УДК 517.955.8

А. В. КРЫЛОВ, канд. физ.-мат. наук (Вильнюс. техн. ун-т)

Усреднение слабонелинейных гиперболических систем с неравномерным интегральным средним

Разработана схема усреднения квазилинейных систем в частных производных первого порядка вдоль характеристик линейной части системы. Методика является обобщением построенных автором ранее схем усреднения на случай, когда интегральные средние существуют неравномерно относительно характеристических переменных.

Розроблена схема усереднення квазілінійних систем в частинних похідних першого порядку вздовж характеристик лінійної частини системи. Методика є узагальненням побудованих автором раніше схем усереднення на випадок, коли інтегральні середні існують нерівномірно відносно характеристичних змінних.

1. Рассмотрим задачу Коши для слабонелинейной системы

$$L_j u_j \equiv \left[\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial}{\partial x}\right] u_j = \varepsilon \left\{\sum_{i=1}^{n} f_{ji}(U) \frac{\partial u_i}{\partial x} + f_{j0}(U)\right\}, \tag{1}$$

$$u_j(0, x, \varepsilon) = u_{0j}(\varepsilon x, x), \qquad j = 1, 2, \dots, n. \tag{2}$$

Здесь $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $0 < \varepsilon \ll 1$, λ_j — const (константы всюду не зависят от ε).

Пусть $v(\tau, \xi, x) \in C^l(\mathcal{D} \times R)$, $\mathcal{D} = [0, \tau_0] \times [-\xi_0, \xi_0]$, $l = 0, 1$. Обозначим

$$\| v \|_x^0 = \sup_{(\tau, \xi) \in \mathcal{D}} | v(\tau, \xi, x) |, \ \| v \|_x^1 = \max \left\{ \| v \|_x^0, \left\| \frac{\partial v}{\partial \tau} \right\|_x^0, \left\| \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\|_x^0, \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_x^0 \right\}.$$

Предположим, что существуют равномерные почти периодические по x (почти периоды не зависят от τ, ξ) функции $v^{\pm}(\tau, \xi, x)$, удовлетворяющие условиям

$$\forall \mu > 0 \ \exists x_\mu : \| v - v^+ \|_x^l < \mu \ \ \forall x \geqslant x_\mu, \ \| v - v^- \|_x^l < \mu \ \ \forall x \leqslant -x_\mu.$$

Классы таких функций будем обозначать $\mathcal{P}_l^{\pm}(\mathcal{D} \times R)$, $l = 0, 1$.

Считаем выполненными следующие ограничения:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{n-1} > \lambda_n, \tag{3}$$

$$u_{0j}(\xi, x) \in \mathcal{P}_1^{\pm}([-\xi_0, \xi_0] \times R), \ \xi_0 - \text{const} > 0, \tag{4}$$

$$f_{ji}(U) \in C^1(R^n), \qquad j = 1, 2, \dots, n, \ i = 0, 1, \dots, n. \tag{5}$$

Целью настоящей работы является построение асимптотического решения задачи (1)—(5), равномерно пригодного в некоторой «большой» области

$$\mathcal{D}_{C/\varepsilon} = \{(t, x) : t + | x | \leqslant C/\varepsilon, \ t \geqslant 0, \ C - \text{const} > 0\},$$

где существует и классическое решение [1, с. 62 — 72].

2. Введем медленные переменные $\tau = \varepsilon t$, $\xi = \varepsilon x$ и быстрые характеристические переменные $y_j = \frac{1}{\varepsilon}(\xi - \lambda_j \tau)$. Асимптотическое решение задачи (1), (2) ищем в виде

$$u_j \sim v_j(\tau, \xi, y_j) + \varepsilon w_j(t, x, \varepsilon). \tag{6}$$

Подставим (6) в (1) и, считая, что

$$\varepsilon \| W \|_\varepsilon = o(1) \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{7}$$

оставим лишь коэффициенты при ε:

$$L_j^{(\tau,\xi)} v_j + L_j^{(t,x)} w_j = \sum_{i=1}^{n} f_{ji}(V) \frac{\partial v_i}{\partial y_i} + f_{j0}(V). \tag{8}$$

Здесь

$$V = (v_1, v_2, \dots, v_n), \quad W = (w_1, w_2, \dots, w_n),$$

$$\| w_j \|_\varepsilon = \sup_{(t,x)\in \mathscr{D}_{C/\varepsilon}} | w_j(t, x, \varepsilon) |, \quad \| W \|_\varepsilon = \max_j \| w_j \|_\varepsilon,$$

$$L_j^{(\tau,\xi)} \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} + \lambda_j \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad L_j^{(t,x)} \equiv L_j.$$

Пусть u_j — точное решение (1), (2); v_j w_j удовлетворяют равенству (8). Обозначим

$$r_j(t, x, \varepsilon) = u_j(t, x, \varepsilon) - v_j(\varepsilon t, \varepsilon x, x - \lambda_j t) - \varepsilon w_j(t, x, \varepsilon). \tag{9}$$

Тогда из (1), (8) и (9) получим

$$L_j r_j = \varepsilon \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_{ji}(U) \frac{\partial r_i}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} h_{ji} r_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \sum_{k=1}^{n} g_{jik} r_k \right\} +$$

$$+ \varepsilon^2 \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \sum_{k=1}^{n} g_{jik} w_k + \sum_{i=1}^{n} f_{ji}(U) \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi} + \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) + \sum_{i=1}^{n} e_{ji} w_i \right\}. \tag{10}$$

Функции h_{ji}, g_{jik}, e_{ji} находятся по лемме Адамара:

$$h_{ji} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u_i} f_{j0}(V + \varepsilon W + s(U - V - \varepsilon W))\, ds,$$

$$g_{jik} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u_k} f_{ji}(V + s(U - V))\, ds,$$

$$e_{ji} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u_i} f_{j0}(V + s\varepsilon W)\, ds.$$

Потребуем выполнения начальных условий

$$v_j(0, \xi, y_j) = u_{0j}(\xi, y_j), \quad w_j(0, x, \varepsilon) = 0. \tag{11}$$

Тогда из (2), (9) и (11) получаем

$$r_j(0, x, \varepsilon) = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n. \tag{12}$$

Лемма 1. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *задача* (1) — (5) *имеет решение* $U(t, x, \varepsilon) = (u_1(t, x, \varepsilon), \dots, u_n(t, x, \varepsilon))$, $u_j \in C^1(\mathscr{D}_{C/\varepsilon})$ $\forall \varepsilon > 0$;
2) *функции* v_j и w_j *удовлетворяют уравнениям* (8), (11);

3) *выполнено* (7) *и асимптотические соотношения*

$$\| V \|_\varepsilon = O(1), \ \| V_y \|_\varepsilon = O(1), \ \| V_\xi \|_\varepsilon = O(1),$$
$$\varepsilon \| W_x \|_\varepsilon = o(1) \ \text{при} \ \varepsilon \to 0, \tag{13}$$

где $V_y = (\partial v_1/\partial y_1, \dots, \partial v_n/\partial y_n)$, $V_\xi = (\partial v_1/\partial \xi, \dots, \partial v_n/\partial \xi)$, $W_x = (\partial w_1/\partial x, \dots$ $\dots, \partial w_n/\partial x)$.

Тогда функция $V(t, x, \varepsilon) = (v_1(\varepsilon t, \varepsilon x, x - \lambda_1 t), \dots, v_n(\varepsilon t, \varepsilon x, x - \lambda_n t))$ *является асимптотическим решением задачи* (1)—(5):

$$\| U - V \|_\varepsilon = o(1) \ \text{при} \ \varepsilon \to 0. \tag{14}$$

Доказательство. Обозначим через $\Lambda(t, x, \varepsilon)$ матрицу

$$\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} - \varepsilon \| f_{ji}(U) \|_{n \times n}.$$

В силу условия (3) существует преобразование $B(t, x, \varepsilon) = E + O(\varepsilon)$:

$$B^{-1} \Lambda B = \Lambda^0(t, x, \varepsilon) = \operatorname{diag}\{\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_n^0\}.$$

Заметим, что $\lambda_j^0 = \lambda_j + O(\varepsilon)$. Следовательно, система (10) гиперболична и может быть записана в инвариантах Римана

$$R_t + \Lambda^0 R_x = \varepsilon A(t, x, \varepsilon) R + \varepsilon^2 H(t, x, \varepsilon)), \tag{15}$$

где $R = B^{-1}(r_1, r_2, \dots, r_n)^T$. Из асимптотических соотношений (7) и (13) находим

$$\| A \|_\varepsilon = O(1), \ \varepsilon \| H \|_\varepsilon = o(1) \ \text{при} \ \varepsilon \to 0. \tag{16}$$

Интегрируя (15) и (12) вдоль характеристик и применяя к получаемой системе интегральных уравнений лемму Гронуолла [1, с. 53], получаем $\|R\|_\varepsilon = o(1)$, что и доказывает (14).

3. Предположим, что функции v_j в (8) известны. Тогда решения задач (8), (11) находятся явным интегрированием вдоль характеристик $x - \lambda_j t = \mathrm{const}$:

$$\varepsilon w_j(t, x, \varepsilon) = \int_0^{\varepsilon t} \Big\{ g_j \Big(s, \varepsilon x - \lambda_j \varepsilon t + \lambda_j s, \dots, \frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon x - \lambda_j \varepsilon t + (\lambda_j - \lambda_k) s), \dots \Big) -$$
$$- L_j^{(\tau, \xi)} v_j \Big(s, \varepsilon x - \lambda_j \varepsilon t + \lambda_j s, \frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon x - \lambda_j \varepsilon t) \Big) \Big\} ds. \tag{17}$$

Здесь

$$g_j(\tau, \xi, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n f_{ji}(\dots, v_k(\tau, \xi, y_k), \dots) \, \partial v_i(\tau, \xi, y_i)/\partial y_i + f_{j0}(v_1, \dots, v_n).$$

Обозначим через $\mathcal{N}(\mathcal{D}_C \times R)$ множество непрерывных функций, имеющих ограниченные частные производные первого порядка, где $\mathcal{D}_C \equiv \varepsilon \mathcal{D}_{C/\varepsilon} = \{(\tau, \xi) : \tau + |\xi| \leqslant C, \ \tau \geqslant 0\}$. Пусть $v_j(\tau, \xi, y_j) \in \mathcal{N}$. Тогда, вводя в (17) медленные переменные и учитывая (11), потребуем выполнения (7):

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big[\int_0^\tau g_j \Big(s, \xi - \lambda_j \tau + \lambda_j s, \dots, \frac{1}{\varepsilon} (\xi - \lambda_j \tau + (\lambda_j - \lambda_k) s), \dots \Big) ds -$$
$$- v_j \Big(\tau, \xi, \frac{1}{\varepsilon} (\xi - \lambda_j \tau) \Big) + u_{0j} \Big(\xi - \lambda_j \tau, \frac{1}{\varepsilon} (\xi - \lambda_j \tau) \Big) \Big] = 0. \tag{18}$$

Пусть $v_k(\tau, \xi, y_k) \in \mathcal{P}_0^{\pm}(\mathcal{D}_C \times R) \cap \mathcal{N}(\mathcal{D}_C \times R)$. Тогда предел (18) зависит от знаков выражений $\frac{1}{\varepsilon}(\xi - \lambda_j \tau + (\lambda_j - \lambda_k) s)$, $s \in (0, \tau)$. Для определенности будем считать, что $\lambda_{i+1} \tau < \xi < \lambda_i \tau$, $\lambda_{i+1} > \lambda_j$. Обозначим

$$s_{jk}(\tau, \xi) = \frac{\xi - \lambda_j \tau}{\lambda_k - \lambda_j}, \qquad k = 1, 2, \dots, i.$$

Учитывая (3), имеем $s_{j1} < c_{j2} < \ldots < s_{ji}$. Обозначим через $v_k^{\pm}$ функции, описанные в определении множества $\mathcal{P}_0^{\pm}$. Тогда равенство (18) можно представить в таком виде:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg[\int\limits_0^{s_{j1}}\left(\sum_{i=1}^n f_{ji}\frac{\partial v_i}{\partial y_i}+f_{j0}\right)(v_1^-, v_2^+, \ldots, v_{j-1}^+, v_j, v_{j+1}^+, \ldots, v_n^+)\,ds +$$

$$+\int\limits_{s_{j1}}^{s_{j2}}\left(\sum_{i=1}^n f_{ji}\frac{\partial v_i}{\partial y_i}+f_{j0}\right)(v_1^-, v_2^-, v_3^+, \ldots, v_j\, v_{j+1}^+, \ldots, v_n^+)\,ds + \ldots$$

$$\ldots+\int\limits_{s_{jm}}^{\tau}\left(\sum_{i=1}^n f_{ji}\frac{\partial v_i}{\partial y_i}+f_{j0}\right)(v_1^-, v_2^-, \ldots, v_m^-, v_{m+1}^+, \ldots, v_j, \ldots, v_n^+)\,ds -$$

$$-v_j\left(\tau, \xi, \frac{1}{\varepsilon}(\xi-\lambda_j\tau)\right)+u_{0j}\left(\xi-\lambda_j\tau, \frac{1}{\varepsilon}(\xi-\lambda_j\tau)\right)\Bigg]=0. \tag{19}$$

Здесь $\lambda_{m+1}\tau < \xi < \lambda_m\tau$, $\lambda_{m+1} > \lambda_j$. Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Введем оператор усреднения вдоль j-й характеристики системы (1):

$$M_j[g_j(\tau, \xi, y_1, \ldots, y_n)](\tau, \xi, y_j) \equiv$$
$$\equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T g_j(\tau, \xi, y_j+(\lambda_j-\lambda_1)p, \ldots, y_j+(\lambda_j-\lambda_n)p)\,dp.$$

Лемма 2. *Пусть* $f_j(V)\in C(R^n)$, $v_k(\tau, \xi, y_k)\in\mathcal{P}_0^{\pm}(\mathcal{D}_C\times R)$, $\alpha(\tau, \xi)$, $\beta(\tau, \xi)\in C(\mathcal{D}_C)$, $\alpha\leqslant\beta$, *выражения* $\xi-\lambda_j\tau+(\lambda_j-\lambda_k)s$, $k=1, 2, \ldots, n$, *не меняют знак* $\forall s\in(\alpha, \beta)$, $\xi\in(\lambda_{i+1}\tau, \lambda_i\tau)$.

Тогда существует равномерный по τ, ξ *предел*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_\alpha^\beta\left\{f_j\left(\ldots, v_k\left(s, \xi-\lambda_j\tau+\lambda_j s, \frac{1}{\varepsilon}(\xi-\lambda_j\tau+(\lambda_j-\lambda_k)s)\right), \ldots\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-M_j[f_j(v_1^{\pm}, \ldots, v_{j-1}^{\pm}, v_j, v_{j+1}^{\pm}, \ldots, v_n^{\pm})]\left(s, \xi-\lambda_j\tau+\lambda_j s, \frac{1}{\varepsilon}(\xi-\lambda_j\tau)\right)\right\}ds\right\}=0.$$

Знаки у функций $v_k^{\pm}$ *равны* $\operatorname{sign}(\xi-\lambda_j\tau+(\lambda_j-\lambda_k)s)$.

Доказательство. Функции $v_k^{\pm}(\tau, \xi, y_k)$ почти периодичны по y_k. Следовательно, $\forall\mu>0$ существует такой тригонометрический многочлен

$$P_\mu(\tau, \xi, y_1, \ldots, y_k)=\sum_{\|l\|\leqslant L_\mu}P_l(\tau, \xi, y_j)\exp\left\{\sum_{k\neq j}\nu_{l_k}y_k\right\}, \qquad i=\sqrt{-1},$$

что

$$\sup_{\substack{(\tau, \xi)\in\mathcal{D}_C\\ (y_1, \ldots, y_n)\in R^n}}|f_j(v_1^{\pm}, \ldots, v_{j-1}^{\pm}, v_j, v_{j+1}^{\pm}, \ldots, v_n^{\pm})-P_\mu|<\mu,$$

Здесь $l=(l_1, \ldots, l_{j-1}, l_{j+1}, \ldots, l_n)$, $l_k\in Z$, $\|l\|=\max\limits_k|l_k|$, ν_{l_k} — const.

Найдем предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\alpha^\beta P_l(s, \xi-\lambda_j\tau+\lambda_j s, y_j)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\sum_{k\neq i}\nu_{l_k}(\xi-\lambda_j\tau+(\lambda_j-\lambda_k)s)\right\}ds.$$

Если $\sum\limits_{k\neq j}\nu_{l_k}(\lambda_j-\lambda_k)\neq 0$, то по известной из теории рядов Фурье лемме этот предел равен нулю. Если $\sum\limits_{k\neq j} \nu_{lk}(\lambda_j-\lambda_k)=0$, то

$$\int\limits_\alpha^\beta P_l(s,\xi-\lambda_j\tau+\lambda_j s, y_j)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\sum_{k\neq j}\nu_{lk}(\xi-\lambda_j\tau+(\lambda_j-\lambda_k)s)\right\}ds=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta P_l(s,\xi-\lambda_j\tau+\lambda_j s, y_j)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\sum_{k\neq j}\nu_{lk}(\xi-\lambda_j\tau)\right\}=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta \lim_{T\to\infty}T^{-1}\int\limits_0^T P_l(s,\xi-\lambda_j\tau+\lambda_j s, y_j)\exp\left\{i\sum_{k\neq j}\nu_{lk}(y_j+(\lambda_j-\lambda_k)p)\right\}dpds=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta M_j\left[P_l(s,\xi-\lambda_j\tau+\lambda_j s, y_j)\exp\left\{i\sum_{k\neq j}\nu_{lk}y_k\right\}\right]ds.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_\alpha^\beta(P_\mu-M_j[P_\mu])\,ds=0$. Учитывая линейность оператора M_j, получаем оценку

$$\left|\int\limits_\alpha^\beta(f_j-M_j[f_j])\,ds\right|\leqslant\left|\int\limits_\alpha^\beta(f_j-P_\mu)\,ds\right|+\left|\int\limits_\alpha^\beta(P_\mu-M_j[P_\mu])\,ds\right|+$$

$$+\left|\int\limits_\alpha^\beta M_j[P_\mu-f_j]\,ds\right|,$$

что и доказывает утверждение. Заметим, что $M_j[f_j](\tau,\xi,y_j)\in\mathcal{P}_0^{\pm}(\mathcal{D}_a\times R)$.

Используя лемму 2, каждый интеграл в (19) можно представить в виде

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\int\limits_{s_{jk}}^{s_{j,k+1}}\left(\sum_{i=1}^n f_{ji}\frac{\partial v_i}{\partial y_i}+f_{j0}-M_j\left[\sum_{i=1}^n f_{ji}\frac{\partial v_i}{\partial y_i}+f_{j0}\right]\right)ds\right\}=0.$$

Обозначим через $F_j(r_1,r_2,\ldots r_{j-1},r_{j+1},\ldots,r_n;\ f(V))$ определенный при $r_1<r_2<\ldots<r_{j-1}<r_{j+1}<\ldots<r_n$ оператор

$$F_j\equiv\begin{cases} f(v_1^+,v_2^+,\ldots,v_{j-1}^+,v_j,v_{j+1}^+,\ldots,v_n^+), & r_1>0;\\ f(v_1^-,v_2^+,\ldots,v_{j-1}^+,v_j,v_{j+1}^+,\ldots,v_n^+), & r_1<0,\ r_2>0;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f(v_1^-,v_2^-,\ldots,v_m^-,v_{m+1}^+,\ldots,v_j,\ldots,v_n^+), & r_m<0,\ r_{m+1}>0;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f(v_1^-,v_2^-,\ldots,v_{j-1}^-,v_j,v_{j+1}^-,\ldots,v_n^-), & r_n<0.\end{cases}$$

Учитывая, что $L_j^{(\tau,\xi)}s_{ji}\equiv0$ и $L_j^{(\tau,\xi)}M_j[f_j]\equiv0$, записываем систему (19), (11) в дифференциальной форме

$$L_j^{(\tau,\xi)}v_j=M_j\left[F_j\left(\xi-\lambda_1\tau,\ldots,\xi-\lambda_n\tau;\ \sum_{i=1}^n f_{ji}(V)\frac{\partial v_i}{\partial y_i}+f_{j0}(V)\right)\right],$$

$$v_j(0,\xi,y_j)=u_{0j}(\xi,y_j),\qquad j=1,2,\ldots,n. \tag{20}$$

4. Для решения усредненной системы (20) построим последовательные приближения

$$L_j^{(\tau,\xi)}\overset{k+1}{v_j}+\overset{k}{\mu}_j\frac{\partial\overset{k+1}{v_j}}{\partial y_j}=\overset{k}{g}_j,\quad \overset{k+1}{v_j}(0,\xi,y_j)=u_{0j}(\xi,y_j),$$

$$\overset{0}{v}_j(\tau, \xi, y_j) = u_{0j}(\xi - \lambda_j \tau, y_j), \tag{21}$$
$$\overset{k}{\mu}_j(\tau, \xi, y_j) = - M_j[F_j(\xi - \lambda_1\tau, \ldots, \xi - \lambda_n\tau;\ f_{jj}(\overset{k}{V}))],$$
$$\overset{k}{g}_j(\tau, \xi, y_j) = M_j\left[F_j\left(\xi - \lambda_1\tau, \ldots, \xi - \lambda_n\tau;\ \sum_{i\neq j} f_{ji}(\overset{k}{V}) \frac{\partial \overset{k}{v}_i}{\partial y_i} + f_{j0}(\overset{k}{V})\right)\right].$$

Обозначим через $\mathcal{D}_C^m$ подмножества области $\mathcal{D}_C$:

$$\mathcal{D}_C^m = \{(\tau, \xi) \in \mathcal{D}_C : \lambda_{m+1}\tau \leqslant \xi \leqslant \lambda_m \tau\}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$\mathcal{D}_C^0 = \{(\tau, \xi) \in \mathcal{D}_C : \xi \geqslant \lambda_1 \tau\},\ \mathcal{D}_C^n = \{(\tau, \xi) \in \mathcal{D}_C : \xi \leqslant \lambda_n \tau\}.$$

Предположим, что

$$\overset{k}{v}_i(\tau, \xi, y_i) \in \mathcal{P}_0^{\pm}(\mathcal{D}_C \times R), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,\ k \geqslant 0,$$
$$\overset{k}{v}_i(\tau, \xi, y_i) \in \mathcal{P}_1^{\pm}(\mathcal{D}_C^m \times R), \qquad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{22}$$

Тогда, используя определение оператора F_j, имеем

$$\overset{k}{\mu}_j(\tau, \xi, y_j) = \overset{k}{\mu}_{jm} = - M_j[f_{jj}(\overset{k}{v}{}_1^{\pm}, \overset{k}{v}{}_2^{\pm}, \ldots, \overset{k}{v}_j, \ldots, \overset{k}{v}{}_n^{\pm})],\ (\tau, \xi) \in \mathcal{D}_C^m,$$
$$\overset{k}{g}_j = \overset{k}{g}_{jm} = M_j\left[\sum_{i\neq j} f_{ji}(\overset{k}{V}{}^{\pm}) \frac{\partial \overset{k}{v}{}_i^{\pm}}{\partial y_i} + f_{j0}(\overset{k}{V}{}^{\pm})\right], \qquad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Используя ограниченность функций из $\mathcal{P}_l^{\pm}$ и интегрируя по частям, для каждой из областей $(\tau, \xi) \in \mathcal{D}_C^m$, $m = 0, 1, \ldots, n$, получаем формулы дифференцирования по ξ

$$\frac{\partial}{\partial \xi} M_j\left[f_{ji}(\overset{k}{v}{}_1^{\pm}, \ldots, \overset{k}{v}{}_n^{\pm}) \frac{\partial \overset{k}{v}{}_i^{\pm}}{\partial y_i}\right] = \sum_{l=1}^{n} M_j\left[\frac{\partial f_{ji}}{\partial v_l} \frac{\partial \overset{k}{v}{}_l^{\pm}}{\partial \xi} \frac{\partial \overset{k}{v}{}_i^{\pm}}{\partial y_i}\right] -$$
$$- \sum_{l=1}^{n} \frac{\lambda_j - \lambda_l}{\lambda_j - \lambda_i} M_j\left[\frac{\partial f_{ji}}{\partial v_l} \frac{\partial \overset{k}{v}{}_l^{\pm}}{\partial y_l} \frac{\partial \overset{k}{v}{}_i^{\pm}}{\partial \xi}\right], \qquad i \neq j, \tag{23}$$

и аналогичные формулы дифференцирования по τ, y_j.

Таким образом, в предположении (22) $\overset{k}{\mu}_i$, $\overset{k}{g}_j \in \mathcal{P}_1^{\pm}(\mathcal{D}_C^m \times R)$, $m = 0, 1, \ldots, n$.

Обозначим через $\overset{k}{y}_j(s; \tau, \xi, y_j)$ характеристики уравнений (21). Тогда

$$\frac{\partial \overset{k}{y}_j}{\partial s} = \overset{k}{\mu}_j(s, \xi - \lambda_j\tau + \lambda_j s, \overset{k}{y}_j),\ \overset{k}{y}_j(\tau; \tau, \xi, y_j) = y_j. \tag{24}$$

Интегрируя (24) по s и устанавливая пределы интегрирования аналогично (19), получаем

$$\overset{k}{y}_j = y_j + \int_{\tau}^{s} \overset{k}{\mu}_j ds = y_j + \int \overset{k}{\mu}_{j0} ds + \int \overset{k}{\mu}_{j1} ds + \ldots + \int \overset{k}{\mu}_{jn} ds. \tag{25}$$

Функции $\overset{k}{y}_j(s; \tau, \xi, y_j)$ непрерывны по всем переменным $s \in [0, \tau]$, $(\tau, \xi) \in \mathcal{D}_C$, $y_j \in R$ и непрерывно дифференцируемы в каждой из областей $\mathcal{D}_C^m$.

Используя характеристики (24), решения задач (21) находим явным интегрированием:

$$\overset{k+1}{v}_j(\tau, \xi, y_j) = u_{0j}(\xi - \lambda_j\tau, \overset{k}{y}_j(0; \tau, \xi, y_j)) +$$
$$+ \int_0^\tau \overset{k}{g}_j(s, \xi - \lambda_j\tau + \lambda_j s, \overset{k}{y}_j(s; \tau, \xi, y_j))\, ds =$$
$$= u_{0j} + \int_0^{s_{j1}} g_{j0}ds + \int_{s_{j1}}^{s_{j2}} g_{j1}ds + \ldots + \int_{s_{jk}}^{\tau} g_{jk}ds. \qquad (26)$$

Обозначим через $\overset{k}{\mu}{}_j^{\pm}$ функции, получаемые так же, как $\overset{k}{\mu}_j$, после замены $\overset{k}{v}_j$ на $\overset{k}{v}{}_j^{\pm}$. Тогда равномерно по всем переменным $\lim\limits_{y_j\to\pm\infty} [\overset{k}{y}_j - \overset{k}{y}{}_j^{\pm}] = 0$, где $\partial\overset{k}{y}{}_j^{\pm}/\partial s = \overset{k}{\mu}{}_j^{\pm}$. В силу почти периодичности функций $\overset{k}{\mu}{}_j^{\pm}$ функции $\overset{k}{y}{}_j^{\pm}(s; \tau, \xi, y_j) - y_j$ почти периодичны по y_j. Заметим, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ почти периодичны, то почти периодична и функция $f(x + g(x))$. Для этого достаточно показать, что всякая последовательность $f(x_k + g(x_k))$ содержит сходящуюся подпоследовательность [2, с. 24]. Устремив в (26) $y_j \to \pm\infty$, убедимся, что $\overset{k+1}{v}{}_j^{\pm}(\tau, \xi, y_j)$ почти периодичны по y_j и, значит, $\overset{k+1}{v}_j \in \mathcal{P}_0^{\pm}(\mathcal{D}_C \times R)$. Используя формулы типа (23) (они пригодны для каждого интеграла $\int_{s_{ji}}^{s_{j,i+1}}$), дифференцируем (26) по τ, ξ, y_j. В результате получим функции

$$\partial\overset{k+1}{v}_j/\partial\tau,\ \partial\overset{k+1}{v}_j/\partial\xi \in \mathcal{P}_0^{\pm}(\mathcal{D}_C^m \times R),\ m = 0, 1, \ldots, n,\ \partial\overset{k+1}{v}_j/\partial y_j \in \mathcal{P}_0^{\pm}(\mathcal{D}_C \times R).$$

Таким образом, если выполнено ограничение (4), то по индукции получаем выполнение (22).

Область $\mathcal{D}_c$ в (22) в силу нелинейности задач, вообще говоря, зависит от k. Существование общей для всех последовательных приближений (21) области $\mathcal{D}_G$ можно показать, построив мажорирующую систему [1, с. 63]. Пусть функции $V(\tau)$ и $Y(\tau)$ удовлетворяют неравенствам

$$\sup\left\{|\overset{k}{v}_j(\tau, \xi, y_j)|,\ \left|\frac{\partial\overset{k}{v}_j}{\partial\tau}\right|,\ \left|\frac{\partial\overset{k}{v}_j}{\partial\xi}\right|,\ \left|\frac{\partial\overset{k}{v}_j}{\partial y_j}\right|\right\} \leqslant V(\tau) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sup\left\{\left|\frac{\partial\overset{k}{y}_j(s; \tau, \xi, y_j)}{\partial\tau}\right|,\ \left|\frac{\partial\overset{k}{y}_j}{\partial\xi}\right|,\ \left|\frac{\partial\overset{k}{y}_j}{\partial y_j}\right|\right\} \leqslant Y(\tau) \qquad \forall k \geqslant 0,$$

где sup берется по $s \in [0, \tau]$, $|\xi| \leqslant \min\{\xi_0, C - \tau\}$, $y_j \in R$.

Дифференцируя (25) по τ, ξ, y_j (заметим, что от τ и ξ зависят пределы интегрирования) и учитывая, что функции $\overset{k}{\mu}_{im}$ зависят от $\overset{k}{V}_l$, а также (4) и (5), получаем

$$Y(\tau) \leqslant c_0 + \int_0^\tau (c_1Y(r) + c_2V(r) + c_3Y(r)V(r) + c_4)\, dr.$$

Аналогично из (26) получаем оценку для $V(\tau)$:

$$V(\tau) \leqslant c_5 + \int_0^\tau (c_6Y(r) + c_7V(r) + c_8V(r)Y(r) + c_9V^2(r)Y(r) + c_{10})\, dr.$$

Здесь c_i — const > 0. Поскольку в некоторой области $\tau \in [0, \tau_0]$ функции $V(\tau)$ и $Y(\tau)$ ограничены, существует область $\mathcal{D}_C$, общая для всех последовательных приближений $\overset{k}{v}_j$. ◾

Сходимость последовательных приближений (21) к решению задачи (20) и единственность полученного решения доказывается стандартным образом [1, с. 66].

Сформулируем полученные результаты.

Теорема. *Пусть система* (1), (2) *удовлетворяет ограничениям* (3) — (5). *Тогда найдутся такие положительные постоянные* C *и* ε_0, *что*

1) *задача имеет единственное точное решение*

$$u_j(t, x, \varepsilon) \in C^1(\mathcal{D}_{C/\varepsilon}) \qquad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0];$$

2) *усредненная система* (20) *имеет единственное решение*

$$v_j(\tau, \xi, y_j) \in \mathcal{P}_0^{\pm}(\mathcal{D}_C \times R), \;\; v_j \in \mathcal{P}_1^{\pm}(\mathcal{D}_C^m \times R), \qquad m = 0, 1, \ldots, n;$$

3) *функция* $V = (v_1, \ldots, v_n)$ *является асимптотическим решением задачи* (1), (2), *т. е.* $\forall \eta > 0 \;\; \exists \varepsilon_\eta \in (0, \varepsilon_0]$:

$$|u_j(t, x, \varepsilon) - v_j(\varepsilon t, \varepsilon x, x - \lambda_j t)| < \eta \;\; \forall (t, x) \in \mathcal{D}_{C/\varepsilon}, \;\; \varepsilon \in (0, \varepsilon_\eta],$$

$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

5. К системам вида (1) с зависящими от быстрых переменных t, x правыми частями, т. е. $f_{ji} = f_{ji}(t, x, U)$, применялись различные схемы усреднения [3—5]. Получаемые при этом результаты можно считать обобщением первой теоремы Н. Н. Боголюбова [6, с. 431] на дифференциальные уравнения с частными производными. (Заметим, что постоянная C, определяющая область $\mathcal{D}_{C/\varepsilon}$, в этом случае уже не произвольна.) Усредненные системы, не содержащие в правой части одной или обеих быстрых переменных, хотя и проще исходных, все же остаются нетривиальной задачей асимптотического интегрирования вида (1), (2). В [7—9] разработана более общая схема усреднения, называемого автором *внутренним* [10], охватывающая неявную зависимость функций f_{ji} от быстрых переменных и поэтому применимая к системам вида (1). «Плата» за это — бо́льшая громоздкость усредненной системы (20) (и аналогичных уравнений в [7—12]). Отметим, что усредненные системы типа (20) допускают дальнейший анализ и упрощения [11, 12].

1. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.— М. : Наука, 1978.— 688 с.
2. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции.— М. : Гостехтеоретиздат, 1953.— 396 с.
3. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* О принципе усреднения для гиперболических систем вдоль характеристик // Укр. мат. журн.— 1970.— 22, № 5.— С. 600—610.
4. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* О методах усреднения гиперболических систем с быстрыми и медленными переменными. Задача Коши // Там же.— 1979.— 31, № 2.— С. 149—156.
5. *Вульпе И. М.* Об усреднении уравнений в частных производных по независимым переменным // Дифференц. уравнения.— 1982.— 18, № 11.— С. 1887—1893.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 504 с.
7. *Штарас А. Л.* Асимптотическое интегрирование слабонелинейных уравнений с частными производными // Докл. АН СССР.— 1977.— 237, № 3.— С. 525—528.
8. *Крылов А. В.* Об асимптотическом интегрировании гиперболических систем первого порядка // Лит. мат. сб.— 1983.— 23, № 4.— С. 12—17.
9. *Крылов А. В.* Асимптотическое интегрирование слабонелинейных систем с частными производными // Журн. вычислит. математики и мат. физики.— 1986.— 28, № 1.— С. 72—79.
10. *Крылов А. В.* Внутреннее усреднение систем с частными производными первого порядка // Мат. заметки.— 1989.— 46, вып. 6.— С. 112—113.
11. *Крылов А. В.* Метод исследования слабонелинейного взаимодействия одномерных волн // Прикл. математика и механика.— 1987.— 51, вып. 6.— С. 933—940.
12. *Крылов А. В.* Обоснование метода внутреннего усреднения вдоль характеристик слабонелинейных систем. II // Лит. мат. сб.— 1990.— 30, № 1.— С. 88—99.

Получено 02,11.90