УДК 517.925.3

О. С. Черникова

К вопросу об ограниченности решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

Различные вопросы качественной теории дифференциальных уравнений с импульсным воздействием изучались в ряде работ и, в частности, в работах Ю. А. Митропольского, А. М. Самойленко, Н. А. Перестюка [1—3].

В настоящей работе даются некоторые достаточные условия равномерной и предельной ограниченности решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

Пусть задана система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$dx/dt = f(t, x), \qquad t \neq t_i, \ \Delta x|_{t=t_i} = I_i(x), \tag{1}$$

в которой $x = (x^1, \ldots, x^n) \in R^n$, $t \geqslant t^0$, $\{t_i\}$, $i \in N$, — последовательность моментов времени импульсного воздействия, причем $t_i > t_{i-1}$, $i \in N$, $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$; $f(t, x)$, $I_i(x)$, $i \in N$, — непрерывные вектор-функции, $\| I_i(x) \| \leqslant g(x)$, $g(x) \in C(R^n)$.

Для системы (1) справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть для системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием* (1) *существует непрерывно дифференцируемая при* $t \neq t_i$ *функция* $V(t, x)$, $t \geqslant t^0$, $x \in R^n$, *обладающая при* $|x| \geqslant \rho$ *следующими свойствами:*

1) $a(\| x \|) \leqslant V(t, x) \leqslant b(\| x \|)$, *где* $a(r)$, $b(r)$, $r > 0$, — *непрерывные возрастающие функции;* $a(r) \to \infty$ *при* $r \to \infty$, $a(\rho) > 0$;

2) $\partial V/\partial t + \langle \operatorname{grad} V, f \rangle \leqslant 0$, $t \neq t_i$;

3) *существует такое число* $n_0 \in N$, *что при* $i \geqslant n_0$ *для любых* x *и* y, *удовлетворяющих условиям* $\| x \| \geqslant \rho$, $\rho \leqslant \| y \| \leqslant a^{-1}(b(\| x \|)) + \sup\limits_{\rho \leqslant \| \xi \| \leqslant a^{-1}(b(\| x \|))} \| I_{i+1}(\xi) \|$, *выполняются неравенства* $V(t_{i+1}, y) \leqslant V(t_i x)$.

Тогда решения системы (1) *равномерно ограничены.*

Доказательство. Пусть $\{x(t, t^0, x^0),\ \|x^0\| \leqslant \alpha,\ \alpha > \rho\}$ — совокупность решений системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1) и пусть $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, t^0, \tilde{x}^0)$ — какое-либо решение из этой совокупности. Предположим, что $\|\tilde{x}(t)\| > \rho,\ t \geqslant t^0$. Оценим величину $\|\tilde{x}(t_{n_0})\|$, учитывая свойства функции $V(t, \tilde{x}(t))$. Введем в рассмотрение числа M_i, $i = 1, \ldots, n_0$; $M_1 = a^{-1}(b(\alpha))$, $M_2 = a^{-1}(b(M_1 + \max\limits_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant M_1} g(x))), \ldots, M_{n_0} = a^{-1}(b(M_{n_0-1} + \max\limits_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant M_{n_0-1}} g(x)))$. Докажем, что если $\rho \leqslant \|\tilde{x}(t_k)\| \leqslant M_k$, $k = 1, \ldots, n_0 - 1$, то $\|\tilde{x}(t_{k+1})\| \leqslant M_{k+1}$.

Действительно, если $\|\tilde{x}(t_k)\| \leqslant M_k$, то $\|\tilde{x}(t_k + 0)\| \leqslant \|\tilde{x}(t_k)\| + \|I_k(\tilde{x}(t_k))\| \leqslant M_k + \max\limits_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant M_k} g(x)$. Далее, $a(\|\tilde{x}(t_{k+1})\|) \leqslant V(t_{k+1}, \tilde{x}(t_{k+1})) \leqslant V(t_k, \tilde{x}(t_k + 0)) \leqslant b(\|\tilde{x}(t_k + 0)\|) \leqslant b(M_k + \max\limits_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant M_k} g(x))$. Отсюда следует

$$\|\tilde{x}(t_{k+1})\| \leqslant a^{-1}(b(M_k + \max_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant M_k} g(x))) = M_{k+1}.$$

Оценим теперь $\|\tilde{x}(t_1)\|$. Ввиду свойств 1 и 2 функции $V(t, x)$ $a(\|\tilde{x}(t_1)\|) \leqslant V(t_1, \tilde{x}(t_1)) \leqslant V(t^0, \tilde{x}(t^0)) \leqslant b(\alpha)$, т. е. $\|\tilde{x}(t_1)\| \leqslant a^{-1}(b(\alpha))$. Таким образом, доказано, что $\|\tilde{x}(t_{n_0})\| \leqslant M_{n_0}$, и $\|\tilde{x}(t_{n_0} + 0)\| \leqslant M_{n_0} + \max\limits_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant M_{n_0}} g(x)$.

При $t > t_{n_0}$ норма решения $\tilde{x}(t)$ ограничена числом $a^{-1}(b(M_{n_0} + \max\limits_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant M_{n_0}} g(x)))$, что следует из неравенств $a(\|\tilde{x}(t)\|) \leqslant V(t, \tilde{x}(t)) \leqslant V(t_{n_0}, \tilde{x}(t_{n_0} + 0)) \leqslant b(\|\tilde{x}(t_{n_0} + 0)\|)$, справедливых при $t > t_{n_0}$ в силу условий теоремы (очевидно, условие 3 теоремы справедливо для $x = \tilde{x}(t_i + 0)$, $y = \tilde{x}(t_{i+1} + 0)$, $i \geqslant n_0$).

Итак, решения из рассматриваемой совокупности, не попадающие в область $\|x\| \leqslant \rho$, ограничены по норме при $t \geqslant t^0$ числом $a^{-1}(b(M_{n_0} + \max\limits_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant M_{n_0}} g(x)))$.

Если же решение $\tilde{\tilde{x}}(t)$ из рассматриваемой совокупности попадает в область $\|x\| \leqslant \rho$, то нетрудно убедиться в том, что при $t \geqslant t^0$ его норма ограничена по крайней мере числом $\beta(\alpha) = \max\{a^{-1}(b(M_{n_0} + \max\limits_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant M_{n_0}} g(x)),\ a^{-1}(b(L_{n_0} + \max\limits_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant L_{n_0}} g(x)))\}$, где число L_{n_0} определяется с помощью следующих соотношений: $L_1 = a^{-1}(b(\rho + \max\limits_{\|x\| \leqslant \rho} g(x)))$, $L_2 = a^{-1}(b(L_1 + \max\limits_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant L_1} g(x)))$, $L_{n_0} = a^{-1}(b(L_{n_0-1} + \max\limits_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant L_{n_0-1}} g(x)))$.

Таким образом, любое решение $x(t, t^0, x^0)$, $\|x^0\| \leqslant \alpha$, при $t \geqslant t^0$ удовлетворяет неравенству $\|x(t) \leqslant \beta$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть для системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием* (1) *существует непрерывно дифференцируемая при* $t \neq t_i$ *функция* $V(t, x)$, $t \geqslant t^0$, $x \in R^n$, *обладающая при* $\|x\| \geqslant \rho$ *следующими свойствами:*

1) $a(\|x\|) \leqslant V(t, x) \leqslant b(\|x\|)$, *где* $a(r)$, $b(r)$, $r > 0$, — *непрерывные возрастающие функции,* $a(r) \to \infty$ *при* $r \to \infty$, $a(\rho) > 0$;

2) $\partial V/\partial t + \langle \operatorname{grad} V, f \rangle \leqslant 0$, $t \neq t_i$;

3) *при* $i \geqslant 2$ *для любых* x *и* y, *удовлетворяющих условиям* $\| x \| \geqslant \rho$, $\rho \leqslant \| y \| \leqslant a^{-1}(b(\| x \|)) + \sup\limits_{\rho \leqslant \|\xi\| \leqslant a^{-1}(b(\|x\|))} \| I_{i+1}(\xi) \|$, *выполняются неравенства* $V(t_i, y) \leqslant$ $\leqslant (1 + \beta_i) V(t_{i-1}, x)$, $\beta_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \beta_i < \infty$.

Тогда решения системы (1) *равномерно ограничены.*

Доказательство. Пусть $\{x(t, t^0, x^0), \| x^0 \| \leqslant \alpha, \alpha > \rho\}$ — совокупность решений системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1) и $\tilde{x}(t)$ — некоторое решение из этой совокупности, при $t \geqslant$ $\geqslant t^0$ располагающееся в множестве $\|x\| > \rho$. Ввиду условий теоремы при $t \in (t_i, t_{i+1}]$ для функции $v(t) = V(t, x(t))$ выполняются неравенства

$$a(\| \tilde{x}(t) \|) \leqslant v(t) \leqslant (t_i + 0) \leqslant (1 + \beta_i) v(t_{i-1} + 0) \leqslant \prod_{j=i}^{2} (1 + \beta_j) v(t_1 + 0).$$

Оценим $v(t_1 + 0)$:

$$v(t_1 + 0) = V(t_1, \tilde{x}(t_1 + 0)) \leqslant b(\| \tilde{x}(t_1 + 0) \|) \leqslant b(\| \tilde{x}(t_1) \| +$$
$$+ \| I_1(\tilde{x}(t_1)) \|) \leqslant b(\| \tilde{x}(t_1) \| + g(\tilde{x}(t_1))).$$

Очевидно, что $\| \tilde{x}(t_1) \| \leqslant a^{-1}(b(\alpha))$. Таким образом, при $t \in (t_i, t_{i+1}]$

$$a(\| \tilde{x}(t) \|) \leqslant \prod_{j=i}^{2} (1 + \beta_j) b[a^{-1}(b(\alpha)) + \max_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant a^{-1}(b(\alpha))} g(x)],$$

т. е.

$$\| \tilde{x}(t) \| \leqslant a^{-1} \left\{ \prod_{j=i}^{2} (1 + \beta_j) b[a^{-1}(b(\alpha)) + \max_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant a^{-1}(b(\alpha))} g(x)] \right\}.$$

Так как по условию теоремы $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \beta_i < \infty$, то $\prod\limits_{j=2}^{\infty} (1 + \beta_j) = K < \infty$, и норма решения $\tilde{x}(t)$ ограничена числом $a^{-1}\{Kb[a^{-1}(b(\alpha)) + \max\limits_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant a^{-1}(b(\alpha))} g(x)]\}$, $t \geqslant t^0$.

Предположим теперь, что решение $\tilde{\tilde{x}}(t)$ из рассматриваемой совокупности попадает в область $\| x \| \leqslant \rho$. В этом случае нетрудно убедиться в том, что при $t \geqslant t^0$ норма этого решения не превышает числа

$$\beta(\alpha) = \max\{a^{-1}[Kb(a^{-1}(b(\alpha)) + \max_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant a^{-1}(b(\alpha))} g(x))];\ a^{-1}[Kb(a^{-1}(b(\alpha_0)) +$$
$$+ \max_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant a^{-1}(b(\alpha_0))} g(x))]\},$$

где $\alpha_0 = \rho + \max\limits_{\|x\| \leqslant \rho} g(x)$. Таким образом, любое решение из рассматриваемой совокупности решений системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1) ограничено — норма его не превышает числа $\beta(\alpha)$, $t \geqslant t^0$. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекают соответственно следствия 1 и 2.

Следствие 1. *Пусть для системы* (1) *выполняются условия* 1 *и* 3 *теоремы* 1 *и условие*

2′) $\partial V / \partial t + \langle \operatorname{grad} V, f \rangle \leqslant \gamma(t) \varphi(V)$, *где* $\gamma(t)$ — *непрерывная неотрицательная функция*, $\varphi(r)$ — *положительная непрерывная неубывающая функция при* $r \geqslant \rho_0$, *причем* $\int\limits_0^{\infty} \gamma(t)\, dt < \infty$, $\int\limits_{\rho_0}^{\infty} dr / \varphi(r) = \infty$.

Тогда решения системы (1) *равномерно ограничены.*

Следствие 2. *Пусть для системы* (1) *выполняются условия* 1 *и* 3 *теоремы* 2 *и условие* 2′ *следствия* 1.

Тогда решения системы (1) *равномерно ограничены.*

Для случая неимпульсной системы ($\|I_i(x)\| \equiv 0$, $i \in N$) соответствующие результаты известны.

Пусть теперь в системе дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1) последовательность $\{t_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, такова, что равномерно относительно $t \geqslant t^0$ существует конечный предел

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{i(t, t+\tau)}{\tau} = p. \tag{2}$$

Здесь $i(t, t+\tau)$ — число точек последовательности $\{t_i\}$, содержащихся в множестве $[t, t+\tau)$.

Для системы (1) при условии (2) справедливо утверждение.

Теорема 3. *Пусть для системы* (1) *существует непрерывно дифференцируемая при* $t \neq t_i$ *функция* $V(t, x)$, $t \geqslant t^0$, $x \in R^n$, *обладающая при* $\|x\| \geqslant \rho$ *следующими свойствами*:

1) $a(\|x\|) \leqslant V(t, x) \leqslant b(\|x\|)$, *где* $a(r)$, $b(r)$, $r > 0$, — *непрерывные возрастающие функции* $a(r) \to \infty$ *при* $r \to \infty$, $a(\rho) > 0$;

2) *можно указать такое действительное число* γ_1, *что* $\partial V/\partial t + \langle \operatorname{grad} V, f \rangle \leqslant \gamma_1 V$, $t \neq t_i$;

3) *можно указать такое положительное число* γ_2, *что* $V(t_i, x + I_i(x)) \leqslant \gamma_2 V(t_i, x)$ *при всех* x ($\|x\| \geqslant \rho$) *таких, для которых* $\|x + I_i(x)\| \geqslant \rho$;

4) $\gamma_1 + p \ln \gamma_2 < 0$.

Тогда решения системы (1) *равномерно ограничены и система* (1) *диссипативна.*

Доказательство. Докажем, что решения системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1) равномерно ограничены. Пусть $\{x(t, t^0, x^0), \|x^0\| \leqslant \alpha, \alpha > \rho\}$ — совокупность решений системы (1) и пусть $\tilde{x}(t)$ — произвольное решение из этой совокупности. Ввиду условий 2 и 3 доказываемой теоремы на любом множестве (t_α, t_β) таком, что $\|\tilde{x}(t)\| > \rho$ при $t \in (t_\alpha, t_\beta)$, функция $v(t) = V(t, \tilde{x}(t))$ удовлетворяет неравенствам

$$dv/dt \leqslant \gamma_1 v, \quad t \neq t_i, \ v(t_i + 0) \leqslant \gamma_2 v(t_i). \tag{3}$$

С учетом этих неравенств и условий 1 и 4 доказываемой теоремы, а также условия (2) нетрудно убедиться в том, что норма произвольного решения $\tilde{x}(t)$ из рассматриваемой совокупности решений ограничена числом $\beta(\alpha) = \max\{a^{-1}(Kb(\alpha)); \ a^{-1}(Kb(\rho + \max_{\|x\| \leqslant \rho} g(x)))\}$. Отсюда можно заключить, что решения системы (1) равномерно ограничены.

Покажем теперь, что любое решение $x(t) = x(t, t^0, x^0)$ рассматриваемой импульсной системы попадает в область $\|x\| \leqslant \rho$. Предположим противное: пусть $\|\tilde{\tilde{x}}(t)\| > \rho$, $t \geqslant t^0$. Тогда ввиду того, что функция $v(t) = V(t, \tilde{\tilde{x}}(t))$ удовлетворяет неравенствам (3), для $v(t)$ справедливы соотношения $a(\rho) \leqslant v(t) \leqslant K e^{-\delta(t - t^0)} v_0$, где $K \geqslant 1$, $v_0 = v(t^0)$, $0 < \delta < -(\gamma_1 + p \ln \gamma_2)$. Из последних неравенств следует, что предположение относительно решений $\tilde{\tilde{x}}(t)$ неверно. Таким образом, любое решение системы (1) попадает в множество $\|x\| \leqslant \rho$. Если в дальнейшем решение покинет это множество, то его норма не превысит числа $a^{-1}(Kb(\rho + \max_{\|x\| \leqslant \rho} g(x))$. Отсюда следует диссипативность системы (1). Теорема доказана.

Результаты настоящей работы вместе с результатами работы [4] могут быть использованы при изучении вопроса об асимптотическом поведении решений импульсной системы в зависимости от поведения решений соответствующей системы дифференциальных уравнений без импульсного воздействия.

1. *Митропольский Ю. А., Перестюк Н. А., Черникова О. С.* Конвергентность систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 11, с. 11—14.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием.— Дифференц. уравнения, 1981, 17, № 11, с. 1995—2001.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев : Изд-во Киев. ун-та, 1980.— 80 с.
4. *Йосидзава Т.* Функция Ляпунова и ограниченность решений.— Математика : Период. сб. пер, 1965, 9, № 5, с. 95—127.

Ин-т электросварки АН УССР, Киев

Получено 22.02.85