УДК 518:517.944/947

В. Л. Макаров, В. Л. Бурковская

К оценке сходимости метода прямых для уравнений параболического типа

Введение. В работах [1 — 3] для уравнений параболического типа с решениями из $W_2^{2,1}(Q_T)$ в прямоугольнике получены оценки скорости сходимости метода прямых, согласованные с гладкостью решения исходной дифференциальной задачи. Эти оценки имеют второй порядок точности относительно шага сетки h и равномерны по t.

Цель данной работы — получить оценки скорости сходимости метода прямых для указанного уравнения такого же порядка по h при ослабленных условиях на гладкость начальных данных. При этом получающиеся оценки зависят от времени.

В п. 1 приведена постановка дифференциальной задачи, а также известные результаты о гладкости ее решения (теоремы 1, 2). Кроме того, сформулирована необходимая в дальнейшем теорема об оценке погрешности приближенного решения однородного уравнения параболического типа.

В п. 2 рассмотрен метод прямых решения поставленной задачи. При условии принадлежности начальных данных классу $L_2(\Omega)$ для неоднородного уравнения параболического типа получена оценка скорости сходимости метода прямых порядка $O(h^2/t)$.

1. Постановка задачи и вспомогательные утверждения. Пусть требуется найти решение задачи

$$\partial u/\partial t + Au = f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T,\quad u|_\Gamma = 0,\quad t\in(0,T),\quad u|_{t=0} = g(x),\quad x\in\Omega, \tag{1}$$

где $x=(x_1,x_2)$, Ω — прямоугольник, $\Omega=\{(x_1,x_2): 0<x_1<a,\ 0<x_2<b\}$, Γ — граница Ω, $Q_T=\Omega\times(0,T)$, T — положительная константа, $f(x,t)$ — заданная функция, A — эллиптический оператор,

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i(x,t)\,u\right) + \sum_{i=1}^{2} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x,t)\,u.$$

Пусть коэффициенты оператора A такие, что $a_{ij}=a_{ji}$ и

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{2} a_i^2} < \mu,\quad \sqrt{\sum_{i=1}^{2} b_i^2} < \mu,\quad |a| < \mu, \tag{2}$$

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x,t)\,\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2,\quad \nu,\ \mu=\mathrm{const}>0. \tag{3}$$

Относительно существования и единственности обобщенного решения задачи (1) справедливы следующие теоремы.

Теорема 1 [4]. *Задача* (1) *однозначно разрешима в классе* $W_2^{2,1}(Q_T)$, *если* $f = f_0 + \partial f_i/\partial x_i \in L_2(Q_T)$, $g(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ *и* $\partial a_{ij}/\partial x_h$, a, $b\in L_2(Q_T)$.

Теорема 2 [4]. *Задача* (1) *однозначно разрешима в классе* $W_2^{1,0}(Q_T)$ *при любых* $f_0\in L_{2,1}(Q_T)$, $f_i\in L_2(Q_T)$ *и если для коэффициентов уравнения* (1) *выполнены условия* (2), (3).

Для приближенного решения задачи (2) используем полудискретную аппроксимацию (дискретную только по x).

Пусть ω — сеточная аппроксимация области Ω, а γ — ее граница.

Рассмотрим далее H_h — конечномерное гильбертово пространство функций дискретного аргумента, определенных на ω и обращающихся в нуль на γ, со скалярным произведением $(y,u)=\sum_{x\in\omega} h_1h_2 y(x)\,u(x)$ и нормой $\|u\|_{0,\omega}=(u,u)^{1/2}$.

Для приближенного решения задачи (1) построим следующую схему метода прямых:

$$\Lambda^{-1}\partial u_h/\partial t + u_h = \Lambda^{-1}P_hf,\quad (x,t)\in\omega\times(0,T),\quad u_h|_\gamma = 0,\quad t\in(0,T),$$

$$u_h|_{t=0} = P_hg, \tag{4}$$

где P_h — некоторый линейный оператор из $L_2(\Omega)\to H_h$, $\Lambda — H_h\to H_h$.

Теорема 3. *Пусть оператор* Λ^{-1} *такой, что для него выполнены* условия

$$(X, \Lambda^{-1}X) > 0 \quad \forall X \in H_h, \tag{5}$$

$$\| (\Lambda^{-1}P_h - P_h A^{-1}) f_1 \|_{0,\omega} \leqslant ch^2 \| f_1 \|_{0,\Omega}. \tag{6}$$

Тогда если $g(x) \in L_2(\Omega)$ *и* $f(x, t) \equiv 0$, *то для погрешности схемы метода прямых* (4) *справедлива оценка*

$$\| P_h u - u_h \|_{0,\omega} \leqslant ch^2 t^{-1} \| g \|_{0,\Omega}. \tag{7}$$

Теорема 3 переносит результаты работы [5] на случай конечно-разностной аппроксимации оператора A.

2. Метод прямых. Оценка скорости сходимости. Для численного решения задачи (1) используем метод прямых. В качестве оператора A возьмем оператор Лапласа

$$A = -\Delta = -\partial^2/\partial x_1^2 - \partial^2/\partial x_2^2. \tag{8}$$

Введем в рассмотрение сетку $\bar\omega$, для простоты равномерную по обеим пространственным переменным: $\bar\omega = \bar\omega_1 \times \bar\omega_2$, $\bar\omega_\alpha = \{x_\alpha = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha,\ h_1 = a/N_1,\ h_2 = b/N_2\}$, $\alpha = 1, 2$, $\omega = \Omega \cap \bar\omega$, $\gamma = \bar\omega \setminus \omega$. В дальнейшем нам понадобятся операторы точных разностных схем, определенные в работе [1]:

$$T^{x_1} u(\cdot, x_2, t) = \frac{1}{h_1^2} \left[\int\limits_{x_1 - h_1}^{x_1} (\xi_1 - x_1 + h_1)\, u(\xi_1, x_2, t)\, d\xi_1 + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{x_1}^{x_1 + h_1} (x_1 + h_1 - \xi_1)\, u(\xi_1, x_2, t)\, d\xi_1 \right]. \tag{9}$$

Аналогично определяется оператор T^{x_2}. Обозначим

$$T^x u = T^{x_1} T^{x_2} u. \tag{10}$$

Операторы точных разностных схем имеют следующие свойства:

$$T^{x_\alpha} (\partial^2 v/\partial x_\alpha^2) = v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad \forall v(x) \in W_2^\lambda(\Omega),\ \lambda > 1,$$

$$T^{x_\alpha}(v(x)) = v(x), \quad \forall v(x) \in \pi_1,$$

где π_1 — множество многочленов первой степени.

Для задачи (1), (8) с помощью операторов точных разностных схем (9) запишем следующую схему метода прямых:

$$dv/dt = \Lambda v + T^x f, \quad (x, t) \in \omega \times (0, T), \quad v|_\gamma = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$v|_{t=0} = T^x g, \quad x \in \omega, \tag{11}$$

где $-\Lambda v = v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2}$.

Пусть $f(x, t) \in L_2(Q_T)$, $g(x) \in L_2(\Omega)$. По теореме 2 решение задачи (1), (8) $u(x, t) \in W_2^{1,0}(Q_T)$. Методика получения оценок скорости сходимости, разработанная в [1—3], для такого класса гладкости позволяет получить оценки скорости сходимости схемы метода прямых (11) порядка $O(h)$, где $h = \max(h_1, h_2)$.

Не повышая требований на гладкость начальных данных, получим оценки скорости сходимости метода прямых второго порядка точности по h.

С этой целью разобьем исходную задачу (1), (8) на две:

$$\partial u_1/\partial t + Au_1 = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad u_1|_\Gamma = 0, \quad t \in (0, T), \quad u_1|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega \tag{12}$$

и

$$\partial u_2/\partial t + Au_2 = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad u_2|_\Gamma = 0, \quad t \in (0, T), \quad u_2|_{t=0} = g(x), \quad x \in \Omega. \tag{13}$$

Решение исходной задачи в силу линейности представимо в виде $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$. Запишем для задачи (12) с помощью операторов точных разностных схем следующую схему метода прямых:

$$dv_1/dt + \Lambda v_1 = T^x f, \quad (x, t) \in \omega \times (0, T), \quad v_1|_\gamma = 0, \quad t \in (0, T),$$
$$v_1|_{t=0} = 0, \quad x \in \omega. \tag{14}$$

Так как функция $f(x, t) \in L_2(Q_T)$, то по теореме 1 $u_1(x, t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$ и для погрешности $z_1 = v_1 - T^x u_1$ схемы (14) справедлива оценка скорости сходимости [1, 2]

$$\| z_1(t) \|_{L_2(\omega)} \leqslant ch^2 \| u_1(t) \|_{W_2^2(\Omega)}, \quad t \in (0, T). \tag{15}$$

Здесь и ниже через c обозначены константы, не зависящие от h и u_1,

$$\| z_1(t) \|_{L_2(\omega)} = \| z_1(t) \|_{0,\omega} = \Big(\sum_{x \in \omega} h_1 h_2 z_1^2(x) \Big)^{1/2}, \quad \| u_1(t) \|_{W_2^2(\Omega)} = \| u_1(t) \|_{2,\Omega} =$$
$$= \Big\{ \iint_\Omega [u_1^2(t) + (\partial u_1/\partial x_1)^2 + (\partial u_1/\partial x_2)^2 + (\partial^2 u_1/\partial x_1^2)^2 + 2\partial^2 u_1/(\partial x_1 \partial x_2) +$$
$$+ (\partial^2 u_1/\partial x_2^2)^2] \, dx_1 dx_2 \Big\}^{1/2}, \quad \| f(t) \|_{0,\Omega} = \Big(\iint_\Omega f^2 dx_1 dx_2 \Big)^{1/2}.$$

Из неравенства (14) на основании второго энергетического неравенства для параболических уравнений [4] имеем

$$\| z_1(t) \|_{0,\omega} \leqslant ch^2 \| f(t) \|_{0,\Omega}. \tag{16}$$

Перейдем к решению задачи (13). Запишем для нее аналогично предыдущему схему метода прямых:

$$dv_2/dt + \Lambda v_2 = 0, \quad (x, t) \in \omega \times (0, T), \quad v_2|_\gamma = 0, \quad t \in (0, T),$$
$$v_2|_{t=0} = T^x g, \quad x \in \omega. \tag{17}$$

Рассмотрим погрешность $z_2 = v_2 - T^x u_2$ схемы (17) для решения задачи (13). Так как операторы A^{-1}, Λ^{-1} существуют, ограничены, то задачу для погрешности z_2 с использованием уравнения (13) можно представить в виде

$$\Lambda^{-1} dz_2/dt + z_2 = (T^x A^{-1} - \Lambda^{-1} T^x) \, du_2/dt, \quad (x, t) \in \omega \times (0, T), \quad z_2|_\gamma = 0,$$
$$t \in (0, T), \quad z_2|_{t=0} = 0, \quad x \in \omega. \tag{18}$$

Оценим погрешность решения задачи (13).

Теорема 4. *Пусть* $g(x) \in L_2(\Omega)$. *Тогда для приближенного решения задачи* (13) *схемой метода прямых* (17) *справедлива оценка погрешности*

$$\| z_2(t) \|_{0,\omega} \leqslant ch^2 t^{-1} \| g \|_{0,\Omega}, \quad t \in (0, T). \tag{19}$$

Доказательство теоремы будет состоять в проверке выполнения условий теоремы 3 для задачи (13). Прежде всего отметим, что Λ^{-1} — положительно определенный оператор. Значит, условие (5) выполнено. Далее убедимся, что для задачи (18) выполнено условие (6).

Так как в случае задачи (17) оператор $P_h = T^x$, то необходимо показать, что $\| (\Lambda^{-1} T^x - T^x A^{-1}) f_1 \|_{0,\omega} \leqslant ch^2 \| f_1 \|_{0,\Omega}$ $\forall f_1 \in L_2(\Omega)$. Пусть $f_1(x) \in L_2(\Omega)$, тогда решение эллиптической дифференциальной задачи $Au = f_1$ с нулевыми краевыми условиями принадлежит пространству $\overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)$ [4] и имеет вид

$$u = A^{-1} f_1. \tag{20}$$

Спроектировав это решение в узлы равномерной сетки с помощью оператора T^x, получим $T^x u = T^x A^{-1} f_1$, $x \in \omega$.

Рассмотрим разностную схему для эллиптической дифференциальной задачи $Au = f_1$. $\Lambda v = T^x f_1$, $x \in \omega$; $v|_\gamma = 0$. Известно [3], что если $u \in W_2^2(\Omega)$, то для погрешности $z = v - T^x u$ справедлива оценка $\| z \|_{0,\omega} \leqslant ch^2 \| u \|_{W_2^2(\Omega)}$. Отсюда на основании второго энергетического неравенства для эллиптических уравнений [4] имеем

$$\| z \|_{0,\omega} \leqslant ch^2 \| f_1 \|_{0,\Omega}. \tag{21}$$

Но $z = v - T^x u = \Lambda^{-1} T^x f_1 - T^x A^{-1} f_1$. Тогда из (21) следует выполнение условия (6).

Итак, для задачи (13) выполнены все условия теоремы 3. Тогда на основании теоремы 3 для погрешности схемы метода прямых (17) справедлива оценка

$$\| z_2(t) \|_{0,\omega} \leqslant ch^2 t^{-1} \| g \|_{0,\Omega}, \quad t \in (0, T). \tag{22}$$

Теорема доказана.

Теперь можно получить оценку погрешности для задачи (1), (8).

Теорема 5. *Пусть* $f(x, t) \in L_{2,1}(Q_T)$, $g(x) \in L_2(\Omega)$. *Тогда скорость сходимости схемы метода прямых* (11) *для задачи* (1), (8) *характеризуется оценкой*

$$\| z(t) \|_{0,\omega} \leqslant ch^2 (\| f(t) \|_{0,\Omega} + t^{-1} \| g \|_{0,\Omega}), \quad t \in (0, T). \tag{23}$$

Доказательство. Так как погрешность задачи (1), (8) в силу линейности равна $z(t) = z_1(t) + z_2(t)$, то из оценок погрешностей задач (12), (13) следует оценка погрешности задачи (1), (8). Из оценок (15), (22) имеем

$$\| z(t) \|_{0,\omega} \leqslant ch^2 (\| f(t) \|_{0,\Omega} + t^{-1} \| g \|_{0,\Omega}), \quad t \in (0, T). \tag{24}$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Аналогичные оценки могут быть получены для оператора A большей размерности.

Замечание 2. Результаты работы можно распространить на случай оператора A, зависящего от времени и со смешанными производными.

Замечание 3. Такая же оценка справедлива для квазилинейного уравнения при условии, что нелинейность удовлетворяет условию Липшица.

1. *Макаров В. Л., Самарский А. А.* Применение разностных схем к оценке скорости сходимости метода прямых.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1980, **20**, № 2, с. 371—387.
2. *Лазаров Р. Д., Макаров В. Л.* Сходимость метода сеток и метода прямых для многомерных задач математической физики в классах обобщенных решений.— Докл. АН СССР, 1981, **259**, № 2, с. 282—286.
3. *Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., Самарский А. А.* Применение точных разностных схем для построения и исследования разностных схем на обобщенных решениях.— Мат. сб., 1982, **117**, № 4, с. 469—480.
4. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.— М. : Наука, 1973.— 407 с.
5. *By Huang Mingyou, Vidar Thomee.* Some convergence estimates for simidiserete type schemes for time dependent norselfadjoint parabolic equations.— Math. Comput., 1981, **37**, N 156, p. 63—91.

Киев. ун-т

Получено 27.03.84,
после доработки — 25.06.85

Рассмотрим разностную схему для эллиптической дифференциальной задачи $Au = f_1$. $\Lambda v = T^x f_1$, $x \in \omega$; $v|_\gamma = 0$. Известно [3], что если $u \in W_2^2(\Omega)$, то для погрешности $z = v - T^x u$ справедлива оценка $\| z \|_{0,\omega} \leqslant ch^2 \| u \|_{W_2^2(\Omega)}$. Отсюда на основании второго энергетического неравенства для эллиптических уравнений [4] имеем

$$\| z \|_{0,\omega} \leqslant ch^2 \| f_1 \|_{0,\Omega}. \tag{21}$$

Но $z = v - T^x u = \Lambda^{-1} T^x f_1 - T^x A^{-1} f_1$. Тогда из (21) следует выполнение условия (6).

Итак, для задачи (13) выполнены все условия теоремы 3. Тогда на основании теоремы 3 для погрешности схемы метода прямых (17) справедлива оценка

$$\| z_2(t) \|_{0,\omega} \leqslant ch^2 t^{-1} \| g \|_{0,\Omega}, \quad t \in (0, T). \tag{22}$$

Теорема доказана.

Теперь можно получить оценку погрешности для задачи (1), (8).

Теорема 5. *Пусть* $f(x, t) \in L_{2,1}(Q_T)$, $g(x) \in L_2(\Omega)$. *Тогда скорость сходимости схемы метода прямых* (11) *для задачи* (1), (8) *характеризуется оценкой*

$$\| z(t) \|_{0,\omega} \leqslant ch^2 (\| f(t) \|_{0,\Omega} + t^{-1} \| g \|_{0,\Omega}), \quad t \in (0, T). \tag{23}$$

Доказательство. Так как погрешность задачи (1), (8) в силу линейности равна $z(t) = z_1(t) + z_2(t)$, то из оценок погрешностей задач (12), (13) следует оценка погрешности задачи (1), (8). Из оценок (15), (22) имеем

$$\| z(t) \|_{0,\omega} \leqslant ch^2 (\| f(t) \|_{0,\Omega} + t^{-1} \| g \|_{0,\Omega}), \quad t \in (0, T). \tag{24}$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Аналогичные оценки могут быть получены для оператора A большей размерности.

Замечание 2. Результаты работы можно распространить на случай оператора A, зависящего от времени и со смешанными производными.

Замечание 3. Такая же оценка справедлива для квазилинейного уравнения при условии, что нелинейность удовлетворяет условию Липшица.

1. *Макаров В. Л., Самарский А. А.* Применение разностных схем к оценке скорости сходимости метода прямых.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1980, **20**, № 2, с. 371—387.
2. *Лазаров Р. Д., Макаров В. Л.* Сходимость метода сеток и метода прямых для многомерных задач математической физики в классах обобщенных решений.— Докл. АН СССР, 1981, **259**, № 2, с. 282—286.
3. *Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., Самарский А. А.* Применение точных разностных схем для построения и исследования разностных схем на обобщенных решениях.— Мат. сб., 1982, **117**, № 4, с. 469—480.
4. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.— М. : Наука, 1973.— 407 с.
5. *Bу Huang Mingyou, Vidar Thomee.* Some convergence estimates for simidiserete type schemes for time dependent norselfadjoint parabolic equations.— Math. Comput., 1981, **37**, N 156, p. 63—91.

Киев. ун-т

Получено 27.03.84,
после доработки — 25.06.85