+1}}^{\nu_{n+1} - \nu_n - 1})^{1/\Delta_n} \geqslant$$

$$\geqslant (T_{n-1}^{\nu_n - \nu_{n-1}} T_{n-1}^{\nu_{n+1} - 1 - \nu_n})^{1/\Delta_n} = T_{n-1} \geqslant \rho^*_{n-2}/q_{n-1} = \rho_{n-1}/q_{n-1},$$

откуда вытекает (6). Далее, используя (4), имеем

$$\rho_n = (T_{n-1}^{\nu_n - \nu_{n-1}} |f_{\nu_n}/f_{\nu_{n+1}-1}|)^{1/\Delta_n} \leqslant (T_{n-1}^{\nu_n - \nu_{n-1}} (\rho^*_{n-1}/q_n)^{\nu_{n+1} - \nu_n - 1})^{1/\Delta_n} =$$

$$= T_{n-1} (1/q_n)^{(\nu_{n+1} - \nu_n - 1)/\Delta_n} \leqslant T_{n-1}/q_n. \tag{8}$$

Если $\nu_n = \nu_{n-1} + 1$, то $T_{n-1} = \varkappa_{\nu_{n-1}+1} = \varkappa_{\tau_{n-1}+1}$ и поэтому $\rho_n \leqslant \varkappa_{\tau_{n-1}+1}/q_n$, т. е. (7) справедливо. Если же $\nu_n > \nu_{n-1} + 1$, то (см. случай 1) $\rho_{n-1} \geqslant T_{n-1} q^2_{n-1}$. Значит, из (8) и (5) находим $\rho_n \leqslant \rho_{n-1}/(q_n q^2_{n-1}) \leqslant \varkappa_{\tau_{n-1}+1}/(q_n q^2_{n-1})$, откуда следует (7). Два других случая рассматриваются аналогично.

Лемма 2. *При любом* r, $0 < r < 1$, *для всех* $n \geqslant 0$ *выполняется*

$$\mu_f(r\rho_n) \leqslant \delta_n |f_{\tau_n}| \rho_n^{\tau_n}, \tag{9}$$

где $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta_n < \infty$.

Доказательство. Согласно (7) $r\rho_n \leqslant \varkappa_{\tau_{n-1}+1}$ при больших n. Поэтому достаточно рассмотреть следующие три случая: 1) $\varkappa_{\tau_{n-1}} \leqslant r\rho_n \leqslant \varkappa_{\tau_{n-1}+1}$; 2) $\varkappa_{\tau_{n-2}+1} < r\rho_n < \varkappa_{\tau_{n-1}}$; 3) $r\rho_n \leqslant \varkappa_{\tau_{n-2}+1}$. Учитывая, что [7, с. 14] $\mu_f(r) = |f_n| r^n$ при $r \in [\varkappa_n; \varkappa_{n+1}]$, в случае 1 находим $\mu_f(r\rho_n) = |f_{\tau_{n-1}}| (r\rho_n)^{\tau_{n-1}} =$

$= |f_{\tau_n}|\rho_n^{\tau_n} r^{\tau_{n-1}} \leqslant |f_{\tau_n}|\rho_n^{\tau_n} r^{n-1}$, откуда следует (9). В случае 2 при некотором j, $1 \leqslant j \leqslant \tau_{n-1} - \tau_{n-2}$, имеем $\varkappa_{\tau_{n-1}-j} \leqslant r\rho_n \leqslant \varkappa_{\tau_{n-1}-j+1}$. Значит, в силу (5)

$$\mu_f(r\rho_n) = |f_{\tau_{n-1}-j}|(r\rho_n)^{\tau_{n-1}-j} = |f_{\tau_{n-1}}|\rho_n^{\tau_{n-1}}\left|\frac{f_{\tau_{n-1}-j}}{f_{\tau_{n-1}}}\right|\frac{r^{\tau_{n-1}-j}}{\rho_n^j} \leqslant$$

$$\leqslant |f_{\tau_n}|\rho_n^{\tau_n}(\varkappa_{\tau_{n-1}}/\rho_n)^j r^{\tau_{n-2}} \leqslant |f_{\tau_n}|\rho_n^{\tau_n} r^{n-2},$$

т. е. и теперь (9) выполняется. Далее, из (2) вытекает, что $q_{n-1}^{n-1} = \exp(-(n-1)(1+o(1))\varphi(n-1)) < \exp(-\sqrt{n})$ при $n \to \infty$. Поэтому, учитывая (5) — (7), в случае 3 при $n \geqslant n_0$ получаем

$$\mu_f(r\rho_n) \leqslant \mu_f(\varkappa_{\tau_{n-2}+1}) = |f_{\tau_{n-2}+1}|\varkappa_{\tau_{n-2}+1}^{\tau_{n-2}+1} = |f_{\tau_n}|\rho_n^{\tau_n}(\rho_{n-1}/\rho_n)^{\tau_{n-1}} \times$$

$$\times (\varkappa_{\tau_{n-2}+1}/\rho_{n-1})^{\tau_{n-2}} \leqslant |f_{\tau_n}|\rho_n^{\tau_n} q_{n-1}^{\tau_{n-1}} \leqslant |f_{\tau_n}|\rho_n^{\tau_n}\exp(-\sqrt{n}),$$

т. е. лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $r_n = \rho_n/q_n^{1/(2\Delta_n)}$. Тогда при $n \geqslant n_0$ справедливы неравенства*

$$\sum_{k=1}^{n}\rho_k/\rho_n \leqslant 2\varphi(n), \qquad \sum_{k=n+1}^{\infty}\rho_n/\rho_k \leqslant 2\varphi(n), \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln(1-\rho_k/\rho_n) \geqslant -2\varphi^2(n), \tag{11}$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\ln(1-\rho_n/\rho_k) \geqslant -2\varphi^2(n), \tag{12}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln(1-(\rho_k/r_n)^{\Delta_k}) \geqslant -3\varphi^2(n), \tag{13}$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\ln(1-(r_n/\rho_k)^{\Delta_k}) \geqslant -3\varphi^2(n). \tag{14}$$

Доказательство. Учитывая (6) и монотонность $\gamma(t)$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\rho_k/\rho_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}\frac{\rho_{k+1}}{\rho_{k+2}}\cdots\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n}q_k q_{k+1}\cdots q_{n-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\exp(\gamma(k)-\gamma(n)) \leqslant e^{-\gamma(n)}\left(\int_0^n e^{\gamma(t)}dt + e^{\gamma(n)}\right). \tag{15}$$

Из (2) следует, что $\varphi'(x) \to 0$ при $x \to 0$. Поэтому при $x \to \infty$ имеем

$$\int_0^x \exp(\gamma(t))\,dt \sim \varphi(x)\exp(\gamma(x)), \tag{16}$$

$$\int_x^\infty \exp(-\gamma(t))\,dt \sim \varphi(x)\exp(-\gamma(x)). \tag{17}$$

Значит, первое из неравенств (10) следует из (15). Кроме того, учитывая (17), (2) и неравенство $\ln(1-x) \geqslant -x/(1-x)$, $x \in [0; 1)$, при $n \geqslant n_0$ находим

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\ln(1-\rho_n/\rho_k) \geqslant -\sum_{k=n+1}^{\infty}1/(\rho_k/\rho_n - 1) \geqslant -\sum_{k=n+1}^{\infty}e^{-\gamma(k)}/(e^{-\gamma(n)}-e^{-\gamma(k)}) \geqslant$$

$$\geqslant -\sum_{k=n+1}^{\infty}e^{-\gamma(k)}/(e^{-\gamma(n)}-e^{-\gamma(n+1)}) \geqslant -3/2\varphi(n)\,e^{\gamma(n)}\sum_{k=n+1}^{\infty}e^{-\gamma(k)} \geqslant -2\varphi^2(n),$$

откуда получаем (12). Далее, из (2) следует, что $\ln(1-\sqrt{q_n})\geqslant -2\varphi(n)$ при $n\geqslant n_0$. Поэтому как и для больших n получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\ln(1-(\rho_k/r_n)^{\Delta_k})\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}\ln(1-\rho_k/\rho_n)+\ln(1-(\rho_n/r_n)^{\Delta_n})\geqslant$$

$$\geqslant-2\varphi^2(n)+\ln(1-\sqrt{q_n})\geqslant-3\varphi^2(n),$$

т. е. (13) справедливо. Остальные утверждения леммы 3 доказываются аналогично.

Лемма 4. *При $n\to\infty$ выполняется* $|f_{\tau_n}|r_n^{\tau_n}\geqslant\mu_f((1+o(1))r_n)$.

Доказательство. Так как $\rho_n<r_n$ и $\rho_n=(1+o(1))r_n$ при $n\to\infty$, то на основании леммы 2 при $n\to\infty$ получаем $|f_{\tau_n}|r_n^{\tau_n}\geqslant|f_{\tau_n}|\rho_n^{\tau_n}\geqslant\mu_f((1+o(1))\rho_n)=\mu_f((1+0(1))r_n)$, что и требовалось доказать.

Лемма 5. *Пусть L — целая функция, имеющая нули в точках λ_n, а $l_n(z)=L(z)/(z-\lambda_n)$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует постоянная $K(\varepsilon)\leqslant 2(2+\varepsilon)/\varepsilon$ такая, что при всех $r>0$ и $n\geqslant 1$ имеем*

$$\frac{M_L(r)}{r+|\lambda_n|}\leqslant M_{l_n}(r)\leqslant K(\varepsilon)\frac{M_L((1+\varepsilon)r)}{r+|\lambda_n|}. \tag{18}$$

Левая часть (18) очевидна. Доказательство правой проведем в два этапа. Пусть n, $r>0$ и δ, $0<\delta<1$, фиксированы. Если $|r-|\lambda_n||\geqslant\delta r$, то $M_{l_n}(r)\leqslant M_L(r)/(\delta r)$. Если же $|r-|\lambda_n||<\delta r$, то, полагая $R=r(1+\delta)/(1-\delta)$, получаем $M_{l_n}(r)\leqslant M_{l_n}(R)\leqslant M_L(R)/(\delta R)$. Таким образом,

$$rM_{l_n}(r)\leqslant\frac{1}{\delta}M_L\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}r\right). \tag{19}$$

Аналогично, если $|r-|\lambda_n||\geqslant\delta|\lambda_n|$, то $M_{l_n}(r)\leqslant M_L(r)/(\delta|\lambda_n|)$. Если же $|r-|\lambda_n||<\delta|\lambda_n|$, то, полагая $r_1=r+2\delta|\lambda_n|$, имеем $M_{l_n}(r)\leqslant M_{l_n}(r_1)\leqslant M_L(r_1)/(\delta|\lambda_n|)\leqslant(\delta|\lambda_n|)^{-1}M_L(r(1+\delta)/(1-\delta))$. Значит, $|\lambda_n|M_{l_n}(r)\leqslant\delta^{-1}M_L(r(1+\delta)/(1-\delta))$. Отсюда и из (19) получаем (18).

Лемма 6. *Функция*

$$L(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-(z/\rho_n)^{\Delta_n}) \tag{20}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 1 и, кроме того,

$$M_L(r)\leqslant K\mu_f(r)\exp(4\varphi(r)),\quad r\geqslant 0, \tag{21}$$

для любых $\lambda\in\mathbb{C}$ и z, $|z|<1$, справедливо разложение

$$f(\lambda z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}\frac{f(\lambda_n z)}{L'(\lambda_n)}, \tag{22}$$

причем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_f(r|\lambda_n|)}{|\lambda_n L'(\lambda_n)|}<\infty \tag{23}$$

при $r\in[0;1)$, где $K<\infty$ — постоянная.

Доказательство. Используя (10), как и в [6], получаем

$$\ln M_L(r)\leqslant\ln\mu_f(r)+4\varphi(\nu)+O(1), \tag{24}$$

где $\nu=\max\{k:\rho_k\leqslant r\}$. В силу (6) $\rho_\nu\geqslant\rho_1\exp(\gamma(\nu)-\gamma(1))$, а из (2) следует, что $\ln\varphi(x)=o(x)$ при $x\to\infty$. Поэтому при больших r имеем $\nu\leqslant\gamma^{-1}(\ln\rho_\nu-\ln\rho_1+\gamma(1))\leqslant\rho_\nu\leqslant r$. Следовательно, (21) вытекает из (24).

Далее, для доказательства (23) достаточно показать (см. [8]), что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(r\rho_n)/m_{G_n}(\rho_n) < \infty \tag{25}$$

при $r \in [0; 1)$, где $G_n(z) = L(z)/(1-(z/\rho_n)^{\Delta_n})$. Учитывая (11) и (12), как и в [8] при $n \geqslant n_0$ получаем

$$\ln m_{G_n}(\rho_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \Delta_k \ln \frac{\rho_n}{\rho_k} - 4\varphi^2(n) \geqslant \ln(|f_n|\rho_n^{\tau_n}) - 6\varphi^2(n). \tag{26}$$

В силу (2) и (3) при любом фиксированном $r \in (0; 1)$ и больших n имеем $6\varphi^2(n) \leqslant 6\varphi^2(\rho_n) \leqslant 7\varphi^2(r\rho_n) \leqslant u(r\rho_n)$. Значит, (25) вытекает из (26), (1) и леммы 2. Кроме того, в силу (12), (13) и леммы 4 при $n \to \infty$ выполняется $\ln m_L(r_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \Delta_k \ln \frac{r_n}{\rho_k} - 6\varphi^2(n) \geqslant \ln \mu_f((1+o(1))r_n) - 8\varphi^2(n)$ и, значит, ввиду (1) и (2) для всякого ε, $0 < \varepsilon < 1$, при больших n имеем

$$m_L(r_n) \geqslant \mu_f((1-\varepsilon)r_n). \tag{27}$$

Следовательно, как и в [8], (22) получаем из (27) и (23). Из (22) и леммы 5 следует, что $M_f(r) \leqslant M_L((1+o(1))r)$ при $r \to \infty$. Поэтому в силу (21) функция (20) удовлетворяет условию а) теоремы 1. Выполнимость условия в) следует из (23) и известного неравенства $rM_{L'}(r) \leqslant M_L((1+o(1))r)$ при $r \to \infty$. Справедливость б) вытекает из а) и (27). Лемма 6 и теорема 1 доказаны.

Пусть A_R, $0 < R \leqslant \infty$,— пространство функций, аналитических в круге $|z| < R$, с обычной топологией. Следующее утверждение показывает, что теорема 3 из [9] является точной для широкого класса целых функций f.

Теорема 2. *Для любой целой функции f такой, что $0 < \varkappa_n \uparrow \infty$, и любого R, $0 < R < \infty$, существует множество $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $|\lambda_n| \uparrow \infty$, различных комплексных чисел такое, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|f_n \prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right|} = 1/R$ и система $\{f(\lambda_n z)\}_{n=1}^{\infty}$ не будет полной ни в каком пространстве A_{R_1}, $R_1 > R$.*

Действительно, не уменьшая общности, можем считать, что $R = 1$. В силу леммы 6, теоремы об f-типе [5, 10] и теоремы 2 из [9] достаточно показать, что множество нулей $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ функции (20) удовлетворяет условию $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|f_n \prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right|} = 1$, а это так, ибо, обозначая $n = \min\{k : m \leqslant \tau_k\}$, в силу (7) имеем

$$\left|\prod_{k=1}^{m} \lambda_k\right| = 1/(\rho_1^{\Delta_1}\rho_2^{\Delta_2} \ldots \rho_{n-1}^{\Delta_{n-1}}\rho_n^{m-\tau_{n-1}}), \quad |f_m| = |f_0|/(\rho_1^{\Delta_1}\rho_2^{\Delta_2} \ldots \rho_{n-1}^{\Delta_{n-1}}\varkappa_{\tau_{n-1}+1} \times$$

$$\times \varkappa_{\tau_{n-1}+2} \ldots \varkappa_m) = \frac{|f_0|(1+o(1))^{m-\tau_{n-1}}}{\rho_1^{\Delta_1}\rho_2^{\Delta_2} \ldots \rho_{n-1}^{\Delta_{n-1}}\rho_n^{m-\tau_{n-1}}}, \quad m \to \infty.$$

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.— М. : Наука, 1976.— 536 с.
2. *Мельник Ю. И.* Представление аналитических в открытом круге функций рядами Дирихле.— В кн.: Математический сборник. Киев : Наук. думка, 1976, с. 80—82.
3. *Мельник Ю. И.* Об одной универсальной системе экспонент.— Укр. мат. журн., 1979, 31, № 2, с. 192—196.
4. *Валирон Ж.* Аналитические функции.— М. : Гостехтеоретиздат, 1957.— 235 с.
5. *Винницкий Б. В.* Об условиях сходимости последовательностей в некоторых пространствах аналитических функций.— Укр. мат. журн., 1982, 34, № 6, с. 741—744.

6. *Винницкий Б. В.* О представлении функций рядами $\sum_{n=1}^{\infty} D_n f(\lambda_n z)$.— Там же, 1979, **31**, № 3, с. 256—265.
7. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа : В 2-х т.— М. : Наука, 1978.— Т. 2. 431 с.
8. *Винницкий Б. В.* О представлении аналитических функций рядами $\sum_{n=1}^{\infty} D_n f(\lambda_n z)$.—Укр. мат. журн., 1979, **31**, № 6, с. 650—657.
9. *Винницкий Б. В.* О полноте системы $\{f(\lambda_n z)\}$. — Там же, 1984, **36**, № 5, с. 655—658.
10. *Boas R. P., Buck R. C.* Polynomial expansions of analytic functions.— Berlin : Springer, 1958.— 197 p.

Дрогобыч. пед. ин-т

Получено 22.12.84