УДК 517.52

В. М. Чевский

О некоторых неравенствах для алгебраических полиномов

Настоящая статья делится по своему содержанию на две части. В первой части статьи по коэффициентам произвольного алгебраического полинома n-й степени находятся области, содержащие по меньшей мере один нуль этого полинома. Во второй части статьи на основании полученных результатов дается оценка сверху некоторых комбинаций алгебраических полиномов и их логарифмических производных. При этом доказаны неравенства, аналогичные неравенствам, полученным В. И. Смирновым и Н. А. Лебедевым (см. [1] гл. V).

1. Итак, пусть $P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$, $a_n \neq 0$,—произвольный алгебраический полином n-й степени с нулями $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Запишем полином в виде $P_n(z) = (-1)^n a_n \prod\limits_{i=1}^{n}(1 - z/z_i)$. Разложим при достаточно малом по модулю z логарифмическую функцию в степенной ряд, производя при этом несложные преобразования: $\ln P_n(z) = \ln(-1)^n a_n + \sum\limits_{i=1}^{n} \ln(1 - z/z_i) = \ln(-1)^n a_n - \frac{s_1}{1} z - \frac{s_2}{2} z^2 - \ldots - \frac{s_m}{m} z^m - \ldots$, где $s_m = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i^{-m}$ — степенные суммы величин, обратных нулям полинома $P_n(z)$. Дифференцируя левую и правую части равенства m раз и полагая $z = 0$, получаем формулу для вычисления степенных сумм: $s_m = -1/(m-1)!\, d^m \ln P_n(z)/dz^m$. Величина s_m выражается через коэффициенты полинома $P_n(z)$. Равенство $s_m = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i^{-m}$ можно записать следующим образом:

$$(z_1^{-m} - s_m/n) + (z_2^{-m} - s_m/n) + \ldots + (z_n^{-m} - s_m/n) = 0.$$

Так как сумма чисел, стоящих в скобках, равна нулю, то любая прямая l, проходящая через начало координат, разделяет соответствующие точки $\omega_i = z_i^{-m} - s_m/n$, т. е. либо внутри каждой полуплоскости, ограниченной этой прямой, содержится по меньшей мере одна из точек ω_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, либо все они расположены на самой прямой. Обозначим через θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, угол, отсчитываемый против часовой стрелки от оси ординат до прямой l. Ось ординат разделяет точки $\omega_i e^{i\theta}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, поэтому либо среди них найдутся точки, удовлетворяющие каждому из неравенств $\mathrm{Re}\,\omega e^{i\theta} > 0$, $\mathrm{Re}\,\omega e^{i\theta} < 0$, либо все они удовлетворяют равенству $\mathrm{Re}\,\omega e^{i\theta} = 0$, т. е. находятся на оси ординат. Прообразом оси ординат на плоскости z служит линия $L_m(\theta)$, определяемая уравнением $\mathrm{Re}(z^{-m} - s_m/n)e^{i\theta} = 0$. Полагая $z = \nu e^{i\varphi}$, записываем уравнение линии $L_m(\theta)$ в полярных координатах: $\nu^m \cos(\theta + \arg s_m) = n/|s_m| \cos(m\varphi - \theta)$. Мы получили уравнение семейства m-лепестковых роз, зависящих от параметра θ, причем каждая из них независимо от параметра проходит через начало координат и точки $\alpha_k = \sqrt[m]{n/|s_m|}\, e^{i\varphi_k}$ $\varphi_k = (-\arg s_m + 2k\pi)/m$.

Обозначим через $B_m(\theta)$ конечную открытую m-связную область, ограниченную m-лепестковой розой, и через $B_m^1(\theta)$ дополнение замкнутой области $\overline{B_m}(\theta)$ до расширенной плоскости. Сформулируем полученный выше результат в виде теоремы.

Теорема 1. *В каждой из областей $B_m(\theta)$ и $B_m^1(\theta)$ содержится по меньшей мере по одному нулю произвольного алгебраического полинома n-й степени или все нули расположены на линии $L_m(\theta)$, ограничивающей эти области.*

Рассмотрим пример. Пусть $P_4(z) = z^4 - 1$, тогда $s_4 = 1^{-4} + (-1)^{-4} + i^{-4}(-i) = 4$. Уравнение четырехлепестковой розы запишется в виде $r^4 \cos\theta = \cos(\theta - 4\varphi)$. Нули полиномов $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = i$, $z_4 = -i$ расположены на самой линии $L_4(\theta)$.

Пусть теперь z — произвольная фиксированная точки комплексной плоскости, отличная от нулей $z_1, z_2, \ldots, z_n$ полинома $P_n(z)$, и $\xi = \rho e^{i\psi}$ — новая переменная величина. Нулями полинома $P_n(z+\xi)$ n-й степени от переменной ξ являются, очевидно, точки $\xi_k = z_k - z$, где $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Согласно формуле (2) степенные суммы $s_m(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} (z_k - z)^{-m}$ вычисляем по формуле $s_m(z) = -1/(m-1)!\, d^m \ln P_n(z+\xi)/d\xi^m|_{\xi=0} = -1/(m-1)!\, d^m \ln P_n(z)/dz^m$. Семейство m-лепестковых роз, разделяющих точки $z_k - z$, согласно формулам (4) и (5) определяется уравнением $\mathrm{Re}(\xi^{-m} - s_m(z)/n)\, e^{i\theta} = 0$ или же уравнением в полярных координатах $\rho^m \cos[\theta + \arg s_m(z)] = n\,|s_m^{-1}(z)|\cos(\theta - m\psi)$. Каждая m-лепестковая роза $L_m(\theta, z)$ имеет центром симметрии начало координат и проходит через точки $\beta_j = \sqrt[m]{n\,|s_m^{-1}(z)|}\, e^{i\psi_j}$, $\psi_j = (-\arg s_m(z) + 2j\pi)/m$.

Обозначим через $B_m(\theta, z)$ конечную открытую m-связную область, ограниченную линией $L_m(\theta, z)$, и через $B_m^1(\theta, z)$ — дополнение замкнутой области $\overline{B}_m(\theta, z)$ до расширенной плоскости. Через $L_m(\theta, z) + z$ обозначим m-лепестковую розу, получаемую из $L_m(\theta, z)$ параллельным смещением на вектор z. Тогда $B_m(\theta, z) + z$ и $B_m^1(\theta, z) + z$ будут области, полученные из областей $B_m(\theta, z)$ и $B_m^1(\theta, z)$ также параллельным смещением на вектор z. Так как линия $L_m(\theta, z)$ разделяет нули $z_k - z$ полинома $P_n(z+\xi)$, то, очевидно, линия $L_m(\theta, z) + z$ разделяет нули полинома $P_n(z)$. Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2. *В каждой из областей $B_m(\theta, z) + z$, $B_m^1(\theta, z) + z$ содержится по меньшей мере по одному нулю произвольного алгебраического полинома n-й степени, в противном случае все нули полинома находятся на границе $L_m(\theta, z) + z$ этих областей.*

Замечание. Если $m = 1$, то уравнение $r\cos(\theta + \arg s_1) = -n\,|s_1^{-1}\cos(\theta - \varphi)$ представляет собой семейство окружностей, проходящих при любом значении θ через точки z и $\xi_z = z - nP_n/P_n^1$, и мы получаем известную теорему Лагерра [1, с. 69].

Следствие 1. *Внутри каждого круга с центром в точке z и радиусом $\rho_m = \sqrt[m]{n\,|s_m^{-1}(z)|}$ содержится по меньшей мере один нуль произвольного алгебраического полинома n-й степени, в противном случае все нули полинома находятся на границе круга. Обозначим, далее, через K_R круг $|z| < R$; через $K_{R+|c|}$ — круг $|z| \leqslant R + |c|$, где C — произвольное постоянное комплексное число; через $Q_{mn}(z)$ — алгебраический полином $Q_{mn}(z) = P_n(z)\left[n + \dfrac{c^m}{(m-1)!}\dfrac{d^m \ln P_n(z)}{dz^m}\right]$ степени mn и через $\varphi(z)$ — функцию $\varphi(z) = n - c^m s_m(z)$.*

Следствие 2. *Если все нули полинома $P_n(z)$ содержатся в круге K_R, то все нули полинома $Q_{mn}(z)$ содержатся в круге $K_{R+|c|}$.*

Доказательство. Если в некоторой точке $P_n(z_0) = 0$ и $Q_{mn}(z_0) = 0$, то, очевидно, $|z| \leqslant R + |c|$. Утверждение также очевидно при $c = 0$. Пусть теперь $\varphi(z_0) = n - c^m s_m(z_0) = 0$, тогда $s_m(z_0) = n/c^m$ и $\rho_m = |c|$. Если $z_0 \in K^1_{R+|c|}$, т. е. $|z_0| \geqslant R + |c|$, то в круге с центром в точке z_0 и радиусом $\rho_m = |c|$ нет ни одного нуля полинома $P_n(z)$, что противоречит следствию. Обозначим через K_α открытый круг с центром в начале координат и радиусом $\alpha = R/2 + \sqrt{R^2/4 + |c|}$; через $R_{mn}(z)$ алгебраический полином $R_{mn}(z) = P_n^m(z)\left[nz^m + \dfrac{c^m}{(m-1)!}\dfrac{d^m \ln P_n(z)}{dz^m}\right]$ степени mn и через $\psi(z)$ функцию $\psi(z) = nz^m - c^m s_m(z)$.

Следствие 3. *Если все нули полинома $P_n(z)$ содержатся в круге K_R, то все нули полинома $R_{mn}(z)$ содержатся* в круге K_α.

Доказательство. Утверждение очевидно в случае, когда $c=0$ и $P_n(z_0)=0$. Пусть теперь $\psi(z_0)=nz_0^m-c^m s_m(z_0)=0$. Тогда $s_m(z_0)=nz_0^m c^{-m}$ и радиус $\rho_m=|c\|z_0^{-1}|$. Допустим, что $|z_0|\geqslant R/2+\sqrt{R^2/4+|c|}$. В этом случае выполняются неравенства $|z_0|-\rho_m\geqslant R/2+\sqrt{R^2/4+|c|}-|c|/(R/2+\sqrt{R^2/4+|c|}=R$ и, следовательно, внутри круга с центром в точке z_0 и радиусом $\rho_m=|c|/|z_0|$ не содержится ни одного нуля полинома $P_n(z)$. Мы получили противоречие следствию 1, и следствие 4 можно считать доказанным.

2. Обозначим через $\overline{K}_R^1$, $\overline{K}_\alpha^1$, $\overline{K}_{R+|c|}^1$ замкнутые дополнения кругов K_R, K_α, $K_{R+|c|}$ до расширенной плоскости. На основании полученных следствий легко доказываются следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть все нули полинома $P_n(z)$ содержатся внутри круга K_R и $\mathcal{P}_n$ — класс алгебраических полиномов $P_n(z)$, удовлетворяющих на границе круга K_R неравенству $|p_n(z)|\leqslant|P_n(z)|$. Тогда при всех значениях $z\in\overline{K}_{R+|c|}^1$ имеем*

$$P_n^m(z)|\left|n+\frac{c^m}{(m-1)!}\frac{d^m\ln p_n(z)}{dz^m}\right|\leqslant|P_n^m(z)|\left|n+\frac{c^m}{(m-1)!}\frac{d^m\ln P_n(z)}{dz^m}\right|.$$

Доказательство. Функция $p_n(z)P_n^{-1}(z)$ регулярна в замкнутой области $\overline{K}_\alpha^1$ и на границе области $\left|\frac{p_n(z)}{P_n(z)}\right|\leqslant 1$. Следовательно, или эта функция есть постоянная величина, не больше единицы, или неравенство (6) выполняется при всех значениях $z\in\overline{K}_R^1$. В первом случае неравенство (6) очевидно; будем рассматривать второй случай. Пусть λ, $|\lambda|>1$, — произвольное фиксированное число. Все нули полинома $p_n(z)+\lambda P_n(z)$ также содержатся в круге K_R, поэтому согласно следствию 2 все нули полинома $\sigma_{mn}(z,\lambda)=[p_n(z)+\lambda P_n(z)]^m\left\{n+\frac{c^m}{(m-1)!}\frac{d^m}{dz^m}\ln[p_n(z)+\lambda P_n(z)]\right\}$ от переменной z содержатся в круге $K_{R+|c|}$. Зафиксируем произвольную точку $z\in\overline{K}_{R+|c|}^1$ и будем рассматривать $\sigma_{mn}(z,\lambda)$ уже как полином степени m от переменной λ. Нетрудно показать, что свободный член полинома $\sigma_{mn}(z,\lambda)$ равен $p_n^m(z)\left[n+\frac{c^m}{(m-1)!}\frac{d^m\ln p_n(z)}{dz^m}\right]$, а старший коэффициент при λ^m равняется $P_n^m(z)\left[n+\frac{c^m}{(m-1)!}\frac{d^m\ln p_n(z)}{dz^m}\right]$. Так как все нули полинома $\sigma_{mn}(z,\lambda)$ находятся в круге $|\lambda|\leqslant 1$ при $z\in\overline{K}_{R+|c|}^1$, то отношение свободного члена к старшему коэффициенту не превышает единицы и теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть все нули полинома $P_n(z)$ содержатся в круге K_R и полином $p_n(z)\in\mathcal{P}_n$, т. е. удовлетворяет на границе круга неравенству $|p_n(z)|\leqslant|P_n(z)|$. Тогда при всех $z\in\overline{K}_\alpha^1$ справедливо неравенство*

$$|p_n^m(z)|\left|nz^m+\frac{c^m}{(m-1)!}\frac{d^m\ln p_n(z)}{dz^m}\right|\leqslant|P_n^m(z)|\left|nz^m+\right.$$

$$\left.+\frac{c^m}{(m-1)!}\frac{d^m\ln P_n(z)}{dz^m}\right|.$$

Доказательство. Функция $P_n(z)/P_n(z)$ по условию теоремы есть постоянная величина, не превышающая по модулю единицы, или неравенство $|p_n(z)|\leqslant|P_n(z)|$ справедливо во всей области $\overline{K}_R^1$. В первом случае неравенство (7) очевидно. Рассматриваем второй случай. Пусть λ, $|\lambda|>1$,— произвольное фиксированное число. Все нули полинома $p_n(z)+$

$+\lambda P_n(z)$ содержатся в круге K_R, поэтому, согласно следствию 3 все нули полинома

$$\Gamma_{mn}(z, \lambda) = [p_n(z) + \lambda P_n(z)]^m \left\{ nz^m + \frac{c^m}{(m-1)!} \frac{d^m}{dz^m} \ln [p_n(z) + \lambda P_n(z)] \right\}$$

от переменной λ содержатся в круге $\lambda \leqslant 1$. Фиксируем произвольную точку $z \in \overline{K}_\alpha^1$ и рассматриваем полином $\Gamma_{mn}(z, \lambda)$ уже как полином от переменной λ степени m. Можно показать, что свободный член полинома $\Gamma_m(z, \lambda)$ равен $p_n^m(z) \left[nz^m + \frac{c^m}{(m-1)!} \frac{d^m \ln p_n(z)}{dz^m} \right]$, а старший коэффициент при λ^m равен $P_n^m(z) \left[nz^m + \frac{c^m}{(m-1)!} \frac{d^m \ln P_n(z)}{dz^m} \right]$. Так как все нули полинома $\Gamma_{mn}(z, \lambda)$ находятся в круге $|\lambda| \leqslant 1$, то отношение свободного члена к старшему коэффициенту не превышает единицы, что и требовалось доказать.

1. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного.— М. : Наука, 1964.— 438 с.
2. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа.— М. : Госиздат, 1956.—Ч.1. 396 с.; Ч. 2. 432 с.

Киев. ин-т инженеров гражд. авиации

Получено 20.08.84,
после доработки — 12.06.85