УДК 518:517.944/947

С. А. Войцеховский, В. Л. Макаров, Т. Г. Шаблий

Об оценке скорости сходимости разностных решений к обобщенным решениям задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца из класса $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ в выпуклой области

В работе [1] для уравнения Гельмгольца с условием Дирихле в выпуклом многоугольнике Ω построена разностная схема, которая на произвольной неравномерной сетке $\hat{\omega}$ в сеточной норме $L_2(\hat{\omega})$ имеет точность $O(h)$ если решение исходной задачи $u(x)$ принадлежит пространству $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

В настоящей статье рассматривается случай, когда Ω — произвольная выпуклая область с границей $\Gamma \in C^2$. С помощью операторов точных разностных схем построена разностная схема, решение которой сходится к решению исходной задачи со скоростью $O(h^{1/2})$ в сеточной норме $L_2(\omega)$.

1. Рассмотрим задачу

$$-\Delta u(x) + q(x)u(x) = F(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

где $F(x) = f_0(x) + \sum\limits_{\alpha=1}^{2} \partial f_\alpha/\partial x_\alpha$, $f_\alpha(x) \in L_2(\Omega)$, $\alpha = \overline{0, 2}$, $q(x) \in L_\infty(\Omega)$ и $q(x) \geqslant 0$.

Из результатов работы [2] следует, что решение (обобщенное) задачи (1), (2) существует, единственно, принадлежит пространству $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ и для него справедлива априорная оценка

$$\| u \|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant M \| F \|_\Omega, \qquad \| F \|_\Omega = \sum_{\alpha=0}^{2} \| f_\alpha \|_{L_2(\Omega)}. \tag{3}$$

Через M здесь и в дальнейшем будем обозначать константы, которые не зависят от f_α, $\alpha = \overline{0, 2}$, и h.

Покроем плоскость x_1Ox_2 квадратной сеткой E_h. Обозначим через Ω_h максимальный выпуклый многоугольник с вершинами в узлах сетки, содержащийся в $\overline{\Omega}$. Пусть Γ_h — граница области Ω_h, $\omega = E_h \cap \Omega_h$, $\gamma = E_h \cap \Gamma_h$, $\overline{\omega} = \omega \cup \gamma$.

В области Ω_h рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$-\Delta v(x) + q(x) v(x) = F(x), \quad x \in \Omega_h, \tag{4}$$

$$v(x) = 0, \quad x \in \Gamma_h. \tag{5}$$

Задача (4), (5) однозначно разрешима в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_h)$, и для ее решения справедлива оценка [2]

$$\| v \|_{W_2^1(\Omega_h)} \leqslant M \| F \|_{\Omega_h}. \tag{6}$$

Лемма 1. *Решение задачи* (4), (5) *сходится при* $h \to 0$ *к решению задачи* (1), (2), *при этом справедлива оценка*

$$\| v - u \|_{L_2(\Omega_h)} \leqslant M h^{1/2} \| F \|_{\Omega}. \tag{7}$$

Доказательство. Для погрешности $w(x) = v(x) - u(x)$ имеем задачу $-\Delta w + qw = 0$, $x \in \Omega_h$, $w(x) = -u(x)$, $x \in \Gamma_h$. Используя оценку [3] $\| w \|_{L_2(\Omega_h)} \leqslant M \| u \|_{L_2(\Gamma_h)}$ и неравенство [4, 5] $\| u \|_{L_2(\Gamma_h)} \leqslant M h^{1/2} \| u \|_{W_2^1(\Omega)}$, находим $\| v - u \|_{L_2(\Omega_h)} \leqslant M h^{1/2} \| u \|_{W_2^1(\Omega)}$. Отсюда, учитывая (3), получаем (7). Лемма доказана.

2. Задачу (4), (5) будем аппроксимировать на сетке $\bar{\omega}$ следующей разностной схемой:

$$-y_{\bar{x}_1 x_1} - y_{\bar{x}_2 x_2} + T_1 T_2(q) y = T_1 T_2(F), \quad x \in \omega, \tag{8}$$

$$y(x) = 0, \quad x \in \gamma, \tag{9}$$

где T_α — операторы точных разностных схем [6],

$$T_\alpha u(x) = \int_{-1}^{0} (1 + t) u(x_1 + (2 - \alpha) t h_1, \quad x_2 + (\alpha - 1) t h_2)\, dt +$$

$$+ \int_{0}^{1} (1 - t) u(x_1 + (2 - \alpha) t h_1, \quad x_2 + (\alpha - 1) t h_2)\, dt, \quad \alpha = 1, 2.$$

При построении разностной схемы (8), (9) в предконтурных узлах, примыкающих к наклонным участкам границы Γ_h, функция $q(x)$ была продолжена четным, а функция $F(x)$ — нечетным образом относительно границы области Ω_h. Поясним, что понимается под нечетным продолжением функции $F(x)$. Пусть для простоты Ω_1 — равнобедренный прямоугольный треугольник с единичными катетами. Тогда под нечетным продолжением функции $F(x)$ на область Ω_2 (дополнение области Ω_1 до единичного квадрата) будем понимать такую функцию $F_1(x)$, для которой справедливо интегральное тождество

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} F_1(x) \eta(x)\, dx = \int_{\Omega_1} F(x) \tilde{\eta}(x)\, dx \quad \forall \eta(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_1 \cup \Omega_2),$$

где $\tilde{\eta}(x) = \eta(x) - \eta(1 - x_2, 1 - x_1)$. За продолженными функциями мы сохраняем прежние обозначения.

Нетрудно показать, что разностная задача (8), (9) однозначно разрешима. Исследуем ее скорость сходимости. Для погрешности $z = y - \bar{v}$ имеем задачу

$$-z_{\bar{x}_1 x_1} - z_{\bar{x}_2 x_2} + T_1 T_2(q) z = -\eta^{(1)}_{\bar{x}_1 x_1} - \eta^{(2)}_{\bar{x}_2 x_2} + \psi_0(x), \quad x \in \omega, \tag{10}$$

$$z(x) = 0, \quad x \in \gamma, \tag{11}$$

где $\psi_0(x) = T_1 T_2(qv) - T_1 T_2(q) \bar{v}$, $\quad \eta^{(\alpha)} \equiv \eta^{(\alpha)}(x) = T_{3-\alpha}(v) - \bar{v}$, $\quad \alpha = 1, 2$. Решение $v(x)$, как функция из $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_h)$, может быть не определено в узлах сетки $\bar{\omega}$. Поэтому будем сравнивать сеточное решение $y(x)$ с некоторым усреднением $\bar{v}(x)$ решения $v(x)$ по области малого диаметра. В дальнейшем будем считать, что $\bar{v}(x)$ определяется следующим образом:

$$\bar{v}(x) = \begin{cases} T_1 T_2(v), & x \in \omega, \\ 0, & x \in \gamma. \end{cases}$$

Заметим, что в (10) функция $v(x)$ нечетным образом продолжается относительно границы области Ω_h. За продолженной функцией сохраняем прежнее обозначение.

Обозначим через $\overset{0}{H}_h$ пространство сеточных функций, определенных на сетке $\bar{\omega}$ и равных нулю на γ. Введем в $\overset{0}{H}_h$ скалярное произведение и норму $(y, v) = \sum\limits_{x\in\omega} h^2 y(x) v(x)$, $\| y \| = (y, y)^{1/2}$.

Установим априорную оценку для решения задачи (10), (11). Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Lambda w \equiv -w_{\bar{x}_1 x_1} - w_{\bar{x}_2 x_2} + T_1 T_2(q) w = z, \quad x \in \omega, \quad w(x) = 0, \quad x \in \gamma.$$

Умножим уравнение (10) скалярно на $w(x)$, воспользуемся формулами суммирования по частям. Тогда, учитывая равенство $(\Lambda z, w) = (z, \Lambda w) = \| z \|^2$, получаем

$$\| z \|^2 \leqslant M (\| \eta^{(1)} \| + \| \eta^{(2)} \| + \| \psi_0 \| + \| \eta^{(1)} \|_{L_2(\gamma)} + \| \eta^{(2)} \|_{L_2(\gamma)}) \| w \|_{W_2^2(\omega)}, \quad (12)$$

где $\| y \|^2_{L_2(\gamma)} = \sum\limits_{x\in\gamma} h y^2(x)$.

Используя разностный аналог второго основного неравенства для эллиптических операторов [7], в силу которого $\| w \|_{W_2^2(\omega)} \leqslant M \| \Lambda w \|$, из (12) имеем

$$\| z \| \leqslant M \left(\sum_{\alpha=1}^{2} (\| \eta^{(\alpha)} \| + \| \eta^{(\alpha)} \|_{L_2(\gamma)}) + \| \psi_0 \| \right). \quad (13)$$

Воспользовавшись леммой Брэмбла — Гильберта [8], получим оценки норм функционалов $\eta^{(\alpha)}(x)$, $\alpha = 1, 2$, и $\psi_0(x)$:

$$\| \eta^{(\alpha)} \| \leqslant Mh \| v \|_{W_2^1(\Omega_h)}, \quad \alpha = 1, 2, \quad \| \psi_0 \| \leqslant Mh \| v \|_{W_2^1(\Omega_h)},$$

$$\| \eta^{(\alpha)} \|_{L_2(\gamma)} \leqslant Mh^{1/2} \| v \|_{W_2^1(\Omega_h)}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Подставляя последние оценки в (13) и учитывая (6), находим

$$\| z \| \leqslant Mh^{1/2} \| F \|_{\Omega_h}.$$

Таким образом, справедлива следующая лемма.

Л е м м а 2. *Решение разностной задачи* (8), (9) *сходится при* $h \to 0$ *к решению задачи* (4), (5), *при этом выполняется оценка*

$$\| y - \bar{v} \|_{L_2(\omega)} \leqslant Mh^{1/2} \| F \|_{\Omega_h}.$$

Из леммы 1 и 2 сразу следует такая теорема.

Т е о р е м а. *Решение разностной задачи* (8), (9) *сходится при* $h \to 0$ *к решению задачи* (1), (2), *причем справедлива оценка скорости сходимости*

$$\| y - \bar{u} \|_{L_2(\omega)} \leqslant Mh^{1/2} \| F \|_{\Omega}.$$

1. *Об оценке* скорости сходимости разностных решений к обобщенным решениям задачи Дирихле для уравнений Гельмгольца в выпуклом многоугольнике / С. А. Войцеховский, В. Л. Макаров, А. А. Самарский, Т. Г. Шаблий.— Докл. АН СССР, 1983, 273, № 5, с. 1040—1044.
2. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М. : Наука, 1973.— 586 с.
3. *Нечас И.* О решении эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с неограниченным интегралом Дирихле.— Чехосл. мат. журн., 1960, **10**, № 2, с. 283—298.
4. *Оганесян Л. А., Руховец Л. А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений.— Ереван : Изд-во АН АрмССР, 1979.— 252 с.
5. *Bramble J. H., Duport T., Thomee V.* Projection methods for Dirichlet's problem in approximating polygonal domains with boundary — value corrections.— Math. Comp. 1972, 27, N 120, p. 869—879.
6. *Макаров В. Л., Самарский А. А.* Применение точных разностных схем к оценке скорости сходимости метода прямых.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1980, **20**, № 2, с. 381—397.
7. *Дрыя М.* Априорные оценки в W_2^2 в выпуклой области для систем разностных эллиптических уравнений.— Там же, 1972, **12**, № 6, с. 1595—1601.
8. *Bramble J. H., Hilbert S. R.* Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation.— Numer. Math., 1971, **16**, N 4, p. 362—369.

Киев. ун-т

Получено 19.04.84
после доработки — 29.08.85