УДК 512.83

А. Г. Мазко

Распределение спектра регулярного пучка матриц относительно плоских кривых

В работе изучаются свойства расположения собственных значений аналитических матриц-функций относительно некоторых классов плоских кривых. Результаты статьи дополняют и обобщают соответствующие теоремы, полученные в [1] при решении задачи о распределении спектра матрицы в виде набора инвариантов $\operatorname{In} X \triangleq \{q, \delta, p\}$, т. е. количества отрицательных (q), нулевых (δ) и положительных (p) собственных значений эрмитовой матрицы-решения X обобщенного уравнения Ляпунова.

Пусть $\Lambda(\lambda) \in C^{n\times n}$ — матрица, элементами которой являются функции, аналитические в области $\Omega \subseteq C^1$, ω — простой спрямляемый замкнутый контур, принадлежащий Ω и охватывающий некоторое подмножество спектра $\sigma_\nu \subseteq \sigma(\Lambda)$, т. е. ν корней уравнения $\det \Lambda(\lambda) = 0$ с учетом кратности, $\omega \cap \sigma(\Lambda) = \varnothing$. Исследуем расположение точек σ_ν относительно множеств вида $\Omega_f^- = \{\lambda : f(\lambda, \bar\lambda) < 0\}$, $\Omega_f^0 = \{\lambda : f(\lambda, \bar\lambda) = 0\}$, $\Omega_f^+ = \{\lambda : f(\lambda, \bar\lambda) > 0\}$, где f — заданная функция, аналитическая в $\Omega \times \bar\Omega$ и такая, что $f(\lambda, \bar\mu) \equiv \overline{f(\mu, \bar\lambda)}$, $(\lambda, \bar\mu) \in \Omega \times \bar\Omega$. При этом предполагаем, что выполнено условие регулярности $\det \Lambda(\lambda) \not\equiv 0$ и существует правильное разложение $\Lambda(\lambda) = U(\lambda) V(\lambda)$, в котором спектр линейного множителя $U(\lambda) = A - \lambda B$ совпадает с σ_ν, а $V(\lambda)$ — обратимая на σ_ν матрица-функция.

Метод исследования поставленной задачи состоит в изучении свойств линейного преобразования [2]

$$M_f(X) = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_\omega \oint_{\bar\omega} f(\lambda, \bar\mu)\, \Lambda^{-1}(\lambda)\, \Lambda'(\lambda)\, X \Lambda'(\mu)^* \Lambda^{-1}(\mu^*)\, d\lambda\, d\bar\mu, \qquad (1)$$

где $X = X^*$ — эрмитова $n \times n$-матрица, $\Lambda'(\lambda) = d\Lambda(\lambda)/d\lambda$. Наряду с (1) будем рассматривать матрицы $M(X)$ и $M(Y)$, где $M(\cdot) = M_1(\cdot)$ при $\varphi \equiv 1$, $Y = Y^* > 0$ — любая заданная положительно определенная матрица. Очевидно $M(X) = \Phi X \Phi^*$, где интеграл

$$\Phi = \frac{1}{2\pi i} \oint_\omega \Lambda^{-1}(\lambda)\, \Lambda'(\lambda)\, d\lambda \qquad (2)$$

представляет собой матричный аналог логарифмического вычета функции $\Lambda(\lambda)$, $\operatorname{tr}\Phi = \nu$.

Теорема 1. *Если* $\operatorname{In} M(X) = \{0, n - e, e\}$, $\nu_0 \leqslant e \leqslant \nu$, *где* X — *решение однородного уравнения* $M_f(X) = 0$, *то по крайней мере* ν_0 *точек* σ_ν *расположены на кривой* Ω_f^0. *Обратное утверждение выполнено, если множеству* σ_ν *отвечают простые элементарные делители* $\Lambda(\lambda)$.

Теорема 2. *Пусть функция* f *такова, что при всех* $\lambda, \mu \in \Omega_f^+$ *и* $\lambda_i \in \Omega_f^+$, $i = 1, \ldots, \nu$ *выполнены неравенства*

$$f(\lambda, \bar{\mu}) \neq 0, \quad \| f(\lambda_i, \bar{\lambda}_j)^{-1} \|_1^\nu \geqslant 0.$$

Тогда если $\operatorname{In} M(X) = \{0, n - \nu, \nu\}$, *где* X — *решение уравнения*

$$M_f(X) = M(Y), \tag{3}$$

то ν *собственных значений* Λ, *охваченных контуром* ω, *принадлежат области* Ω_f^+. *Обратно, если* $\sigma_\nu \subset \Omega_f^+$, $\operatorname{rang}\Phi = \nu$, *то уравнение* (3) *разрешимо и* $\operatorname{In} M(X) = \{0, n - \nu, \nu\}$.

Условия и утверждение теоремы 2 выполнены, если функция f представима в виде

$$f(\lambda, \bar{\mu}) = \sum_{k,s=0}^{N} \gamma_{ks} f_k(\lambda) \overline{f_s(\mu)}, \tag{4}$$

где f_k — аналитические в Ω функции, $\Gamma = \| \gamma_{ks} \|_0^N$ — эрмитова матрица, имеющая лишь одно положительное собственное значение, т. е. $\operatorname{In}\Gamma = \{\gamma_-, \gamma_0, 1\}$, $\gamma_- \geqslant 1$, $\gamma_0 \geqslant 0$ [3]. При этом уравнение (3) сводится к виду

$$\sum_{k,s=0}^{N} \gamma_{ks} \Phi_k X \Phi_s^* = \Phi Y \Phi^*. \tag{5}$$

Здесь

$$\Phi_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_\omega f_k(\lambda) \Lambda^{-1}(\lambda) \Lambda'(\lambda)\, d\lambda, \quad k = 0, \ldots, N.$$

Для подкласса функций (4) при $\gamma_- = 1$ утверждение теоремы 2 может быть усилено.

Теорема 3. *Пусть* $\operatorname{In} M(X) = \{\nu_-, n - \nu, \nu_+\}$, *где* X — *решение уравнения* (5) *при ограничении* $\operatorname{In}\Gamma = \{1, \gamma_0, 1\}$. *Тогда* $\sigma_\nu \cap \Omega_f^0 = \varnothing$, *причем ровно* ν_- *и* ν_+ *точек* σ_ν *принадлежат соответственно* Ω_f^- *и* Ω_f^+.

Лемма [2]. *Пусть* $C_1(\lambda) \in C^{m\times n}$, $C_2(\lambda) \in C^{n\times r}$ — *аналитические в области* Ω *матрицы-функции*, $A - \lambda B \in C^{n\times n}$ — *регулярный пучок, спектр которого находится внутри контура* ω. *Тогда справедливо равенство*

$$-2\pi i \oint_\omega C_1(\lambda)(A - \lambda B)^{-1} C_2(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \left(\oint_\omega C_1(\lambda)(A - \lambda B)^{-1} d\lambda \right) B \left(\oint_\omega (A - \lambda B)^{-1} C_2(\lambda)\, d\lambda \right).$$

Доказательство теорем 1 — 3. По предположению $\Lambda = UV$, поэтому в области регулярности Λ имеем $\Lambda^{-1}\Lambda' = V^{-1}U^{-1}U'V + V^{-1}V'$. Внутри контура ω особенности имеет лишь первое слагаемое, поскольку $\sigma(U) \cap \sigma(V) = \varnothing$. Применяя лемму к интегралу (2), находим

$$\Phi = GR, \; G = \frac{1}{2\pi i} \oint_\omega V^{-1}U^{-1}U' d\lambda, \quad R = \frac{1}{2\pi i} \oint_\omega U^{-1}U'V d\lambda.$$

Используем каноническую структуру регулярного пучка $U = A - \lambda B$. Существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что

$$P(A - \lambda B)Q = \begin{bmatrix} I_{n-\nu} - \lambda H & 0 \\ 0 & J - \lambda I_\nu \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где $J \in C^{\nu\times\nu}$, $\sigma_\nu = \sigma(J)$, I_ν — единичная матрица порядка ν, H — матрица порядка $n-\nu$, элементы первой наддиагонали которой принимают значения 0 или 1, а остальные элементы равны 0 [4, с. 334]. В случае $\nu = n$ $J = B^{-1}A$ и (6) не содержит блока $I_{n-\nu} - \lambda H$,

Поскольку

$$U^{-1}U' = -(A-\lambda B)^{-1}B = -Q\begin{bmatrix}(I_{n-\nu}-\lambda H)^{-1}H & 0\\ 0 & (J-\lambda I_\nu)^{-1}\end{bmatrix}Q^{-1},$$

то в силу аналитичности блока $(I_{n-\nu}-\lambda H)^{-1}H$ имеем

$$G = [0,\ W]\,Q^{-1}, \quad R = Q\begin{bmatrix}0\\ Z\end{bmatrix},\ GR = WZ,$$

где $\hat{W}$ и Z — прямоугольные матрицы размеров $n\times\nu$ и $\nu\times n$ соответственно,

$$W = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\omega V^{-1}(\lambda)\,Q\begin{bmatrix}0\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ (J-\lambda I_\nu)^{-1}\end{bmatrix}d\lambda,$$

$$Z = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\omega [0,\ (J-\lambda I_\nu)^{-1}]\,Q^{-1}V(\lambda)\,d\lambda.$$

Следовательно, $\Phi = WZ$. Аналогично матричные коэффициенты в уравнении (5) представимы в виде

$$\Phi_k = Wf_k(J)\,Z, \quad f_k(J) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\omega f_k(\lambda)\,(J-\lambda I_\nu)^{-1}\,d\lambda. \qquad (7)$$

В более общем случае, применяя лемму отдельно к каждому интегралу в (1), получаем

$$M_f(X) = WL_f(ZXZ^*)\,W^*, \qquad (8)$$

где $L_f(\hat{X}) = -\frac{1}{4\pi^2}\oint\limits_\omega\oint\limits_{\bar\omega} f(\lambda,\bar\mu)\,(J-\lambda I_\nu)^{-1}\,\hat{X}\,(J-\mu I_\nu)^{-1*}\,d\lambda d\bar\mu$ — известное линейное преобразование [5, с. 36].

Таким образом, если W и Z — матрицы полного ранга, т. е. rang $\Phi = \nu$, то (3) эквивалентно уравнению $L_f(\hat{X}) = \hat{Y}$, где $Y = ZYZ^* > 0$ — положительно определенная матрица, $\hat{X} = ZXZ^*$ — неизвестная $\nu\times\nu$-матрица. В случае однородного уравнения (теорема 1) получим $L_f(\hat{X}) = 0$. Расположение спектра матрицы J, совпадающего с исследуемым подмножеством σ_ν, относительно Ω_f^-, Ω_f^0 и Ω_f^+ при соответствующих ограничениях на f описывается с помощью инвариантов $\mathrm{In}\,\hat{X} = \{\nu_-,\ \nu_0,\ \nu_+\}$. Поскольку при этом $\mathrm{In}\,M(X) = \{\nu_-,\ \nu_0 + n - \nu,\ \nu_+\}$, то утверждения теорем 1 — 3 вытекают из соответствующих результатов для спектра матрицы [1]. Теоремы 1 — 3 доказаны.

Примечание. Теоремы 1—3 сохраняют силу, если в интегралах (1), (2) вместо выражения $\Lambda^{-1}\Lambda'$ рассматривать лишь резольвенту Λ^{-1}. В этом случае аналогичным образом вместо (8) получим выражение

$$M_f(X) = FP^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & L_f(\tilde{X})\end{bmatrix}P^{-1}F^* = WL_f(\tilde{X})\,W^*,$$

где

$$F = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\omega \Lambda^{-1}(\lambda)\,d\lambda = [0,\ W]\,P, \quad \tilde{X} = [0,\ I_\nu]\,PXP^*\,[0,\ I_\nu]^*.$$

Пусть $\Lambda(\lambda) = A - \lambda B$ — регулярный пучок, тогда матричные коэффициенты Φ и Φ_k в уравнении (5) выражаются через интеграл F:

$$\Phi = FB, \quad \Phi_k = FBf_k(FA) = f_k(FA)\,FB, \quad k = 0,\ \ldots,\ N. \qquad (9)$$

Действительно, с учетом (6) находим

$$F = Q\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I_\nu\end{bmatrix}P, \quad FB = Q\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I_\nu\end{bmatrix}Q^{-1}, \quad FA = Q\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & J\end{bmatrix}Q^{-1}.$$

В то же время согласно (7) при $V \equiv I_n$ имеем

$$W = Q\begin{bmatrix}0\\ I_\nu\end{bmatrix}, \quad Z = [0, I_\nu]\,Q^{-1}, \quad \Phi_k = Q\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & f_k(J)\end{bmatrix}Q^{-1}.$$

Отсюда видно, что формулы (9) выполнены в силу известных свойств аналитических функций от матрицы. В частности, если $f_k(0) = 0$, то

$$\Phi_k = f_k\left(Q\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & J\end{bmatrix}Q^{-1}\right) = f_k(FA).$$

Следствие 1. *Пусть* $\operatorname{In}(BXB^*) = \{\nu_-, \nu_0, \nu_+\}$, *где* X — *решение уравнения*

$$2pBXB^* - e^{i\theta}BXA^* - E^{-i\theta}AXB^* = BYB^*. \tag{10}$$

Тогда спектр пучка $A - \lambda B$ *состоит из* $\nu = \operatorname{rang}(BXB^*)$ *точек с учетом кратности, не лежащих на прямой* $(\operatorname{Re}\lambda)\cos\theta + (\operatorname{Im}\lambda)\sin\theta = p$. *Из них ровно* ν_+ (ν_-) *расположены в полуплоскости* $(\operatorname{Re}\lambda)\cos\theta + (\operatorname{Im}\lambda)\sin\theta < p$ $(> p)$.

Следствие 2. *Пусть* $\operatorname{In}(BXB^*) = \{\nu_-, \nu_0, \nu_+\}$, *где* X — *решение уравнения*

$$l^2BXB^* - (A - \lambda_0 B)\,X\,(A - \lambda_0 B)^* = BYB^* \tag{11}$$

при одном из условий: 1) $\det B \neq 0$; 2) $H = 0$; 3) $H^2 = 0$, $\det(A - \lambda_0 B) \neq 0$. *Тогда спектр пучка* $A - \lambda B$ *состоит из* $\nu = \operatorname{rang}(BXB^*)$ *точек, не лежащих на окружности* $|\lambda - \lambda_0|^2 = l^2$. *Из них ровно* ν_+ (ν_-) *расположены внутри (вне) данной окружности.*

Доказательство. Рассмотрим простейшую функцию вида (4), полагая

$$f_0(\lambda) \equiv 1, \; f_1(\lambda) = \lambda, \quad \Gamma = \begin{bmatrix}\gamma_{00} & \gamma_{01}\\ \gamma_{10} & \gamma_{11}\end{bmatrix}.$$

При этом Ω_f^0 — некоторая прямая или окружность соответственно при $\gamma_{11} = 0$ и $\gamma_{11} \neq 0$.

С учетом (9) уравнение (5) имеет вид $F(\gamma_{00}BXB^* + \gamma_{01}BXA^* + \gamma_{10}AXB^* + \gamma_{11}AXA^*)\,F^* = FBYB^*F^*$. Это соотношение выполнено, если

$$\gamma_{00}BXB^* + \gamma_{01}BXA^* + \gamma_{10}AXB^* + \gamma_{11}AXA^* = BYB^*, \tag{12}$$

причем из неравенства $BXB^* \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ следует $M(X) = FBXB^*F^* \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$. Поэтому, если $BXB^* \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$, где X — решение уравнения (12), то согласно теореме 2 спектр пучка $A - \lambda B$ принадлежит области Ω_f^+ (Ω_f^-). Изучая условия совместности уравнения (12), покажем, что последнее предложение может быть усилено в виде следствий 1 и 2, сформулированных с помощью уравнений (10) и (11) соответственно при

$$\Gamma = \begin{bmatrix}2p & -e^{i\theta}\\ -e^{-i\theta} & 0\end{bmatrix} \text{ и } \Gamma = \begin{bmatrix}l^2 - |\lambda_0|^2 & \lambda_0\\ \bar\lambda_0 & -1\end{bmatrix}.$$

Приведем уравнение (12) с помощью (6) к трем независимым уравнениям

$$\gamma_{00}HX_1H^* + \gamma_{01}HX_1 + \gamma_{10}X_1H^* + \gamma_{11}X_1 = HY_1H^*,$$

$$\gamma_{00}HX_2 + \gamma_{01}HX_2J^* + \gamma_{10}X_2 + \gamma_{11}X_2J^* = HY_2,$$

$$\gamma_{00}X_3 + \gamma_{01}X_3J^* + \gamma_{10}JX_3 + \gamma_{11}JX_3J^* = Y_3,$$

где матрицы X_i и Y_i определяются соотношениями

$$Q^{-1}XQ^{-1*}=\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^* & X_3 \end{bmatrix},\quad Q^{-1}YQ^{-1*}=\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_2^* & Y_3 \end{bmatrix}.$$

Первое уравнение разрешимо, если $H^2=0$, т. е. степени «бесконечных» элементарных делителей пучка $A-\lambda B$ не превышают 2 [4, с. 333] (при $\gamma_{11}=0$ это условие и необходимо). Так, в этом случае решение

$$X_1=\begin{cases} (\gamma_{10}^{-1}HY_1+\gamma_{01}^{-1}Y_1H^*)/2, & \gamma_{11}=0, \\ \gamma_{11}^{-1}HY_1H^*, & \gamma_{11}\neq 0. \end{cases}$$

Второе уравнение имеет решение X_2 в каждом из случаев: а) $H=0$; б) $H^2=0$, $\gamma_{11}=0$; в) $H^2=0$, $\gamma_{11}\neq 0$, $\lambda_0=-\gamma_{01}/\gamma_{11}\notin\sigma(J)$. Если в случае в) центр окружности λ_0 является собственным значением, то решение X_2 также существует при условии, что соответствующие конечные элементарные делители пучка $A-\lambda B$ линейны.

Условия совместности уравнения для X_3 выражаются в виде $f(\lambda,\bar{\mu})\neq 0$, $(\lambda,\bar{\mu})\in\sigma(J)\times\sigma(J^*)$ [6, с. 114], откуда, в частности, следует $\sigma(J)\cap\Omega_f^0=\varnothing$. Если $\mathrm{In}\,X_3=\{\nu_-,0,\nu_+\}$, то согласно [3] в области Ω_f^+ (Ω_f^-) находится ровно ν_+ (ν_-) точек $\sigma(J)$. В то же время $\mathrm{In}\,(BXB^*)=\{\nu_-,n-\nu,\nu_+\}$, поскольку в каждом из случаев а) — в)

$$BXB^*=P^{-1}\begin{bmatrix} HX_1H^* & HX_2 \\ X_2^*H^* & X_3 \end{bmatrix}P^{-1*}=P^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_3 \end{bmatrix}P^{-1*}.$$

П р и м е р. Полагая в (10) $p=\theta=0$, имеем уравнение типа Сильвестра

$$AXB^*+BXA^*=-BYB^*.$$

Если X — его решение, то неравенство $BXB^*\geqslant 0$ эквивалентно размещению всех собственных значений пучка $A-\lambda B$ слева от мнимой оси. Это предложение может быть использовано при анализе устойчивости линейной системы

$$x(t)B=x(t)A,\quad x(t)=[x_1(t),\ldots,x_n(t)],\quad x(0)=x_0,$$

которая является сингулярной в случае $\det B=0$.
Определяя функцию Ляпунова в виде $v(x)=xBXB^*x^*$, находим ее производную в силу системы

$$\dot{v}(x)=\dot{x}BXB^*x^*+xBXB^*\dot{x}^*=x(AXB^*+BXA^*)x^*=-xBYB^*x^*.$$

С помощью (6) нетрудно показать, что если $BXB^*\geqslant 0$, то на решениях системы $v(x)>0$, $\dot{v}(x)<0$, т. е. имеет место асимптотическая устойчивость (второй метод Ляпунова).

1. *Мазко А. Г.* Оценка расположения спектра матрицы относительно плоских кривых.— Укр. мат. журн., 1985, 37, № 1, с. 38—42.
2. *Мазко А. Г.* Распределение корней матричного полинома относительно плоских кривых.— В кн.: Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984, с. 90—96.
3. *Мазко А. Г.* Теория распределения спектра матрицы относительно алгебраических и трансцендентных кривых.— Киев, 1983.— 40 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 83.5).
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1967.— 575 с.
5. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 534 с.
6. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. — М. : Наука, 1979.— 304 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 27.03.84,
после доработки — 16.04.85