УДК 517.54:513.83

*О. В. Иванов*

# Несколько замечаний о компактификации Бора числовой прямой

Настоящая статья посвящена новому методу построения компактификации Бора числовой прямой и изучению возникающей при этом границы. Полученные результаты уточняют соотношение метрических и алгебраических свойств боровской компактификации. Обычно понятие компактификации Бора связывают с пространством максимальных идеалов $\mathfrak{M}(AP)$ алгебры почти периодических функций $AP$ [1, 2], но при таком подходе $\mathfrak{M}(AP)$ не будет компактификацией числовой прямой (вложение $\tau: R \to \mathfrak{M}(AP)$ взаимно однозначно, но не гомеоморфно) в обычном смысле. Поэтому возникает вопрос: как (по возможности конструктивно) изменить топологию в $\mathfrak{M}(AP)$, чтобы превратить это пространство в компактификацию прямой $R$, граница которой совпадала бы с $\mathfrak{M}(AP) \setminus R$? Положительный ответ, имеющий метрический характер (а не алгебраический, как это можно было ожидать), дает теорема 2. Наш подход, являющийся некоторой модификацией метода, предложенного в [3], основан на рассмотрении равномерной структуры, индуцируемой на $R$ компактом $\mathfrak{M}(AP)$ (теорема 1). При этом устанавливается неожиданная связь с теорией «торовых конформно-инвариантных компактификаций» (гл. IV, теорема 7) [4], результаты которой мы существенно используем. Теоремы 3, 4 посвящены описанию границы компактификации Бора. В пп. 4, 5 построено семейство различных компактификаций $R$, порождаемых функциями с убывающей на бесконечности производной и рассматривается движение граничных элементов при сдвигах $R$. Оказалось, что по отношению к сдвигам компактификация Бора ведет себя особым образом (теорема 6).

**1.** Компакт Бора. Пусть $AP$ — $C^*$-алгебра (с равномерной нормой) почти периодических функций на $R$. Пространство максимальных идеалов $\mathfrak{M}(AP)$ алгебры $AP$ называется компактом Бора; $R$ можно непрерывно и взаимно однозначно (но не гомеоморфно!) отобразить на всюду плотное подмножество $\mathfrak{M}(AP)$. Это вложение осуществляется отображением $\tau(x) \overset{\text{def}}{=} \varphi_x$, $\varphi_x \in \mathfrak{M}(AP)$. Здесь $\varphi_x$ гомоморфизм (мультипликативный функционал) вида $\varphi_x(f) = f(x)$, $f \in AP$, $x \in R$. Для дальнейшего необходимы следующие свойства отображения $\tau$.

Лемма 1. *$\tau$ отображает непрерывно и взаимно однозначно $R$ на всюду плотное подмножество $\mathfrak{M}(AP)$. 2. $\tau$ не является гомеоморфизмом.*

Доказательство первого утверждения см. в [2, с. 30]. Для гомеоморфности $\tau$ необходимо и достаточно, чтобы для любых замкнутого подмножества $F \subseteq R$ и точки $x \in R \setminus F$ существовала $f \in AP$ такая, что $f(x) \overline{\in} \overline{f(F)}$ [2, с. 31]. В качестве $F$ рассмотрим замкнутое множество вида $[a, +\infty)$. Возьмем произвольную функцию $f \in AP$ и точку $x < a$. Тогда по определению почти периодичности $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon \in [a, +\infty)$ такие, что $|f(x) - f(x_\varepsilon)| < \varepsilon$, а это и означает $f(x) \in \overline{f([a, +\infty))}$. Следовательно, $\tau$ не гомеоморфизм.

Теорема 1. *Компакт Бора $\mathfrak{M}(AP)$ является пополнением $(\widehat{R, U_R})$ равномерного пространства $(R, U_R)$ по равномерной структуре $U_R$, порождаемой семейством псевдометрик $\{r_\lambda\}_{\lambda \in R \setminus 0}$, где $r_\lambda(x, y) = |e^{2\pi i\lambda x} - e^{2\pi i\lambda y}|$.*

Доказательство. С помощью биекции $\tau \times \tau : R \times R \to \tau(R) \times \tau(R)$ перенесем равномерную структуру пространства $\tau(R) \subseteq \mathfrak{M}(AP)$, порождаемую равномерной структурой компакта $\mathfrak{M}(AP)$, на $R$ и обозначим ее через $U_R$. Покажем, что $U_R$ порождается семейством псевдометрик $\{r_f\}$, $f \in AP$, где $r_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$. Элементы фундаментальной системы окружений равномерной структуры $U(\tau(R)) \overset{\text{def}}{=} U(\mathfrak{M}(AP))|_{\tau(R)}$ имеют вид $\{(\varphi_x, \varphi_y) : |\varphi_x(f_j) - \varphi_y(f_j)| < \varepsilon\}_{f_j \in S}$, где $S$ — произвольное конечное подмножество $AP$. Действительно, окружениями равномерной структуры $U(\mathfrak{M}(AP))$ ($\mathfrak{M}(AP)$ — компакт) являются всевозможные окрестности диагонали $\mathfrak{M}(AP) \times \mathfrak{M}(AP)$ и только они, а $\tau(R) \subseteq \mathfrak{M}(AP)$ по определению состоит из гомоморфизмов вида $\varphi_x(f) = f(x)$, $f \in AP$, $x \in R$. Теперь, поскольку $\tau : R \to \tau(R)$ — биекция, равномерно непрерывная в обе стороны, элементы фундаментальной системы окружений равномерной структуры $U_R$ имеют вид $\{(x, y) : |f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon\}_{f_j \in S}$, т. е. $U_R$ порождается семейством псевдометрик $\{r_f\}$, $f \in AP$. Так как по теореме Бора функции вида $e^{2\pi i\lambda x}$ порождают алгебру $AP$, то согласно [1, с. 42] при определении фундаментальной системы окружений достаточно в качестве $S$ брать конечное число функций вида $e^{2\pi i\lambda x}$, т. е. равномерная структура $U_R$ порождается набором псевдометрик $\{r_f(x, y)\}_{\lambda \in R \setminus 0}$, где $r_\lambda(x, y) = |e^{2\pi i\lambda x} - e^{2\pi i\lambda y}|$. Существование гомеоморфизма $\varphi : (\widehat{R, U_R}) \to \mathfrak{M}(AP)$ такого, что $\tau(x) = \varphi(i(x))$, $x \in R$, где $i$ — естественное вложение $(R, U_R)$ в $(\widehat{R, U_R})$ — следствие единственности пополнения равномерного пространства (см. [5], гл. II, § 3, п. 7]).

Замечание 1. Равномерная структура $U_R$ на $R$, построенная при доказательстве теоремы 1, не согласуется с топологией $R$.

Замечание 1 показывает, что топология, порождаемая $U_R$, не эквивалентна топологии $R$ — это еще одна интерпретация того, что компакт Бора $\mathfrak{M}(AP)$ не является компактификацией $R$. Вместе с тем замечание 1 подсказывает, как не меняя границы $\mathfrak{M}(AP) \setminus R$, превратить компакт Бора $\mathfrak{M}(AP)$ в компактификацию $R$.

2. Компактификация Бора. Обозначим через $\rho_{\text{сф}}(x, y)$ сферическое расстояние на $R$, пополнение по которому присоединяет $\infty$ в качестве единственной точки.

Теорема 2. *Пополнение $BR = (\widehat{R, U_B})$ равномерного пространства $(R, U_B)$ по равномерной структуре $U_B$, порождаемой семейством метрик вида*

$$\rho_\lambda(x, y) = \rho_{\text{сф}}(x, y) + |e^{2\pi i\lambda x} - e^{2\pi i\lambda y}|, \ \lambda \in R \setminus 0,$$

*является компактификацией $R$. Кроме того, граница $BR \setminus R$* гомеоморфна $\mathfrak{M}(AP) \setminus R$.

Доказательство. То, что $(\widehat{R, U_B})$ — компактификация $R$, следует из теоремы 8 гл. IV [4]. Покажем гомеоморфность $\mathfrak{M}(AP) \setminus R$ и $BR \setminus R$. Пусть $\{x_\omega\}$ — направленность точек $R$, сходящаяся к некоторой точке

$\mathfrak{M}(AP)\setminus R$. Тогда по [6] $\{x_\omega\}$ фундаментальна по каждой псевдометрике $r_\lambda$ и, значит, по каждой метрике $\rho_\lambda$. Следовательно, $\{x_\omega\}$ сходится к некоторой точке $BR\setminus R$. Непрерывность обратного отображения и взаимная однозначность доказываются аналогично.

3. Граничные элементы компактификации Бора.

Теорема 3. *Пусть направленность $\{x_\omega\}$, $x_\omega \in R$, сходится к граничному элементу $BR$. Тогда для всякого $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$*

$$\lambda x_\omega = \alpha_\lambda + P_{\lambda,\omega} + \varepsilon_{\lambda,\omega}, \tag{1}$$

*где $\{P_{\lambda,\omega}\}$ — направленность целых чисел, $\lim\limits_{\omega} P_{\lambda,\omega} = \infty$; $\{\varepsilon_{\lambda,\omega}\}$ — направленность вещественных чисел, $\lim\limits_{\omega} \varepsilon_{\lambda,\omega} = 0$ и $\alpha_\lambda \in [0, 1)$.*

Доказательство. Согласно [6], направленность $\{x_\omega\}$ сходится к граничному элементу $\Leftrightarrow$, когда $\{x_\omega\}$ фундаментальна по каждой метрике $\rho_\lambda$, т. е. $\lim\limits_{\omega'\omega''} \rho_\lambda(x_{\omega'}, x_{\omega''}) = 0$. Ясно, что $\rho_\lambda(x_{\omega'}, x_{\omega''}) = \rho_{\text{сф}}(x_{\omega'}, x_{\omega''}) + |e^{2\pi i\lambda x_{\omega'}} - e^{2\pi i\lambda x_{\omega''}}| = \rho_{\text{сф}}(x_{\omega'}, x_{\omega''}) + 2|\sin \pi\lambda(x_{\omega'} - x_{\omega''})|$. Тогда из условия $\lim\limits_{\omega',\omega''} |\sin \pi\lambda(x_{\omega'} - x_{\omega''})| = 0$ немедленно получаем представление (1), где $\alpha_\lambda = \lim\limits_{\omega} \{\lambda x_\omega\}$.

Следствие. *Две фундаментальные направленности $\{x'_\omega\}$ и $\{x''_\omega\}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда в представлении (1) $\alpha'_\lambda = \alpha''_\lambda$ при всех $\lambda \in R\setminus 0$.*

Вследствие теоремы 3 по каждой граничной точке $t^B$ возникает некоторый набор чисел $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in R\setminus 0}$, $\alpha_\lambda \in [0, 1)$. Ответим на вопрос — в какой степени верно обратное: по $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in R\setminus 0}$ определяется ли $t^B \in BR\setminus R$, иначе говоря, каково глобальное строение границы?

Теорема 4. *Граница $BR\setminus R$ является тором $\Delta$ континуальной размерности ($\Delta$ — декартово произведение континуального числа окружностей).*

Доказательство. Согласно лемме 1 гл. VI [4] граница $BR\setminus R$ гомеоморфна замкнутому и связному подмножеству тора $T = \prod\limits_{\lambda\in R\setminus 0} L_\lambda$, где $L_\lambda$ — единичная окружность. Теперь, воспользовавшись теоремой 6 гл. VI [4] и тем, что множество $Q = \{q_t\}$ всех действительных ненулевых чисел, любая конечная подсистема которого рационально независима, несчетно [4, с. 117], установим гомеоморфизм $\pi$ между $F$ и $\Delta \overset{\text{def}}{=} \prod\limits_{\lambda\in Q} L_\lambda$, взяв в качестве $\pi$ естественную проекцию $F$ на $\Delta$. Действительно, непрерывность $\pi$ имеем по определению проекции, биективность $\pi$ — следствие упомянутой выше теоремы 6 из [4] и теоремы 3, компактность $F$ очевидна, поэтому $\pi$ — гомеоморфизм.

4. Новые компактификации $R$. Пусть $h(x)$ — дифференцируемая на $R$ нечетная функция и $\lim\limits_{x\to\infty} h'(x) = 0$ (например, $|x|^\alpha \operatorname{sign} x$, $0 < \alpha < 1$). Рассмотрим метрику вида

$$\rho_{\lambda,h}(x, y) = \rho_{\text{сф}}(x, y) + |e^{2\pi i\lambda h(x)} - e^{2\pi i\lambda h(y)}|.$$

Как и при доказательстве теоремы 2, можно показать, что пополнение $B_hR = (\widehat{R, U_{B,h}})$ равномерного пространства $(R, U_{B,h})$ по равномерной структуре $U_{B,h}$, порождаемой семейством метрик $\rho_{\lambda,h}$, $\lambda \in R\setminus 0$, является компактификацией $R$. Направленности $\{x_\omega\}$, сходящиеся к граничным элементам $B_hR\setminus R$, имеют вид

$$\lambda h(x_\omega) = \alpha_\lambda + P_{\lambda,\omega} + \varepsilon_{\lambda,\omega} \tag{2}$$

(см. теорему 3). Наконец, для $B_hR$ справедлива теорема, аналогичная теореме 4.

Теорема 5. *При любой функции $h$ указанного вида компактификации $BR$ и $B_hR$ не сравнимы, т. е. $BR \leqslant B_hR$ и $B_hR \leqslant BR$.*

Доказательство. Для доказательства необходимо обнаружить направленности $\{x_\omega\}$ и $\{y_\omega\}$ точек $R$ такие, что $\{x_\omega\}$, сходясь в $BR$, расходится в $B_hR$, а $\{y_\omega\}$, сходясь в $B_hR$, расходится в $BR$. Это легко следует из сопоставления соотношений (1) и (2) при условии, что $\lim\limits_{x\to\infty} h'(x) = 0$.

Замечание 2. На $B_hR$ допускает непрерывное продолжение каждая функция банаховой алгебры (с равномерной нормой) $AP_h$, генерируемой семейством функций вида $f_\lambda(x) = e^{i\lambda h(x)}$.

5. Движение граничных элементов при сдвигах. Теперь несколько уточним теорему 5, обнаружив существенное различие в поведении граничных элементов компактификаций $BR$ и $B_hR$ при сдвигах $S_d(x) \overset{\text{def}}{=\!=} x + d$. Каждому граничному элементу $t^B$ (или $t^{B_h}$) согласно теореме 3 будем ставить в соответствие набор чисел $(\alpha_\lambda(t^B))$, $\lambda \in R \setminus 0$.

Теорема 6. 1. *Для каждого $t^B \in BR \setminus R$ $S_d(\alpha_\lambda(t^B)) = \{\alpha_\lambda(t^B) + \lambda d\}$, где $\{\ldots\}$ — дробная часть.*

2. *Для каждого $t^{B_h} \in B_hR \setminus R$ $S_\alpha(\alpha_\lambda(t^{B_h})) = \alpha_\lambda(t^{B_h})$, т. е. граничные элементы неподвижны при сдвигах.*

Доказательство. Согласно представлению (1) если $x_\omega \to t^B$, то $\lim\limits_\omega \{\lambda x_\omega\} = \alpha_\lambda(t^B)$. Тогда $\{\lambda(x_\omega + d)\} = \{\lambda x_\omega + \lambda d\} = \{[\lambda x_\omega] + \{\lambda x_\omega\} + \lambda d\} = \{\{\lambda x_\omega\} + \lambda d\}$ и, следовательно, $S_d(\alpha_\lambda(t^B)) = \lim\limits_\omega \{\lambda(x_\omega + d)\} = \{\alpha_\lambda(t^B) + \lambda d\}$.

Рассмотрим случай $B_hR$. Если $x_\omega \to t^{B_h}$, то выясним, к чему сходится направленность $(x_\omega + d)$. Ради простоты возьмем в качестве представителя класса эквивалентности $t^{B_h}$ направленность $(x_\omega)$, стремящуюся к $+\infty$. Тогда $\rho_{\lambda,h}(x_\omega, x_\omega + d) = \rho_{\text{сф}}(x_\omega, x_\omega + d) + 2\,|\sin \pi\lambda(h(x_\omega) - h(x_\omega + d))|$. Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} h'(x) = 0$, то по теореме Лагранжа $\lim\limits_\omega (h(x_\omega) - h(x_\omega + d)) = 0$, т. е. $\lim\limits_\omega \rho_{\lambda,h}(x_\omega, x_\omega + d) = 0$ и значит, направленность $(x_\omega + d)$ также сходится к $t^{B_h}$. В силу представления (2) это означает

$$S_d(\alpha_\lambda(t^{B_h})) = \alpha_\lambda(t^{B_h}).$$

6. Связь с «торовыми» расширениями. Выше мы не явно, ссылаясь на результаты [4], использовали связь с теорией «торовых» конформно-инвариантных компактификаций. Теперь рассмотрим это подробнее. Обозначим $R_+ = [0, +\infty)$ и $R_* = \{z: 0 \leqslant \operatorname{Re} z < 1,\ \operatorname{Im} z = 0\}$. Напомним, что $b_U^M Q$ — максимальный элемент полной решетки «торовых» расширений [4, с. 117]. Пусть $[R_+]_B$ обозначает замыкание множества $R_+$ в $BR$, а $[R_*]_M$ — замыкание $R_*$ в $b_U^M Q$.

Теорема 7. *Границы $[R_+]_B \setminus R_+$ и $[R_*]_M \setminus R_*$ гомеоморфны.*

Доказательство. Установим искомый гомеоморфизм между $[R_+]_B \setminus R_+$ и $[R_*]_M \setminus R_*$. Для этого возьмем произвольно граничный элемент $t^B$ и пусть направленность $\{x_\omega\} \equiv t^B$ точек $R_+$ имеет вид $\lambda x_\omega = \alpha_\lambda + P_{\lambda,\omega} + \varepsilon_{\lambda,\omega}$ (см. теорему 3). Ей в соответствие поставим направленность $\{z_\omega\}$ точек $R_*$ с представлением $\lambda\rho_\Gamma(z_0, z_\omega) = \alpha_\lambda + P_{\lambda,\omega} + \varepsilon_{\lambda,\omega}$ (здесь $\rho_\Gamma$ — гиперболическая метрика). Тогда, как следует из теоремы 5 гл. VI [4], направленность $\{z_\omega\}$ сходится к некоторому граничному элементу $b_U^M Q$. Ясно, что указанное соответствие—гомеоморфизм.

7. Заключительные замечания. Отметим, что существует так называемая естественная компактификация $b_\rho X$ метрического пространства $X^\rho$ (полного или нет) [4, 7]. Она обладает тем замечательным свойством, что всякая непрерывная и ограниченная функция $f: X^\rho \to \mathbb{C}$ продолжается непрерывно на $b_\rho X$ тогда и только тогда, когда она равномер-

но непрерывна. В случае круга $Q$ и гиперболической метрики $\rho_\Gamma$ $b_{\Gamma_\rho}Q$ — конформно-инвариантная компактификация [4, 8]. Возьмем теперь в качестве $X^\rho$ прямую $R$ с евклидовой метрикой $\rho(x, y) = |x-y|$. Следующая теорема дает ответ на вопрос о соотношении компактификации Бора $BR$ и естественной компактификации $b_\rho R$.

Теорема 8. *Компактификация Бора $BR$ предшествует естественному расширению $b_\rho R$, т. е. $BR \leqslant b_\rho R$.*

Доказательство теоремы следует из того факта, что всякая почти периодическая функция на $R$ ограничена и равномерно непрерывна, а поэтому продолжается непрерывно на $b_\rho R$.

Замечание 3. Нам неизвестно, можно ли в теореме 8 поставить знак равенства?

Замечание 4. Обозначим через $C_0$ алгебру непрерывных функций $f$ на $R$ со свойством $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Очевидно, что $AP + C_0$ — банахова алгебра с единицей относительно равномерной нормы. В работе [9] рассматривалось пространство максимальных идеалов $\mathfrak{M}(AP + C_0)$ (здесь же приводится достаточно громоздкое описание $\mathfrak{M}(AP + C_0)$) в связи с теорией операторов Теплица. Используя теорему Стоуна—Вейерштрасса, легко показать, что $\mathfrak{M}(AP + C_0) = BR$.

1. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца.— М. : Физматгиз, 1960.— 316 с .
2. *Гамелин Т.* Равномерные алгебры.— М. : Мир, 1973.— 336 с.
3. *Иванов О. В.* Об одной теореме И. М. Гельфанда.— Укр. мат. журн., 1983, 35, № 1, с. 89—91.
4. *Иванов О. В., Суворов Г. Д.* Полные решетки конформно-инвариантных компактификаций области.— Киев : Наук. думка, 1982.— 200 с.
5. *Бурбаки Н.* Общая топология : Основные структуры.— М. : Наука, 1968.— 272 с.
6. *Келли Дж. Л.* Общая топология.— М. : Наука, 1968.— 384 с.
7. *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях.— М. : Наука, 1974.— 424 с.
8. *Иванов О. В.* Нормальные функции и естественное расширение плоской области.— Докл. АН СССР, 1983, 268, № 1, с. 26—29.
9. *Douglas R. G.* Banach algebra techniques in the theory of Toeplitz operators.— CBMS, Providence, Amer. Math. Soc., 1973, N 15, p. 1—53.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 24.01.84