УДК 517.947.5.37

Б. И. Кнюх

О представлении и граничных значениях решений однородного дифференциально-операторного уравнения второго порядка

1. На полуоси $(0, \infty)$ рассмотрим уравнение

$$y''(t) + p(A)\, y'(t) + q(A)\, y(t) = 0, \tag{1}$$

где $y(t)$ — вектор-функция со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, A — неотрицательный самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, $q(\lambda)$ и $p(\lambda)$ — некоторые многочлены.

Под сильным решением (с. р.) уравнения (1) на $(0, \infty)$ понимается вектор-функция $(0, \infty) \in t \to y(t) \in \mathfrak{H}$, дважды сильно непрерывно дифференцируемая на $(0, \infty)$, такая, что при каждом $t \in (0, \infty)$ $y(t) \in D(q(A))$, $y'(t) \in D(p(A))$ ($D(q(A))$ и $D(p(A))$ — области определения операторов $q(A)$ и $p(A)$) и удовлетворяющая на $(0, \infty)$ уравнению (1).

В настоящей статье устанавливается общий вид с. р. на $(0, \infty)$ уравнения (1) и представление решений из определенных классов, которые характеризуются поведением решения в окрестности нуля. Попутно рассматривается вопрос о граничных значениях с. р. В случае $q(\lambda) = -\lambda^2$, $p(\lambda) = 0$ подобные вопросы для с. р. (1) на полуоси и на конечном интервале исследованы в [1, 4].

2. Пусть $G(\lambda) \geqslant c$, $0 < c = \mathrm{const}$,— непрерывная на $[0, \infty)$ функция. На области определения $D(G(A))$ оператора $G(A)$ введем скалярное произведение $(f, g)_G = (G(A) f, G(A) g)$ ($(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathfrak{H}$). При этом $D(G(A))$ превратится в гильбертово пространство, которое обозначим $\mathfrak{H}_G$. Оно является позитивным в смысле [5] пространством относительно $\mathfrak{H}$. Пространство, сопряженное к $\mathfrak{H}_G$ относительно $\mathfrak{H}$, обозначим $\mathfrak{H}'_G$.

В случае $G(\lambda) = 1 + \lambda^\tau$, $\tau > 0$, $\mathfrak{H}_\tau = \mathfrak{H}_{1+\lambda^\tau}$, $\mathfrak{H}_{-\tau} = \mathfrak{H}'_{1+\lambda^\tau}$, $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$. Обозначим $\mathfrak{H}_\infty = \lim\limits_{\tau\to\infty} \mathrm{pr}\, \mathfrak{H}_\tau$, $\mathfrak{H}_{-\infty} = \lim\limits_{\tau\to\infty} \mathrm{ind}\, \mathfrak{H}_{-\tau}$.

При $G_{\alpha,\beta}(\lambda) = \exp(\alpha\lambda^{1/\beta})$, $\alpha, \beta > 0$, пространства $\mathfrak{G}_{\{\beta\}} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \operatorname{ind} \mathfrak{H}_{G_{\alpha,\beta}}$, $\mathfrak{G}_{(\beta)} = \lim\limits_{\alpha\to\infty} \operatorname{pr} \mathfrak{H}_{G_{\alpha,\beta}}$ называются классами Жевре типа Румье и Берлинга соответственно порядка β, порожденными оператором A [6]. Пространства антилинейных непрерывных функционалов над $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}$ и $\mathfrak{G}_{(\beta)}$ обозначим $\mathfrak{G}'_{\{\beta\}}$ и $\mathfrak{G}'_{(\beta)}$ соответственно. Для произвольного $\beta > 0$ справедливы включения

$$\mathfrak{G}_{(\beta)} \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta\}} \subseteq \mathfrak{H}_\infty \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}_{-\infty} \subseteq \mathfrak{G}'_{\{\beta\}} \subseteq \mathfrak{G}'_{(\beta)}.$$

Согласно [4] сужение $A|_{\mathfrak{E}}$ оператора A на множество $\mathfrak{E}(A) = \{E_\Delta f$, $f \in \mathfrak{H}$, Δ — конечный промежуток$\}$ (E_λ — разложение единицы оператора A) допускает замыкание в пространстве $\mathfrak{H}'_G$ до самосопряженного неотрицательного оператора $\hat{A}_G \supseteq A$.

3. Наряду с (1) будем рассматривать соответствующее ему характеристическое уравнение

$$\omega^2 + p(\lambda)\omega + q(\lambda) = 0. \tag{2}$$

Если $\omega_j(\lambda)$, $j = 1, 2$, — корни (2), то они являются непрерывными на $[0, \infty)$ функциями и при $\lambda \to \infty$ $\omega_j(\lambda) \sim c_j\lambda^{\nu_j}$ [7]. Пусть при этом $\operatorname{Re}\omega_j(\lambda) \sim r_j\lambda^{\rho_j}$. Положим

$$R_j(\lambda) = \begin{cases} -\operatorname{Re}\omega_j(\lambda), & \text{если } r_j < 0,\ \rho_j > 0; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$R(\lambda) = \max_{j=1,2}\{R_j(\lambda)\},\quad G_R(\lambda) = \exp(R(\lambda)),\quad \hat{A} = \hat{A}_{G_R}.$$

Не уменьшая общности, будем считать, что $\nu_1 \geqslant \nu_2$. Если (2) имеет кратный при всех $\lambda \in [0, \infty)$ корень, то будем обозначать его $\omega(\lambda)$.

Спектр оператора A обозначим через $\sigma(A)$, и для упрощения доказательств предполагаем в дальнейшем, что он дискретный (т. е. резольвента оператора A — вполне непрерывный оператор).

Теорема 1. *Пусть $\omega_1(\lambda) \neq \omega_2(\lambda)$ для $\lambda \in \sigma(A)$ и $c_1 \neq c_2$ при $\nu_1 = \nu_2$. Вектор-функция $y(t)$ является с. р. уравнения (1) на $(0, \infty)$ тогда и только тогда, когда она представляется в виде*

$$y(t) = \exp(\omega_1(\hat{A})t)f_1 + \exp(\omega_2(\hat{A})t)f_2, \tag{3}$$

где $f_j \in \mathfrak{G}'_{\{1/\rho_j\}}$, если $r_j < 0$, $\rho_j > 0$; $f_j \in \mathfrak{G}_{(1/\rho_j)}$, если $r_j > 0$, $\rho_j > 0$; $f_j \in \mathfrak{H}_{\tau_j}$, если $r_j = 0$ или $\rho_j \leqslant 0$ ($\tau_1 = 2\nu_1$, $\tau_2 = \nu_1 + \nu_2$).

Доказательство. Пусть вектор-функция $y(t)$ представляется в виде (3). Подобно тому, как это делалось для $\exp(-\hat{A}t)f$ ($f \in \mathfrak{G}'_{\{1\}}$) в [4], доказывается, что вектор-функции $\exp(\omega_j(\hat{A})t)f_j$ (с f_j из соответствующих пространств) являются с. р. уравнения (1) на $(0, \infty)$. Следовательно, таковым является и $y(t)$.

Пусть $\sigma(A) = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{H}$, состоящий из собственных векторов оператора A, $y(t)$ — некоторое с. р. уравнения (1) на $(0, \infty)$. Представим $y(t)$ в виде $y(t) = \sum\limits_{k=1}^\infty y_k(t)e_k$, где $y_k(t) = (y(t), e_k)$ — некоторые решения скалярных уравнений

$$y''_k(t) + p(\lambda_k)y'_k(t) + q(\lambda_k)y_k(t) = 0$$

т. е. $y(t) = \sum\limits_{k=1}^\infty (\exp(\omega_1(\lambda_k)t)f_{1k} + \exp(\omega_2(\lambda_k)t)f_{2k})e_k$, где f_{jk} — некоторые постоянные. Так как для $t \in (0, \infty)$ $y(t) \in D(q(A))$, а также для почти всех $t \in (0, \infty)$ $y'(t) \in D(\omega_j(A))$ (что легко следует из теоремы о промежуточных производных [8] с учетом асимптотики $\omega_j(\lambda)$ и соотношений между $\omega_1(\lambda)$,

$\omega_2(\lambda)$ и $q(\lambda)$, $p(\lambda)$), то для почти всех $t \in (0, \infty)$ $\omega_j(A) y'(t) - q(A) y(t) \in \in \mathfrak{H}$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\omega_j(\lambda_k) \Omega(\lambda_k)|^2 \exp(2\mathrm{Re}\, \omega_j(\lambda_k) t) |f_{jk}|^2 < \infty \tag{4}$$

для почти всех (а следовательно, и для всех) $t \in (0, \infty)$. В (4) $\Omega(\lambda) = \omega_2(\lambda) - \omega_1(\lambda)$.

Если $r_j < 0$, $\rho_j > 0$ то из (4), учитывая, что $\mathrm{Re}\, \omega_j(\lambda) \sim r_j \lambda^{\rho_j}$, получаем $\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\alpha \lambda_k^{\rho_j}) |f_{jk}|^2 < \infty$ для всех $\alpha > 0$, т. е. $f_j \in \mathfrak{G}'_{\{1/\rho_j\}}$ $\left(f_j = \sum_{k=1}^{\infty} f_{jk} e_k\right)$.

Если $r_j > 0$, $\rho_j > 0$, то из (4) получим $\sum_{k=1}^{\infty} \exp(\alpha \lambda_k^{\rho_j}) |f_{jk}|^2 < \infty$ для всех $\alpha > 0$, т. е. $f_j \in \mathfrak{G}_{(1/\rho_j)}$.

Пусть теперь $r_j = 0$ или $\rho_j \leqslant 0$, т. е. $\mathrm{Re}\, \omega_j(\lambda)$ ограничена на $[0, \infty)$. Так как $|\omega_j(\lambda) \Omega(\lambda)| \sim \mathrm{const}\, \lambda^{\tau_j}$, то из (4) следует $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{\tau_j} f_{jk}|^2 < \infty$, т. е. $f_j \in \mathfrak{H}_{\tau_j}$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Если уравнение* (2) *имеет кратный при всех* $\lambda \in \sigma(A)$ *корень, то вектор-функция* $y(t)$ *является с. р. уравнения* (1) *на* $(0, \infty)$ *тогда и только тогда, когда она представляется в виде*

$$y(t) = \exp(\omega(\hat{A}) t) f_1 + t \exp(\omega(\hat{A}) t) f_2, \tag{5}$$

где f_1, $f_2 \in \mathfrak{G}'_{\{1/\rho\}}$, *если* $r < 0$, $\rho > 0$; $f_1, f_2 \in \mathfrak{G}_{(1/\rho)}$, *если* $r > 0$, $\rho > 0$; $f_1, f_2 \in \mathfrak{H}_{2\nu}$, *если* $r = 0$ *или* $\rho \leqslant 0$ (ν — *показатель степени в асимптотике* $\omega(\lambda)$, r *и* ρ — *коэффициент и показатель степени в асимптотике* $\mathrm{Re}\, \omega(\lambda)$).

Из теорем 1 и 2 получаем такое следствие.

Следствие 1. *Если вещественные части корней характеристического уравнения являются неограниченными на* $[0, \infty)$ *функциями, то всякое с. р. уравнения* (1) *на* $(0, \infty)$ *есть аналитическая на* $(0, \infty)$ *функция.*

4. Из теорем 1 и 2 вытекает, что если на поведение с. р. уравнения (1) на $(0, \infty)$ в достаточно малой окрестности нуля не налагать никаких ограничений, то при $t \to 0$ эти решения будут принимать граничные значения в пространстве основных или обобщенных элементов в зависимости от того, в каких пространствах лежат f_1, f_2.

В случае $\Omega(\lambda) = \omega_2(\lambda) - \omega_1(\lambda) \neq 0$ на $\sigma(A)$ и $c_1 \neq c_2$ при $\nu_1 = \nu_2$ введем следующие классы решений: K — класс с. р. уравнения (1) на $(0, \infty)$, для которых

$$\sup_{0<t\leqslant\delta} \| y(t) \| < \infty, \quad \sup_{0<t\leqslant\delta} \| \Omega^{-1}(\hat{A}) y'(t) \| < \infty, \quad \delta > 0; \tag{6}$$

K_γ — класс с. р. уравнения (1) на $(0, \infty)$, для которых

$$\int_0^\delta \gamma(t) \| y(t) \|^2 \mathrm{dt} < \infty, \quad \int_0^\delta \gamma(t) \| \Omega^{-1}(\hat{A}) y'(t) \|^2 \mathrm{dt} < \infty \tag{7}$$

($\gamma(t)$ — неотрицательная суммируемая на $(0, \delta]$ функция).

Из теоремы 1 следует, что если оба корня характеристического уравнения имеют ограниченные снизу вещественные части, то классы K и K_γ совпадают с классом всех с. р. уравнения (1) на $(0, \infty)$, поэтому этот тривиальный случай интересовать нас в дальнейшем не будет.

Если вещественная часть корня характеристического уравнения $\omega_j(\lambda)$ неограничена снизу, то положим

$$G_j(\lambda) = \left(\int_0^\delta \gamma(t) \exp(2\mathrm{Re}\, \omega_j(\lambda) t) \mathrm{dt}\right)^{-1/2}$$

и по $G_j(\lambda)$ построим цепочку $\mathfrak{H}_{G_j} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}'_{G_j}$. Рассмотрим вектор-функцию $y_j(t) = \exp(\omega_j(\hat{A})t) f_j$, $f_j \in \mathfrak{G}'_{\{1/\rho_j\}}$, являющуюся по теореме 1 с. р. уравнения (1) на $(0, \infty)$. Очевидно, для $y_j(t)$ из K (K_γ) второе из условий (6) (7)) является следствием первого.

Используя методику доказательств работы [4], нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 3. $y_j(t) \in K$ (K_γ) *тогда и только тогда, когда* $f_j \in \mathfrak{H}$ $(\mathfrak{H}'_{G_j})$.

Таким образом, если характеристическое уравнение имеет только один корень с неограниченной снизу вещественной частью — $\omega_j(\lambda)$, то из теоремы 3 вытекает такое следствие.

Следствие 2. $y(0) \in \mathfrak{H}$ $(\mathfrak{H}'_{G_j})$ *тогда и только тогда, когда* $y(t) \in$ $\in K$ (K_γ).

Пусть теперь вещественные части каждого из корней характеристического уравнения неограничены снизу.

Теорема 4. $y(t) \in K$ (K_γ) *тогда и только тогда, когда* $f_1, f_2 \in \mathfrak{H}$ $(f_j \in \mathfrak{H}'_{G_j}, j = 1, 2)$.

Доказательство теоремы легко получить из теоремы 3, если учесть что при условиях, налагаемых на корни характеристического уравнения, операторы $\omega_1(\hat{A})\Omega^{-1}(\hat{A})$, $\omega_2(\hat{A})\Omega^{-1}(A)$ ограничены, а также имеют место, соотношения $\exp(\omega_1(\hat{A})t)f_1 = \omega_2(\hat{A})\Omega^{-1}(\hat{A})y(t) - \Omega^{-1}(\hat{A})y'(t)$, $\exp(\omega_2(\hat{A})t)f_2 = -\omega_1(\hat{A})\Omega^{-1}(\hat{A})y(t) + \Omega^{-1}(\hat{A})y'(t)$.

Положив в теореме 4 $\gamma(t) = t^{2\alpha-1}$, получим следствие.

Следствие 3. $f_1, f_2 \in \mathfrak{H}_{-\infty}$ *тогда и только тогда, когда существуют постоянные* α, d_1, $d_2 > 0$ *такие, что для всех* t *из достаточно малой окрестности нуля выполняются неравенства*

$$\| y(t) \| \leqslant d_1 t^{-\alpha}, \quad \| \Omega^{-1}(\hat{A}) y'(t) \| \leqslant d_2 t^{-\alpha}.$$

Доказательство этого следствия проводится подобно доказательству аналогичного результата для вектор-функции $\exp(-\hat{A}t)f$, $f \in \mathfrak{G}'_{\{1\}}$, в [4] с учетом приведенных выше выражений $\exp(\omega_j(\hat{A})t)f_j$, $j = 1, 2$, через $y(t)$ и $y'(t)$.

1. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* О граничных значениях решений однородных дифференциальных уравнений.— Докл. АН СССР, 1976, 228, № 5, с. 1021—1024.
2. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Некоторые вопросы спектральной теории дифференциальных уравнений эллиптического типа в пространстве вектор-функций на конечном интервале.— Укр. мат. журн., 1976, 28, № 1, с. 12—26.
3. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Некоторые вопросы спектральной теории дифференциальных уравнений эллиптического типа в пространстве вектор-функций.— Там же, № 3, с. 313—324.
4. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные значения решений некоторых классов дифференциальных уравнений.— Мат. сб., 1977, 101, № 1, с. 124—150.
5. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 650 с.
6. *Горбачук В. И.* О пространствах бесконечно дифференцируемых векторов неотрицательного самосопряженного оператора.— Укр. мат. журн., 1983, 35, № 5, с. 617—621.
7. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций : В 2-х т.— М. : Наука, 1968.— т. 2. 624 с.
8. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М. : Мир, 1971.— 371 с.

Ин-т техн. теплофизики АН УССР, Киев

Получено 24.07.84,
после доработки — 29.03.85