УДК 517.5

А. И. Степанец, А. К. Новикова

Приближение периодических функций суммами Фурье в среднем

В работе [1] введены классы периодических функций следующим образом. Пусть $f(x)$ — суммируемая 2π-периодическая функция и

$$S[f] = a_0(f)/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;\ x) \qquad (1)$$

— ее ряд Фурье. Пусть, далее, $\psi(k)$ — произвольная фиксированная функция натурального аргумента и β — фиксированное действительное число, $\beta \in \mathbb{R}$. Предположим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} (a_k(f) \cos(kx + \beta\pi/2) + b_k(f) \sin(kx + \beta\pi/2)) \qquad (2)$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции. Эту функцию обозначим через $f_\beta^\psi(x)$, а множество функций, удовлетворяющих таким условиям, — через L_β^ψ.

Пусть еще $\mathfrak{N}$ — некоторый класс суммируемых 2π-периодических функций. Тогда, если $f \in L_\beta^\psi$ и, кроме того, $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N}$, то будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$.

Пусть $\mathfrak{N}$ совпадает с классом L_1 2π-периодических суммируемых функций $\varphi(t)$, для которых

$$\|\varphi(t)\|_L \leqslant 1. \tag{3}$$

В этом случае класс $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$ будем обозначать через $L_{\beta,1}^\psi$. Если $\mathfrak{N}$ совпадает с классом 2π-периодических суммируемых функций $\varphi(t)$, для которых

$$\|\varphi(x+t) - \varphi(x)\|_L \leqslant \omega(t), \tag{4}$$

где $\omega(t)$ — фиксированный (вообще говоря, произвольный) модуль непрерывности, т. е. $\mathfrak{N} = H_{\omega_L}$, то $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$ будем обозначать через $L_{\beta,1}^\psi H_{\omega_L}$.

Понятно, что значения $\psi(k)$ всегда можно считать значениями некоторой функции $\psi(v)$ непрерывного аргумента, определенной, например, при всех $v \geqslant 1$. В данной работе $\psi(v)$ — всегда выпуклая (вниз) при всех $v \geqslant 1$ функция и $\lim\limits_{v\to\infty}\psi(v) = 0$. Множество $\mathfrak{M}$ таких функций не однородно по скорости их убывания. В работе [2] предложено выделить из $\mathfrak{M}$ подмножества $\mathfrak{M}_C$, $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_\infty$ согласно следующей характеристике. Пусть $\psi \in \mathfrak{M}$ и $\eta(t) = \eta(\psi;\ t)$ — функция, связанная с ψ равенством

$$\psi(\eta(t)) = \psi(t)/2, \quad t \geqslant 1. \tag{5}$$

Отсюда в силу строгой монотонности функции $\psi(t)$ $\eta(t) = \eta(\psi;\ t)$ $\forall t \geqslant 1$ определяется однозначно:

$$\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2). \tag{6}$$

Положим

$$\mu(t) = \mu(\psi;\ t) = t(\eta(t) - t)^{-1}. \tag{7}$$

К множеству $\mathfrak{M}_C$ отнесем все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых найдутся такие положительные числа K_1 и K_2 (вообще, зависящие от ψ), что

$$0 < K_1 \leqslant \mu(\psi;\ t) \leqslant K_2 < \infty; \tag{8}$$

к множеству $\mathfrak{M}_0$ — функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых величина $\mu(\psi;\ t)$ ограничена сверху и неограничена снизу никаким положительным числом; к множеству $\mathfrak{M}_\infty$ — все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых величина $\mu(\psi;\ t)$ монотонно возрастает и неограничена сверху.

В случае, когда $\psi(u) = u^{-r}$, $r > 0$, классы $L_{\beta,1}^\psi$ и $L_{\beta,1}^\psi H_{\omega_L}$ совпадают с вейлевскими классами $W_\beta^r L$ и $W_\beta^r H_{\omega_L}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

В настоящей работе получены асимптотические равенства для величин

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi) = \sup_{f \in L_{\beta,1}^\psi} \|\rho_n(f;\ x)\|_L, \tag{9}$$

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi H_{\omega_L}) = \sup_{f \in L_{\beta,1}^\psi H_{\omega_L}} \|\rho_n(f;\ x)\|_L, \tag{10}$$

где $\rho_n(f;\ x) = f(x) - S_{n-1}(f;\ x)$, а $S_{n-1}(f;\ x)$ — частичная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$.

Обозначим через K абсолютные постоянные, вообще говоря, различные.

Теорема 1. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty$, $\mu(\psi;\ n) = n(\psi^{-1}(\psi(n)/2) - n)^{-1}$. *Тогда если* $f \in L_{\beta,1}^\psi$, *то почти для всех* x *и* $\forall n \in N$

$$\rho_n(f;\ x) = -\frac{\psi(n)}{\pi} \int\limits_{\mu(\psi;n) \leqslant |t| \leqslant n\pi} f_\beta^\psi(x + t/n)\, \frac{\sin(t + \beta\pi/2)}{t}\, dt + b_n(\psi), \tag{11}$$

где

$$\| b_n(\psi) \|_L \leqslant K\psi(n). \tag{12}$$

Если же $f \in L^{\psi}_{\beta,1} H_{\omega_L}$, *то почти для всех* x *и* $\forall n \in N$

$$\rho_n(f;\ x) = \frac{\psi(n)}{\pi} \int\limits_{\mu(\psi;n) \leqslant |t| \leqslant n\pi} \varphi(x,\ t/n) \frac{\sin(t + \beta\pi/2)}{t}\, dt + d_n(\psi), \tag{13}$$

где

$$\varphi(x,\ t/n) = f^{\psi}_{\beta}(x) - f^{\psi}_{\beta}(x + t/n), \tag{14}$$

$$\| d_n(\psi) \|_L \leqslant K\psi(n)\, \omega(1/n). \tag{15}$$

Чтобы доказать эту теорему, достаточно повторить все рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 2 из работы [3] (§2) и учесть при этом свойства функций $\psi \in \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty$ (см. [2], § 1).

Пусть t_k, $k = 0, 1, \ldots,$ — неотрицательные нули $\sin nt$, т. е. $t_k = k\pi/n$, x_k — нули функции $\cos nt$, $x_k = (k + 1/2)\pi/n$. Выберем номер k' из условия

$$x_{k'-1} < \frac{\mu(\psi;\ n)}{n} \leqslant x_{k'}. \tag{16}$$

Пусть, далее, $l_n(t)$ — нечетная функция, которая при $t \in (x_{k'},\ x_{n-1})$ определяется равенством $l_n(t) = t_{k+1}$, $t \in [x_k,\ x_{k+1})$, $k = k',\ k' + 1, \ldots,\ n - 2$. Производя необходимые оценки, нетрудно убедиться, что

$$\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1}) = \frac{\psi(n)}{\pi} \sup_{\varphi \in L_1} \Bigg\| \int\limits_{x_{k'} \leqslant |t| \leqslant x_{n-1}} \varphi(x + t) \frac{\sin nt}{l_n(t)}\, dt \Bigg\|_L + O_1(1)\, \psi(n), \tag{17}$$

$$\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1} H_{\omega_L}) = \frac{\psi(n)}{\pi} \sup_{\varphi \in H_{\omega_L}} \Bigg\| \int\limits_{x_{k'} \leqslant |t| \leqslant x_{n-1}} (\varphi(x) - \varphi(x + t)) \frac{\sin nt}{l_n(t)}\, dt \Bigg\|_L + $$

$$+ O_1(1)\, \psi(n)\, \omega(1/n), \tag{18}$$

где $O_1(1)$ — величина, равномерно ограниченная в интегральной метрике по n и по β.

Из соотношения (17) и определения функции $l_n(t)$ видно, что

$$\Bigg\| \int\limits_{x_{k'} \leqslant |t| \leqslant x_{n-1}} \varphi(x+t) \frac{\sin nt}{l_n(t)}\, dt \Bigg\|_L = \Bigg\| \sum_{k=k'}^{n-2} \frac{1}{t_{k+1}} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (\varphi(x+t) + \varphi(x-t)) \sin nt\, dt \Bigg\|_L. \tag{19}$$

Поэтому

$$\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1}) \leqslant \frac{\psi(n)}{\pi} \sum_{k=k'}^{n-2} \frac{1}{t_{k+1}} \left(\sup_{\varphi \in L_1} \Bigg\| \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x + t) \sin nt\, dt \Bigg\|_L + \right.$$

$$\left. + \sup_{\varphi \in L_1} \Bigg\| \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \psi(x - t) \sin nt dt \Bigg\|_L \right) + O_1(1)\, \psi(n). \tag{20}$$

Далее,

$$\sup_{\varphi \in L_1} \Bigg\| \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x + t) \sin nt\, dt \Bigg\|_L \leqslant \sup_{\varphi \in L_1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |\varphi(x + t)|\, |\sin nt|\, dt dx \leqslant 2/n.$$

Аналогично

$$\sup_{\varphi \in L_1} \Bigg\| \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x - t) \sin nt\, dt \Bigg\|_L \leqslant 2/n.$$

Следовательно,

$$\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1}) \leqslant \frac{4\psi(n)}{\pi n}\sum_{k=k'}^{n-2}\frac{1}{t_{k+1}} + O_1(1)\psi(n). \tag{21}$$

Покажем, что на самом деле соотношение (21) обращается в равенство. С учетом следствия из леммы 4 работы [3] в случае, когда

$$K_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin nt}{l_n(t)}, & x_{k'} \leqslant |t| \leqslant x_{n-k'-1}; \\ 0, & |t| \leqslant x_{k'}, \quad x_{n-k'-1} \leqslant |t| \leqslant \pi, \end{cases} \tag{22}$$

получаем

$$\mathscr{E}(K_n) \overset{\text{df}}{=} \sup_{\varphi\in L^0}\left\| \int_{-\pi}^{\pi} y(t-x)K_n(t)\,dt \right\|_L \geqslant \frac{1}{2}\| K_n^*(x) -$$

$$- K_n^*(x+\pi/n)\|_L = \frac{4}{n}\sum_{k=k'}^{n-2} 1/t_{k+1}, \tag{23}$$

где $L^0 = \left\{ y(t) : \| y(t)\|_L \leqslant 1, \ \int_{-\pi}^{\pi} y(t)\,dt = 0 \right\}$, а через $K_n^*(t)$ обозначено 2π-периодическое продолжение функции $K_n(t)$. Следовательно,

$$\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1}) \geqslant \frac{4}{\pi n}\psi(n)\sum_{k=k'}^{n-2}\frac{1}{t_{k+1}} + O_1(1)\psi(n). \tag{24}$$

Сопоставляя соотношения (21) и (24), а также замечая, что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=k'}^{n-2} 1/t_{k+1} = \frac{1}{\pi}\ln^{+}\pi(\eta(n)-n) + O(1), \tag{25}$$

(см. например, [1, с. 41]), приходим к такому утверждению.

Теорема 2. *Пусть* $\psi\in\mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty$. *Тогда при* $n\to\infty$

$$\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1}) = \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\ln^{+}\pi(\eta(n)-n) + O_1(1)\psi(n), \tag{26}$$

где $\eta(n) = \eta(\psi;\ n) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(n)\right)$, $O_1(1)$ — *величина, равномерно ограниченная в интегральной метрике по* n *и* β.

Переходя к отысканию асимптотического равенства для величин $\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1}H_{\omega_L})$, замечаем, что

$$\left\| \int_{x_{k'}\leqslant|t|\leqslant x_{n-1}} (\varphi(x)-\varphi(x+t))\frac{\sin nt}{l_n(t)}\,dt \right\|_L =$$

$$= \left\| \sum_{k=k'}^{n-2}\frac{1}{t_{k+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (\varphi(x+t)+\varphi(x-t))\sin nt dt \right\|_L. \tag{27}$$

Поэтому

$$\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1}H_{\omega_L}) \leqslant \frac{\psi(n)}{\pi}\left(\sum_{k=k'}^{n-2}\frac{1}{t_{k+1}}\left(\sup_{\varphi\in H_{\omega_L}}\left\|\int_{x}^{x_{k+1}}\varphi(x+t)\sin nt dt\right\|_L + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sup_{\varphi\in H_{\omega_L}}\left\|\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(x-t)\sin nt dt\right\|_L\right)\right) + O_1(1)\psi(n)\,\omega(1/n).$$

Далее,

$$\sup_{\varphi\in H_{\omega_L}}\left\|\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(x+t)\sin nt dt\right\|_L=\sup_{\varphi\in H_{\omega_L}}\left\|\int\limits_{x_k}^{t_{k+1}}\varphi(x+t)\sin nt dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t_{k+1}}^{x_{k+1}}\varphi(x+t)\sin nt dt\right\|_L. \tag{28}$$

Сделав замену переменной во втором интеграле правой части (28), получим

$$\sup_{\varphi\in H_{\omega_L}}\left\|\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(x+t)\sin nt dt\right\|_L\leqslant\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega(2t)\sin nt dt.$$

Аналогично

$$\sup_{\varphi\in H_{\omega_L}}\left\|\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(x-t)\sin nt dt\right\|_L\leqslant\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega(2t)\sin nt dt.$$

Следовательно,

$$\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1}H_{\omega_L})\leqslant\frac{2\psi(n)}{n\pi}\sum_{k=k'}^{n-2}\frac{1}{t_{k+1}}\int\limits_0^{\pi/2}\omega(2t/n)\sin t dt+O_1(1)\psi(n)\omega(1/n). \tag{29}$$

Покажем теперь, что в случае, когда $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, соотношение (29) обращается в равенство. Для этого достаточно показать, что в классе H_{ω_L} найдется функция $\varphi^*_\omega(x)$, для которой значение правой части (27) совпадает со значением правой части (29). С этой целью сначала положим

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}\omega(2t)/4, & t\in[0,\ \pi/(2n));\\ -\omega(2t)/4, & t\in(-\pi/(2n),\ 0];\\ 0, & \pi/(2n)\leqslant|t|\leqslant\pi\end{cases} \tag{30}$$

и через $\varphi_2(t)$ обозначим 2π-периодическое продолжение функции $\varphi_1(t)$. Искомая функция $\varphi^*(t)=\varphi^*_\omega(t)$ будет представляться равенством $\varphi^*(t)=\varphi_2'(t)$. Чтобы в этом убедиться, следует показать, что $\varphi^*_\omega(t)\in H_{\omega_L}$ и для нее выполняется равенство

$$\mathscr{T}_n(\varphi^*_\omega,\ x)\overset{\mathrm{df}}{=}\left\|\int\limits_{x_{k'}\leqslant|t|\leqslant x_{n-1}}(\varphi(x)-\varphi(x+t))\frac{\sin nt}{l_n(t)}dt\right\|_L=$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{k=k'}^{n-2}\frac{1}{t_{k+1}}\int\limits_0^{\pi/2}\omega(2t/n)\sin t dt. \tag{31}$$

Если $t\in[0,\ \pi/n]$, то разность $\Delta_t\varphi^*(x)=\varphi^*(x+t)-\varphi^*(x)$ на промежутке $(-t-\pi/(2n),\ -t/2)$ отрицательна и при остальных $x\in[-\pi,\ \pi]$ равна нулю. Поэтому

$$\|\varphi^*(x+t)-\varphi^*(x)\|_L=\int\limits_{-t-\pi/(2n)}^{-t/2}\Delta_t(x)dx-\int\limits_{-t/2}^{\pi/(2n)}\Delta_t(x)dx=4\varphi_2(t/2)=\omega(t). \tag{32}$$

Если же $t\in[\pi/n,\ \pi]$, то, очевидно,

$$\|\varphi^*(x+t)-\varphi^*(x)\|_L=4\int\limits_0^{\pi/(2n)}\varphi_2'(t)dt=\omega(\pi/n)\leqslant\omega(t).$$

Итак, $\varphi^* \in H_{\omega_L}$. Докажем равенство (31). Имеем

$$\left\| \int_{-x_{n-1}}^{-x_{k'}} \varphi^*(x+t)\frac{\sin nt}{l_n(t)}\,dt + \int_{x_{k'}}^{x_{n-1}} \varphi^*(x+t)\frac{\sin nt}{l_n(t)}\,dt \right\|_L =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \left| \int_{x_{k'}}^{x_{n-1}} (\varphi^*(x+t)+\varphi^*(x-t))\frac{\sin nt}{l_n(t)}\,dt \right| dx.$$

При $x \in (0, \pi)$ и $t \in [x_{k'}, x_{n-1})$ $\pi/(2n) < x+t < x_{n-1}+\pi = 2\pi - \pi/(2n)$. Значит в этом случае $\varphi^*(x+t) = 0$ и поэтому

$$\| \mathscr{T}_n(\varphi_\omega^*, x)\|_L = 2\int_0^{\pi} \left| \int_{x_{k'}}^{x_{n-1}} \varphi^*(x-t)\frac{\sin nt}{l_n(t)}\,dt \right| dx.$$

Функция

$$\Phi(x) = \int_{x_{k'}}^{x_{n-1}} \varphi^*(x-t)\frac{\sin nt}{l_n(t)}\,dt$$

в точках $t_i = i\pi/n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, обращается в нуль:

$$\Phi(t_i) = \int_{x_{k'}}^{x_{n-1}} \varphi^*(t_i - t)\frac{\sin nt}{l_n(t)}\,dt = \frac{(-1)^i}{t_i}\int_{-\pi/(2n)}^{\pi/(2n)} \varphi^*(t)\sin t\,dt = 0,$$

и на промежутке $[0, \pi]$ других нулей не имеет. При этом $\operatorname{sign}\Phi(x) = (-1)^i$, $x \in (t_i, t_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots n-1$. Стало быть,

$$\| \mathscr{T}_n(\varphi_\omega^*, x)\|_L = 2\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \int_{x_{k'}}^{x_{n-1}} \frac{\sin nt}{l_n(t)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi^*(x-t)\,dx\,dt. \tag{33}$$

Но

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi^*(x-t)\,dx = \varphi_2(t_{i+1}-t) - \varphi_2(t_i - t).$$

Значит,

$$\| \mathscr{T}_n(\varphi_\omega^*, x)\|_L = \frac{2}{\pi}\sum_{k=k'}^{n-2} \frac{1}{t_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (\varphi_2(t_{i+1}-t) - \varphi_2(t_i - t))\sin nt\,dt. \tag{34}$$

Если $t \in [x_k, x_{k+1}]$, то $t_i - t \in [t_i - x_{k+1}, t_i - x_k] \overset{\text{df}}{=} \Delta_{k,i}$. При $i = k+1$ $\Delta_{k,k+1} = [-\pi/(2n), \pi/(2n)]$, при других значениях $i = \overline{1, n-1}$, отрезки $\Delta_{k,i}$ и $\Delta_{k,k+1}$ не пересекаются. Поэтому

$$-\int_{x_k}^{x_{k+1}} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \varphi_2(t_i - t)\sin nt\,dt = (-1)^k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_2(t_{k+1} - t)\sin nt\,dt$$

и

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \varphi_2(t_{i+1} - t)\sin nt\,dt = (-1)^k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_2(t_{k+1} - t)\sin nt\,dt.$$

Подставляя эти выражения в (34), находим

$$\| \mathcal{T}_n (\varphi_\omega^*,\ x) \|_L = 4 \left(\int_{-\pi/(2n)}^{\pi/(2n)} \varphi_2 (t) \sin ntdt \right) \sum_{k=k'}^{n-2} 1/t_{k+1} =$$

$$= \frac{2}{n} \left(\int_0^{\pi/2} \omega (2t/n) \sin tdt \right) \sum_{k=k'}^{n-2} 1/t_{k+1},$$

т. е. получаем равенство (31).

Если же $\omega (t)$ — произвольный (не обязательно выпуклый) модуль непрерывности, то воспользуемся известным утверждением С. Б. Стечкина (см. [4, с. 78]), согласно которому для любого модуля непрерывности $\omega (t)$ можно указать выпуклый модуль $\omega^* (t)$ такой, что $\omega(t) > 1/2\omega^* (t) \overset{\text{df}}{=} \omega^*(t) \geqslant \geqslant 1/2\, \omega (t)$. Функция $\varphi^*_{\omega^*} (t)$, построенная для модуля $\omega^* (t)$, принадлежит классу $H_{\omega^*_L}$ и для нее будет выполнено равенство (31), вследствие которого имеем

$$\| \mathcal{T}_n (\varphi^*_{\omega^*};\ x) \|_L \geqslant \frac{1}{n} \left(\int_0^{\pi/2} \omega (2t/n) \sin tdt \right) \sum_{k=k'}^{n-2} 1/t_{k+1}. \tag{35}$$

Объединяя соотношения (10), (29)—(35), и учитывая (25), приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_\infty$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\mathcal{E}_n (L^\psi_{\beta,1} H_{\omega_L}) = \frac{2}{\pi^2} \Theta_n \psi (n) \ln^+ \pi (\eta (n) - n) \int_0^{\pi/2} \omega (2t/n) \sin tdt + O_1(1)\ \psi(n) \omega(1/n), \tag{36}$$

где $\eta (n) = \eta (\psi;\ n) = \psi^{-1} (\psi (n)/2)$, $O_1 (1)$ — *величина, равномерно ограниченная в интегральной метрике по* n *и* β; $1/2 \leqslant \Theta_n \leqslant 1$; *при этом* $\Theta_n = 1$, *если модуль непрерывности* $\omega (t)$ *выпуклый вверх на отрезке* $[0,\ \pi/n]$.

При $\psi (u) = u^{-r}$, $r>0$, $\eta (u) = (u^{-r}/2)^{-1/r} = 2^{1/r} u$. В этом случае утверждения теорем 2 и 3 известны (см. [5, 6]).

1. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и приближение их суммами Фурье.— Киев, 1983.— 57 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 83.69).
2. *Степанец А. И.* Приближение суммами Фурье функций с медленно убывающими коэффициентами Фурье.— В кн.: Приближение периодических функций суммами Фурье. Киев, 1984, с. 3—25. (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 84.43).
3. *Степанец А. И., Новикова А. К.* Приближение периодических функций суммами Фурье в интегральной метрике.— Там же, с. 26—54.
4. *Ефимов А. В.* Линейные методы приближения непрерывных периодических функций.— Мат. сб., 1961, 54, № 1, с. 51—90.
5. *Стечкин С. Б., Теляковский С. А.* О приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в метрике L.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1967, 88, с. 20—29.
6. *Демченко А. Г.* О приближении в среднем периодических функций : Автореф. дис. ... ...канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1974.— 9 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев,
Киев. политехн. ин-т

Получено 17.09.84