УДК 519.41/47

А. В. Крайчук

Группы с системами инвариантных подгрупп бесконечного индекса

Неабелевы группы, все подгруппы которых инвариантны, хорошо известны. Это так называемые гамильтоновы группы ($\mathcal{H}$-группы). Конечные гамильтоновы группы изучал Дедекинд [1], бесконечные — Бэр [2].

Если условие инвариантности налагать не на все, а только на некоторые, специально выделенные подгруппы произвольной неабелевой группы, то можно получать различные обобщения гамильтоновых групп. Например, Г. М. Ромалис и Н. Ф. Сесекин [3, 4] изучали группы, у которых инвариантны все неабелевы подгруппы. Произвольные группы (как конечные, так и бесконечные) с этим условием получили название метагамильтоновых групп. С. Н. Черников изучал бесконечные неабелевы группы с условием инвариантности для всех бесконечных абелевых подгрупп ($\mathcal{I}\mathcal{H}$-группы) [5] и бесконечные неабелевы группы с условием инвариантности для всех бесконечных неабелевых подгрупп ($\overline{\mathcal{I}\mathcal{H}}$-группы) [6], а также бесконечные неабелевы группы, в которых инвариантны все бесконечные подгруппы ($\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{H}$-группы) [7].

Обобщению гамильтоновых групп посвящена и настоящая работа. В ней изучаются бесконечные неабелевы группы, все подгруппы бесконечного индекса которых инвариантны, и непериодические группы, у которых инвариантны все бесконечные подгруппы бесконечного индекса. Тема настоящей работы предложена С. Н. Черниковым.

1. Строение $\mathcal{H}(i)$-групп. Для краткости изложения введем следующее определение.

Определение 1. *Бесконечную неабелеву группу G, все подгруппы бесконечного индекса которой инвариантны, назовем $\mathcal{H}(i)$-группой.*

Непосредственно из определения 1 вытекает справедливость следующего утверждения. *Периодическая $\mathcal{H}(i)$-группа является гамильтоновой группой.*

В самом деле, пусть G — периодическая $\mathcal{H}(i)$-группа и g — ее произвольный элемент. Циклическая подгруппа $\{g\}$ конечна и потому имеет в G бесконечный индекс. Отсюда сле ует, что произвольная циклическая подгруппа группы G инвариантна в G. Но тогда в G инвариантны все подгруппы. И так как группа G неабелева (как $\mathcal{H}(i)$-группа), то она гамильтонова.

Непосредственно из определения 1 вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть G — $\mathcal{H}(i)$-группа. Если подгруппа F имеет в G бесконечный индекс, то подгруппа F либо абелева, либо гамильтонова.*

Следствие 1. *Если F — конечная подгруппа $H(i)$-группы G, то F либо абелева, либо гамильтонова группа.*

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть G — непериодическая группа, все подгруппы бесконечного индекса которой инвариантны. Если всякая бесконечная циклическая подгруппа из G имеет бесконечный индекс в G, то группа G абелева.*

Доказательство. Пусть G — непериодическая группа, удовлетворяющая условию леммы и g — ее произвольный элемент. Если g имеет конечный порядок, то подгруппа $\{g\}$ имеет бесконечный индекс и, следовательно, инвариантна в G. Если g — элемент бесконечного порядка, то индекс подгруппы $\{g\}$ бесконечен по условию, поэтому $\{g\}$ инвариантна в G.

Таким образом, произвольная циклическая подгруппа $\{g\}$ инвариантна в G. Но тогда в G инвариантна каждая подгруппа. Поскольку группа G содержит элементы бесконечного порядка, то она не может быть гамильтоновой группой (см. [8], теорема 12.5.4) и, следовательно, абелева.

Следствие 2. *Непериодическая $\mathcal{H}(i)$-группа содержит бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса.*

Теорема 1. *Группы следующих типов и только они являются непериодическими $\mathcal{H}(i)$-группами:*

1) $G = \mathcal{H} \leftthreetimes L$, где $\mathcal{H}$ — конечная гамильтонова группа, L — бесконечная циклическая группа и для всякого $h \in \mathcal{H}$, $\{h\} \triangle G$;

2) неабелева группа $G = A \leftthreetimes L$, где A — конечная абелева группа, L — бесконечная циклическая группа и для всякого $a \in A$ $\{a\} \triangle G$.

Доказательство. Пусть G — непериодическая $\mathcal{H}(i)$-группа Рассмотрим ее периодическую часть $T(G)$. Покажем, что $T(G)$ имеет конечный порядок. Действительно, если $|T(G)| = \infty$, $x \in T(G)$ и g — произвольный элемент бесконечного порядка группы G, то $x\{g\}$ — смежный класс группы G по подгруппе $\{g\}$ и поэтому $[G:\{g\}] \geqslant |T(G)| = \infty$. Отсюда $[G:\{g\}] = \infty$. Ввиду произвольности выбора элемента g, получаем, что всякая бесконечная циклическая подгруппа $\{g\}$ $\mathcal{H}(i)$-группы G имеет бесконечный индекс, что противоречит утверждению следствия 2. Следовательно, порядок $T(G)$ конечен.

Покажем, что фактор-группа $G/T(G)$ является бесконечной циклической группой. Так как G — непериодическая $\mathcal{H}(i)$-группа, то в силу следствия 2 в G существует элемент g бесконечного порядка такой, что $[G:\{g\}] < \infty$. Но тогда G содержит и нормальный делитель $\{g_0\}$ ($\{g_0\} \leqslant \{g\}$) конечного индекса. Пусть $\overline{g}_0$ — образ элемента g_0 в группе $G/T(G)$. Ясно, что $\overline{g}_0 \neq 1$. Тогда

$$[G/T(G):\{\overline{g}_0\}] = [G:\{g_0\}] < \infty.$$

Таким образом, группа без кручения $G/T(G)$ имеет циклическую подгруппу $\{\overline{g}_0\}$ конечного индекса. Поэтому (см. [9]) $G/T(G)$ — бесконечная циклическая группа. Следовательно, непериодическая $\mathcal{H}(i)$-группа G является расширением конечной группы $T(G)$ с помощью бесконечной циклической группы. Такое расширение, очевидно, расщепляемо.

Таким образом, $G = T(G) \leftthreetimes L$, $T(G)$ — конечная группа, L — бесконечная циклическая группа. Порядок группы $T(G)$ конечен, поэтому ввиду следствия 1 $T(G)$ либо абелева, либо гамильтонова группа. Далее, если g — произвольный элемент из $T(G)$, то, очевидно, $\{g\} \triangle G$. Следовательно, группа G является группой типа 1 либо 2. Необходимость доказана.

Достаточность следует из того, что все подгруппы бесконечного индекса групп типа 1, 2 содержатся в периодической части $T(G)$ группы G.

2. Непериодические группы, в которых инварианты все бесконечные подгруппы бесконечного индекса.

Лемма 3. *Пусть G — непериодическая группа, содержащая бесконечные подгруппы бесконечного индекса, в которой все такие подгруппы инвариантны. Тогда в G инвариантна каждая бесконечная циклическая подгруппа.*

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что каждая бесконечная циклическая подгруппа группы G с указанным в лемме свойством имеет бесконечный индекс. Предположим противное. Пусть G — непериодическая группа, все бесконечные подгруппы бесконечного индекса которой инвариантны, и некоторая ее бесконечная циклическая подгруппа $\{g\}$ имеет в ней конечный индекс. Тогда G содержит и нормальный делитель $\mathcal{N}$ конечного индекса, причем $\mathcal{N} \leqslant \{g\}$.

Таким образом, G является конечным расширением бесконечной циклической группы и, очевидно, не имеет бесконечных подгрупп бесконечного индекса, что противоречит условию леммы. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Лемма 4. *Непериодическая группа G, содержащая бесконечные подгруппы бесконечного индекса, все подгруппы которой такого вида инвариантны, резрешима.*

Доказательство. Пусть G — непериодическая группа, обладающая указанным в лемме свойством. Возьмем какой-нибудь ее элемент g бесконечного порядка. Пусть A — его централизатор в группе G. В силу леммы 3 бесконечная циклическая подгруппа $\{g\}$ инвариантна в G, поэтому $A \lhd G$ и $[G:A] \leqslant 2$.

Пусть a — произвольный элемент из A. Если он имеет конечный порядок, то в бесконечной абелевой группе N, порожденной элементами a и g, циклическая подгруппа $\{a\}$ характеристична и потому инвариантна в G (так как, очевидно, группа $N = \{g\} \times \{a\}$ имеет в G бесконечный индекс, и, следовательно, инвариантна в G).

Если a — элемент бесконечного порядка, то циклическая подгруппа $\{a\}$ инвариантна в G в силу леммы 3. Таким образом, циклическая подгруппа $\{a\}$ в обоих случаях инвариантна в группе G, а значит, и в ее подгруппе A. Но тогда в A инвариантны все подгруппы из A. И так как, очевидно, A содержит элементы бесконечного порядка, то она не может быть гамильтоновой и, следовательно, является абелевой группой.

Таким образом, группа G содержит абелев нормальный делитель индекса не более числа 2 и, следовательно, разрешима.

Лемма 5. *Если в непериодической группе G каждая бесконечная подгруппа бесконечного индекса инвариантна, то в G инвариантны все бесконечные подгруппы.*

Доказательство. Пусть G — непериодическая группа с указанными в лемме свойствами и $\mathcal{H}$ — ее произвольная бесконечная подгруппа. Покажем, что $\mathcal{H}$ инвариантна в G.

Если $[G:\mathcal{H}] = \infty$, то подгруппа $\mathcal{H}$ инвариантна в G. Пусть $[G:\mathcal{H}] < < \infty$. Тогда $\mathcal{H}$ не может быть периодической группой. Если $\mathcal{H}$ периодическая и g—элемент бесконечного порядка из G, то при $n \in \mathbb{Z}$ $g^n\mathcal{H}$—различные смежные классы группы G по подгруппе $\mathcal{H}$ и потому $[G:\mathcal{H}] \geqslant |g| = \infty$. Таким образом, если $[G:\mathcal{H}] < \infty$, то $\mathcal{H}$ — непериодическая группа.

Пусть h — любой элемент из $\mathcal{H}$ и x — произвольный элемент из G. Если h — элемент бесконечного порядка, то в силу леммы 3 $x^{-1}hx \in \mathcal{H}$.

Пусть h имеет конечный порядок. Подгруппа $\mathcal{H}$ непериодическая, поэтому в ней найдется элемент g бесконечного порядка. Рассмотрим группу $\{h, g\} \leqslant \mathcal{H}$. В силу леммы 3 $\{h, g\} = \{g\} \rtimes \{h\}$. Имеем $\{g\} < \{g\} \rtimes \{h\} < G$, поэтому $[G:\{g\}] = [G:\{g\} \rtimes \{h\}] \cdot [\{g\} \rtimes \{h\}:\{g\}]$. Так как $[G:\{g\}] = \infty$ (см. доказательство леммы 3) и $[\{g\} \rtimes \{h\}:\{g\}] < \infty$, то $[G:\{g\} \rtimes \{h\}] = \infty$ и $\{g\} \rtimes \{h\} \lhd G$. Поэтому для любого x из G получаем $x^{-1}hx \in \{g\} \rtimes \{h\} \leqslant \mathcal{H}$.

В силу лемм 4 и 5 непериодическая группа, содержащая бесконечные подгруппы бесконечного индекса, в которой все подгруппы такого рода инвариантны, является бесконечной разрешимой группой и в ней инвариантны все бесконечные подгруппы. С другой стороны, бесконечные разрешимые группы, в которых инвариантны все подгруппы, могут быть неабелевыми только при отсутствии в них элементов бесконечного порядка (см. [10], теорема 6.10). Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если непериодическая группа G имеет бесконечные подгруппы бесконечного индекса и все они инвариантны в ней, то она абелева.*

1. *Dedekind R.* Über Gruppen, deren sämmtliche Teiler Normalteiler sind.— Math. Ann. 1897, **48**, S. 548—561.
2. *Baer R.* Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe.—Heidelberg: Akademia, 1933 Bd 2, S. 12—17.
3. *Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф.* О метагамильтоновых группах.— Мат. зап. Урал, ун-та. 1966, 5, № 3, с. 101—106.
4. *Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф.* О метагамильтоновых группах, II.— Там же, 1968, **6**, № 3, с. 50—52.
5. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы бесконечных подгрупп.— Докл. АН СССР, 1966, **171**, № 4, с. 806—809.
6. *Черников С. Н.* Бесконечные неабелевы группы с условием инвариантности для бесконечных неабелевых подгрупп.— Там же, 1970, **194**, № 6, с. 1280—1283.
7. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы бесконечных подгрупп.— Укр. мат. журн., 1967, **19**, № 6, с. 111—131.
8. *Холл М.* Теория групп.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 468 с.
9. *Федоров Ю. Г.* О бесконечных группах, все нетривиальные подгруппы которых имеют конечный индекс.— Успехи мат. наук, 1959, **6**, № 1, с. 187—189.
10. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.

Киев. пед. ин-т

Получено 11.09.84,
после доработки — 19.03.85