УДК 517.956

Е. А. КАЛИТА, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, Донецк)

Регулярность граничной точки для квазилинейных эллиптических систем второго порядка

Рассматривается квазилинейная эллиптическая система дивергентного вида. Получены условия непрерывности обобщенного решения и его градиента в граничной точке. Эти условия зависят как от геометрии области, так и от разброса собственных чисел матрицы коэффициентов системы.

Розглядається квазілінійна еліптична система дивергентного вигляду. Одержані умови неперервності узагальненого розв'язку та його градієнту в граничній точці. Ці умови залежать як від геометрії області, так і від розкиду власних чисел матриці коефіцієнтів системи.

Известно, что обобщенное решение задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических систем второго порядка с ограниченными коэффициентами может быть разрывно как внутри области, так и на гладкой границе [1]. Однако при определенных ограничениях на разброс собственных чисел матрицы коэффициентов системы решение будет гельдерово в гладкой области [2]. В данной работе получены условия, связывающие разброс собственных чисел матрицы коэффициентов и геометрию области, при которых решение или его первые производные будут непрерывны в нерегулярной граничной точке.

Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ задана эллиптическая система

$$\sum_{k=1}^{n} D_k A_k^i (x, u, Du) = A^i (x, u, Du), \quad i = \overline{1, N}. \tag{1}$$

Рассматривается обобщенное решение системы $u \in \overset{0}{W}{}_2^1 (\Omega)$. Коэффициенты системы удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}\sum_{i,k} A_k^i (x, u, \xi)\, \xi_k^i \geqslant \mu |\xi|^2 - c|u|^p - f^2(x),\\ \sum_{i,k} |A_k^i (x, u, \xi)|^2 \leqslant \nu |\xi|^2 + c|u|^p + f^2(x),\\ |A^i (x, u, \xi)| \leqslant cV^{1/p'} + f_0(x),\\ \mu,\ \nu > 0,\ p = \frac{2n}{n-2}\ (\text{при } n = 2\ p < \infty),\\ p' = \frac{p}{p-1},\ V = |\xi|^2 + |u|^p,\end{gathered} \tag{2}$$

буквой c будем обозначать различные несущественные постоянные.

Пусть $0 \in \partial\Omega$. Определим характеристику близости системы к оператору Лапласа (для квазилинейных систем — характеристику разброса собственных чисел матрицы коэффициентов) в окрестности нуля — наименьшую константу K (предполагаем, что inf достигается), для которой при некоторых $\varkappa^i \in \mathbb{R}$ и любых $x \in \Omega_\rho$, u, ξ

$$\left(\sum_{i,k} |\xi_k^i - \varkappa^i A_k^i(x, u, \xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant K^{\frac{1}{2}} |\xi| + c|u|^{p/2} + cf(x).$$

Здесь $\Omega_\rho = \Omega_{\rho,0}$, $\Omega_{\rho,x} = \Omega \cap B_{\rho,x}$, $B_{\rho,x} = \{z : |z - x| < \rho\}$, $\rho > 0$ — произвольно малое число. Отметим, что $K \leqslant 1 - \mu^2/\nu$ (оценка следует из (2) при $\varkappa^i = \mu/\nu$). Для квазилинейных систем K выражается через собственные числа матрицы коэффициентов [2, с. 59]. Геометрию области будем описывать величиной $\lambda_\tau = \inf\limits_{\tau<r<\rho} \lambda_{r,0}$, где $\lambda_{r,x}$ — первое собственное число задачи Дирихле для оператора Бельтрами в области $\omega_{r,x} = \{\theta : |\theta| = 1, r\theta + x \in \Omega\}$ (если $\omega_{r,x}$ содержит несколько компонент связности, берем наименьшее из чисел, соответствующих этим компонентам).

Обозначим через $L_{q,a}$ пространство с нормой $\sup\limits_{x_0 \in \Omega} \| |x - x_0|^{a/q} \cdot \|_{q,\Omega}$, где $\|\cdot\|_{q,\Omega}$ — норма в $L_q(\Omega)$. В теоремах 1, 3, 4 будем предполагать выполненным следующее условие на Ω: при некотором $\gamma > 0$ области $|x|^{-1}\Omega_{\gamma|x|,x}$ диффеоморфны полушару радиуса γ равномерно по $x \in \partial\Omega$, $0 < |x| < \rho$.

Теорема 1. *Пусть система* (1) *квазилинейна, т. е.* $A_k^i(x, u, \xi) = \sum\limits_{j,l} A_{kl}^{ij}(x, u)\xi_l^j + A_{k0}^i(x, u)$, *и коэффициенты* A_{kl}^{ij} *непрерывны по* x, u. *Пусть* $n > 2$, $\lambda_0 = (n-2)^2 \dfrac{K}{1-K}$, $(\lambda_\tau - \lambda_0)\ln\dfrac{1}{\tau} \to \infty$ *при* $\tau \to 0$; $f \in L_{2\alpha,a}$, $f_0 \in L_{p'\alpha, ap'/2}$, $\alpha > 1$, $a < 2\alpha - n$. *Тогда* $u \in C(\overline{\Omega_\rho})$.

Замечание 1. При $\lambda_0 > (n-2)^2 \dfrac{K}{1-K}$ решение гельдерово в $\overline{\Omega_\rho}$ [3].

Если $\lambda_0 < n - 1$ (в гладкой точке $\lambda_0 = n - 1$), то выполнено условие гельдеровости решения в гладкой области $K(1 + (n-2)^2(n-1)^{-1}) < 1$ [2, с. 91], и условия на гладкость коэффициентов и $\partial\Omega$ можно ослабить.

Теорема 2. *Пусть* $n > 2$, $\lambda_0 = (n-2)^2 \dfrac{K}{1-K} < n - 1$; *при некотором* $\gamma > 0$ $\lambda_{\tau,x} \geqslant \lambda_\tau$ $\forall x \in \partial\Omega \cap B_\rho$, $\tau < \gamma|x|$; $f \in L_{2,a}$, $f_0 \in L_{p',ap'/2}$, $a < 2 - n$. *Тогда* $u \in L_\infty(\Omega_\rho)$. *Если также* $(\lambda_\tau - \lambda_0)\ln\dfrac{1}{\tau} \to \infty$ *при* $\tau \to 0$, *то* $u \in C(\overline{\Omega_\rho})$.

Приведенному условию на область удовлетворяют, например, полиэдры такие, что $B_\rho \setminus \Omega$ выпукло ($B_\rho = B_{\rho,0}$).

Пусть коэффициенты системы дифференцируемы по всем аргументам и, кроме (2), удовлетворяют условиям

$$\sum_{i,j,k,l} A_{kl}^{ij}(x, u, \xi)\eta_k^i \eta_l^j \geqslant \mu' |\eta|^2, \quad |A_{kl}^{ij}(x, u, \xi)| \leqslant c,$$

$$\left|\frac{\partial A_k}{\partial x}\right| \leqslant cr^{-1}V^{\frac{1}{2}} + g_1(x), \quad \left|\frac{\partial A}{\partial x}\right| \leqslant cr^{-1}V^{\frac{1}{p'}} + g_0(x), \tag{3}$$

$$\left|\frac{\partial A_k}{\partial u}\right|^q + \left|\frac{\partial A}{\partial \xi}\right|^q \leqslant cr^{-q}V + g(x), \quad \left|\frac{\partial A}{\partial u}\right|^{q/2} \leqslant cr^{-q/2}V + g(x),$$

$$A_{kl}^{ij} = \partial A_k^i / \partial \xi_l^j, \quad r = |x|, \quad q = \frac{2p}{p-2}.$$

Теорема 3. *Пусть* $\lambda_0 = \left(\frac{n}{2}\sqrt{\frac{K}{1-K}} + \sqrt{\frac{K}{1-K}\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n - 1}\right)^2$, $(\lambda_\tau - \lambda_0)\ln\frac{1}{\tau} \to \infty$ *при* $\tau \to 0$; $g_1 \in L_{2\alpha, a}$, $g_0 \in L_{p'\alpha, ap'/2}$, $g \in L_\alpha$, $\alpha > 1$, $a < 2\alpha - n$; *коэффициенты* A_{kl}^{ij} *непрерывны по всем аргументам. Тогда* $u \in C^1\overline{(\Omega_\rho)}$.

Замечание 2. Если λ_0 больше указанной величины, то Du гельдерово в $\overline{\Omega}_\rho$ [3].

Если выполнено условие гельдеровости градиента решения в гладкой области $K'(1 + (n-2)^2(n-1)^{-1}) < 1$ [4], условие непрерывности A_{kl}^{ij} можно опустить. Здесь K' — наименьшая константа, для которой $\| I - \varkappa A(x, u, \xi)\|^2 \leqslant K'$, $I = (\delta^{ij}\delta_{kl})$ — единичная матрица, $\varkappa A = (\varkappa^i A_{kl}^{ij})$, норма — норма линейного оператора в евклидовом пространстве.

Теорема 4. *Пусть* $\lambda_0 = \left(\frac{n}{2}\sqrt{\frac{K}{1-K}} + \sqrt{\frac{K}{1-K}\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n - 1}\right)^2$, $K' < \frac{n-1}{(n-2)^2 + n - 1}$, $g_1 \in L_{2,a}$, $g_0 \in L_{p', ap'/2}$, $g \in L_{1,b}$, $a < 2 - n$, $b < 0$. *Тогда* $u \in W_\infty^1(\Omega_\rho)$. *Если также* $(\lambda_\tau - \lambda_0)\ln\frac{1}{\tau} \to \infty$ *при* $\tau \to 0$, *то* $u \in C^1\overline{(\Omega_\rho)}$.

Доказательства теорем 1 — 4 опираются на следующую интегральную оценку.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (2), $\lambda_0 > 0$, $f \in L_{2,a,0}$, $f_0 \in L_{p', ap'/2, 0}$, $a < a(0)$. *Тогда при достаточно малых* τ

$$\tau^{a(\tau)} \| Du \|_{2, \Omega_\tau}^2 \leqslant c.$$

Здесь $a(\tau) \in (-\sqrt{4\lambda_\tau + (n-2)^2}; 0)$ *определяется условием* $KM(\lambda_\tau, a) = 1$,

$$M(\lambda, a) = \begin{cases} 1 + \lambda a^2\left(\lambda + \frac{(n-2)^2 - a^2}{4}\right)^{-2}, & a \leqslant 2 - n; \\ 1 + a^2\left(\lambda + \frac{(n-2)^2 - a^2}{4}\right)^{-1}, & a \geqslant 2 - n, \end{cases}$$

$L_{q,a,0}$ — *пространство с нормой* $\| |x|^{a/q} \cdot \|_{q,\Omega}$.

Происхождение функции $M(\lambda, a)$ объясняет лемма 2.

Обозначим $\| u \|_{q,a,Q} = \| r_\tau^{a/q} u \|_{q,Q}$, $r_\tau = \begin{cases} r, & r > \tau; \\ \tau, & r \leqslant \tau, \end{cases}$ $r = |x|$, при $q = 2$, $a = 0$, $Q = \Omega_\rho$ соответствующий индекс опускаем, $DuDv = \sum_{k=1}^{n} D_k u D_k v$.

Лемма 2. *Пусть* $-(4\lambda_\tau + (n-2)^2)^{\frac{1}{2}} < a < 0$, $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_\rho)$, $v = u r_\tau^a$. *Тогда с некоторым* $c_a > 0$

$$(\| Du \|_a^2 + c_a \tau^a \| Du \|_{\Omega_\tau}^2) \| Dv \|_{-a}^2 \leqslant M(\lambda_\tau, a) \left(\int DuDv dx\right)^2.$$

Доказательство леммы 2. Достаточно рассмотреть $u \in \overset{0}{C}{}^\infty(\Omega_\rho)$. Перейдем в полярную систему координат и обозначим

$$I = \int_0^\rho \int_{\omega_r} (u'^2 - r^{-2} u \Delta_\theta u) r_\tau^a r^{n-1} d\theta dr, \quad I_0 = \int_0^\tau \text{idem},$$

$$I_u = \int_\tau^\rho \int_{\omega_r} u^2 r^{a+n-3} d\theta dr, \quad I_\tau = \tau^{a+n-2} \int_{\omega_\tau} u^2 d\theta,$$

где Δ_θ — оператор Бельтрами, штрих обозначает дифференцирование по

r, $\omega_r = \omega_{r,0}$. Интегрируя по частям, находим

$$\| Du \|_a^2 = I, \quad \| Dv \|_{-a}^2 = I - a(n-2) I_u - aI_\tau,$$

$$\int DuDvdx = I - a\frac{a+n-2}{2} I_u - \frac{a}{2} I_\tau,$$

откуда

$$\| Du \|_a^2 \| Dv \|_{-a}^2 - \left(\int DuDvdx\right)^2 = a^2 I_u \left(I - \left(\frac{a+n-2}{2}\right)^2 I_u - \right.$$

$$\left. - \frac{a+n-2}{2} I_\tau\right) - \frac{a^2}{4} I_\tau^2. \tag{4}$$

Применяя неравенство Харди в виде

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} u'^2 r^{b+1} dr \geqslant c(b-c) \int_{\rho_1}^{\rho_2} u^2 r^{b-1} dr - cu^2 r^b \Big|_{\rho_1}^{\rho_2}, \quad c \in \mathbb{R},$$

при $c = \dfrac{a+n-2}{2}$ на интервале (τ, ρ) и учитывая $-\int\limits_{\omega_r} u\Delta_\theta u d\theta \geqslant \lambda_r \int\limits_{\omega_r} u^2 d\theta$, получаем

$$\int DuDvdx \geqslant \left(\lambda_\tau + \frac{(n-2)^2 - a^2}{4}\right) I_u + \frac{n-2}{2} I_\tau + I_0. \tag{5}$$

Отсюда с учетом (4) следует

$$\| Du \|_a^2 \| Dv \|_{-a}^2 - M(\lambda_\tau, a)\left(\int DuDvdx\right)^2 \leqslant (1 - M(\lambda_\tau, a)) I_0 \int DuDvdx \tag{6}$$

при $2 - n \leqslant a \leqslant 0$. При $a < 2 - n$ представляя I в виде

$$I = \left(1 + \frac{(n-2)^2 - a^2}{4\lambda_\tau}\right) I + \frac{a^2 - (n-2)^2}{4\lambda_\tau} I$$

и применяя неравенство Харди ко второму слагаемому, находим

$$\left(\int DuDvdx\right)^2 \geqslant \left(\lambda_\tau + \frac{(n-2)^2 - a^2}{4}\right) I_u \left\{\left(1 + \frac{(n-2)^2 - a^2}{4\lambda_\tau}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(I - \left(\frac{a+n-2}{2}\right)^2 I_u - \frac{a+n-2}{2} I_\tau\right) + \frac{n-2}{2} I_\tau\right\} + I_0 \int DuDvdx,$$

что вместе с (4) приводит к (6). Утверждение леммы будет следовать из (6), если мы покажем, что $\| Dv \|_{-a}^2 \leqslant c \int DuDvdx$. Имеем

$$\| Dv \|_{-a}^2 - \int DuDvdx = a\frac{2-n-a}{2} I_u - \frac{a}{2} I_\tau,$$

откуда с учетом (5) следует нужная оценка при $n > 2$. При $n = 2$ $\lambda_\tau \geqslant 1/4$, и по неравенству Харди при $c = -1/2$ в (5) $I_0 \geqslant \dfrac{1}{2} I_\tau$. Отсюда вытекает нужная оценка.

Замечание 3. $\| Dv \|_b \asymp \| Du \|_{b+2a}$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, где константы эквивалентности зависят только от n, c, ε : $|a|, |b| \leqslant c < \infty$, $\lambda_\tau \geqslant \varepsilon > 0$.

Доказательство леммы 1. Интегральное тождество для системы (1) запишем в виде

$$\int DuDvdx = \int \left\{\sum_{i,k} (D_k u^i - \varkappa^i A_k^i) D_k v^i - \sum_i \varkappa^i A^i v^i\right\} dx,$$

$$v^i = c_i \tilde{u}^i r_\tau^a, \quad \tilde{u} = u\psi, \quad \psi \in \overset{0}{C}{}^\infty (B_\rho), \quad \psi|_{B_{\rho/2}} = 1, \quad |D\psi| \leqslant c/\rho,$$

c_i — нормирующий множитель такой, что $\| Dv^i \|_{-a} = \| D\tilde{u}^i \|_a$. По неравенству Гельдера и определению K получаем

$$\int D\tilde{u}Dvdx \leqslant K^{1/2} \| D\tilde{u} \|_a \| \bar{D}v \|_{-a} + c(\| \tilde{u} \|_{p,b}^{p/2} + \| f \|_b) \| Dv \|_{-b} +$$
$$+ c \| A \|_{p',bp'/2} \| v \|_{p,-bp/2} + c\rho^a U_{\Omega_\rho \setminus \Omega_{\rho/2}}, \tag{7}$$
$$U_Q = \| Du \|_Q^2 + \| u \|_{p,Q}^p.$$

По вложению пространств Соболева

$$\| \tilde{u} \|_{p,b} \leqslant c \| D\tilde{u} \|_{2b/p} + c \| \tilde{u} \|_{2b/p-2,\Omega_\rho \setminus \Omega_\tau}.$$

Поскольку $\lambda_0 > 0$, имеем

$$\| \tilde{u} \|_{b-2}^2 \leqslant -\frac{1}{\lambda_0} \int \tilde{u}\Delta_\theta \tilde{u} r_\tau^b r^{-2} dx \leqslant c \| D\tilde{u} \|_b^2 \qquad \forall b \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Члены, мажорирующие A^i, оцениваются аналогично. Применяя лемму 2 в левой части (7), получаем

$$M^{-\frac{1}{2}}(\lambda_\tau, a) \sum_i (\| D\tilde{u}^i \|_a^2 + c_a \tau^a \| Du^i \|_{\Omega_\tau}^2)^{\frac{1}{2}} \| D\tilde{u}^i \|_a \leqslant$$

$$\leqslant K^{\frac{1}{2}} \| D\tilde{u} \|_a^2 + c(\| D\tilde{u} \|_{2b/p}^{p/2} + F_{b,\Omega_\rho}^{1/2}) \| Dv \|_{-b} + c\rho^a U_{\Omega_\rho}, \tag{9}$$
$$F_{2a,Q} = \| r^a f \|_Q^2 + \| r^a f_0 \|_{p',Q}^2.$$

Положим $b = a > a(0)$. Тогда

$$\| D\tilde{u} \|_{2b/p}^{p/2} \leqslant \| D\tilde{u} \|^{p/2-1} \| D\tilde{u} \|_a \leqslant \varepsilon_\rho \| Du \|_a,$$

$\varepsilon_\rho \to 0$ при $\rho \to 0$ по абсолютной непрерывности интеграла ($\| D\tilde{u} \| \leqslant c \| Du \|$, поскольку $\lambda_0 > 0$). При $a > a(0)$ $KM(\lambda_\tau, a) < 1$ равномерно по $\tau > 0$, поэтому при достаточно малом ρ из (9) получаем равномерную по $\tau > 0$ ограниченность $\| D\tilde{u} \|_a$.

Положим теперь $a = a(\tau)$. Выбирая $b < a(\tau)$ так, что $2b/p > a(0)$, согласно замечанию 3 в (9) находим $(\| D\tilde{u} \|_{2b/p}^{p/2} + F_{b,\Omega_\rho}^{1/2}) \| Dv \|_{-b} \leqslant c$, где c не зависит от $\tau > 0$. Учитывая $M^{-1/2}(\lambda_\tau, a(\tau)) = K^{1/2}$ и применяя элементарное неравенство $\sqrt{x(x+y)} \geqslant x + y/3$, $0 \leqslant y \leqslant x$, получаем $\tau^{a(\tau)} \| Du \|_{\Omega_\tau}^2 \leqslant c\rho^{a(\tau)} U_{\Omega_\rho} + cF_{b,\Omega_\rho}$.

Доказательство теорем начнем со следующего замечания. В теоремах 1, 2 условия $\lambda_0 = (n-2)^2 \dfrac{K}{1-K}$, $(\lambda_\tau - \lambda_0) \ln \dfrac{1}{\tau} \to \infty$ эквивалентны $a(0) = 2 - n$, $(a(0) - a(\tau)) \ln \dfrac{1}{\tau} \to \infty$ (производная $\partial a/\partial \lambda$ в силу условия $KM(\lambda, a) = 1$ отрицательна). Поэтому $\tau^{-a(\tau)+2-n} \to 0$ при $\tau \to 0$ (если выполнено только $\lambda_0 = (n-2)^2 \dfrac{K}{1-K}$, то $\tau^{-a(\tau)+2-n} \leqslant c < \infty$). Аналогично в теоремах 3, 4 $\tau^{-a(\tau)-n} \to 0$ (или $\tau^{-a(\tau)-n} \leqslant c < \infty$).

Доказательство теоремы 1. Согласно теореме 3.1 [5] $\forall c_0 < \infty$ $\exists \rho$, $\varepsilon > 0$ такие, что если $R \leqslant \min(\rho, \gamma |x|)$, $x \in \Omega$, $\varphi(R) \equiv R^{2-n} \| Du \|_{\Omega_{R,x}}^2 < \varepsilon$, $|[u]_{\Omega_{R,x}}| \leqslant c_0$, $[u]_Q \equiv \int_Q u dx/\mathrm{mes}\, Q$, то при $r \leqslant R$

$$\varphi(r) \leqslant \left(\frac{r}{R}\right)^\delta \{\varphi(R) + c[u]_{\Omega_{R,x}}^2 + cR^\sigma\}, \tag{10}$$

где $\sigma > \delta > 0$ зависят от α, a. Согласно лемме 1 при достаточно малом ρ, $x \in \Omega_\rho$, $R = \gamma |x|$, $\tau = |x| + R$

$$\varphi(R) \leqslant c\tau^{2-n} \| Du \|^2_{\Omega_\tau} \leqslant c\tau^{-a(\tau)+2-n} < \varepsilon,$$

$$[u]^2_{\Omega_{R,x}} \leqslant c\tau^{-n} \| u \|^2_{\Omega_\tau} \leqslant c\tau^{2-n} \| Du \|^2_{\Omega_\tau} \leqslant \varepsilon.$$

Тогда $\varphi(r) \leqslant cr^\delta \tau^{-a(\tau)+2-n-\delta}$, откуда по лемме Морри следует гельдеровость u вне любой окрестности нуля и оценка $\left(\operatorname{osc}_{\Omega_\tau \setminus \Omega_{\tau/2}} u\right)^2 \leqslant c\tau^{-a(\tau)+2-n}$. Поскольку $u|_{\partial\Omega} = 0$, получаем $\max_{\Omega_\tau \setminus \Omega_{\tau/2}} |u| \to 0$ при $\tau \to 0$.

Доказательство теоремы 2. Поскольку $KM(n-1, 2-n) < 1$, для внутренних точек $x \in \Omega_\rho$, рассуждая аналогично доказательству леммы 1 (пробную функцию следует выбирать как в [2, с. 81], см. также [4] (теорема 1)), при $0 < R \leqslant \tau = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ получаем $R^a \| Du \|^2_{B_{R,x}} \leqslant \leqslant c\tau^a U_{B_{\tau,x}} + C$ с некоторым $a < 2-n$. Согласно лемме Морри отсюда следует гельдеровость u внутри Ω и оценка $(\operatorname{osc}_{B_{\tau/2,x}} u)^2 \leqslant c\tau^{2-n} U_{B\tau,x} + + C\tau^{-a+2-n}$. Пусть $\tau < \gamma |y|/2$, y — ближайшая к x точка $\partial\Omega$. Применяя лемму 1 в точке y вместо точки 0, имеем

$$U_{B_{\tau,x}} \leqslant U_{\Omega_{2\tau,y}} \leqslant c\tau^{-a(2\tau)} (|y|^{a(2\tau)} \| Du \|^2_{\Omega_{\gamma|y|,y}} + C) \leqslant \mathrm{idem}_{\Omega_{2|y|}} \leqslant$$
$$\leqslant c\tau^{-a(2\tau)} (|y|^{a(2\tau)-a(2|y|)} \rho^{a(2|y|)} \| Du \|^2_{\Omega_\rho} + C) \leqslant c\tau^{-a(2\tau)}.$$

Аналогично (8) находим

$$[u]^2_{B_{\tau/2,x}} \leqslant c\tau^{-n} \| u \|_{\Omega_{2\tau,y}} \leqslant c\tau^{-a(2\tau)+2-n}.$$

Если $\tau \geqslant \gamma |y|/2$, аналогично

$$U_{B_{\tau,x}} \leqslant U_{\Omega_{\tau+|x|}} \leqslant c\tau^{-a(2\tau)},$$

$$[u]^2_{B_{\tau/2,x}} \leqslant c\tau^{-n} \| u \|^2_{\Omega_{\tau+|x|}} \leqslant c\tau^{-a(2\tau)+2-n}.$$

В обоих случаях получаем $\max_{B_{\tau/2,x}} u^2 \leqslant c\tau^{-a(2\tau)+2-n}$, откуда следует утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 3. Условия (3) обеспечивают $u \in W^2_2$ вне любой окрестности нуля с оценкой

$$\| D^2 u \|_{\Omega_{R/2,x}} \leqslant c (|x|^{-1} U^{\frac{1}{2}} + \| g_1 \| + \| g_0 \|_{p'})_{\Omega_{R,x}}, \quad x \in \Omega_\rho,\ R = \gamma |x|,$$

откуда по лемме 1 $\| D^2 u \|^2_{\Omega R/2,x} \leqslant c\tau^{-a(\tau)-2}$, $\tau = |x|$. Функции $u_m = D_m u$, $m = \overline{1, n}$, являются решениями систем

$$\sum_{k=1}^{n} D_k \Big(\sum_{j,l} A^{ij}_{kl}(x; u, Du) D_l u^j_m + \partial A^i_k / \partial x_m \Big) = \sum_{j,l} A^{ij}_l D_l u^j_m + \frac{\partial A^i}{\partial x_m},$$

для которых так же, как при доказательстве теоремы 1, при $r \leqslant R$

$$r^{2-n} \| D^2 u \|^2_{\Omega_{r,x}} \leqslant cr^\delta \tau^{-a(\tau)-n-\delta}.$$

(Если $R > \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, то нужно сначала оценить производные, касательные к участку границы $\partial\Omega \cap B_{R,x}$, которые удовлетворяют нулевым граничным условиям, а потом оценить нормальную производную через касательные, используя уравнения системы). Отсюда согласно лемме Морри следует гельдеровость Du вне любой окрестности нуля и оценка

$(\operatorname*{osc}_{\Omega_\tau \setminus \Omega_{\tau/2}} Du)^2 \leqslant c\tau^{-a(\tau)-n}$. По лемме 1 $[Du]^2_{\Omega_\tau \setminus \Omega_{\tau/2}} \leqslant c\tau^{-a(\tau)-n}$ и, следовательно, $\max\limits_{\Omega_1 \setminus \Omega_{\tau/2}} |Du|^2 \leqslant c\tau^{-a(\tau)-n} \to 0$ при $\tau \to 0$.

Доказательство теоремы 4. Поскольку $K'M(n-1, 2-n) < 1$, рассуждая аналогично доказательству теоремы 2 [4], при $r \leqslant R = \gamma |x|$, $x \in \Omega_\rho$, получаем $r^a \| D^2 u \|^2_{\Omega_{r,x}} \leqslant cR^{a-2} U_{\Omega_{R,x}} + C$ с некоторым $a < 2-n$. Используя лемму Морри и лемму 1, отсюда, как и выше, получаем утверждение теоремы.

1. *Giaquinta M*. A counter — example to the boundary regularity of solutions to elliptic quasilinear systems // Manuscripta Math.— 1978.— 14.— P. 217—220.
2. *Кошелев А. И*. Регулярность решений эллиптических уравнений и систем.— М. : Наука, 1986.— 240 с.
3. *Калита Е. А*. Оценки решений эллиптических систем в угловой точке // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1990.— № 1.— С. 21—24.
4. *Калита Е. А*. Регулярность решений эллиптических систем второго порядка // Изв. вузов. Математика.— 1989.— № 11.— С. 37—46.
5. *Giaquinta M., Modica G*. Regularity results for some classes of higher order non linear elliptic systems // J. reine and angew. Math.—1979. — 311/312.— P. 145—169.

Получено 18.09.90