УДК 532,546+531.19

В. І. ГЕРАСИМЕНКО, канд. фіз.-мат. наук (Ін-т математики АН УРСР, Київ),
М. О. СТАШЕНКО, канд. фіз.-мат. наук (Луц. філія Львів. політехн. ін-ту)

Метод гідродинамічних потенціалів в області з складною границею

С помощью вычислительной процедуры построены решения граничной задачи для уравнений Навье — Стокса в области со сложной границей.

За допомогою віднімальної процедури побудовані розв'язки граничної задачі для рівнянь Нав'є — Стокса в області з складною границею.

1. Означення. Розглянемо лінеаризовану систему рівнянь Нав'є—Стокса для полів швидкості $v(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))$ і тиску $p(x)$:

$$\nu\Delta v(x) = \nabla p(x), \qquad (1)$$
$$\operatorname{div} v(x) = 0$$

в області $\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^3} F_k$, де F_k — куля радіуса d з центром у вузлі $k=(k_1, k_2, k_3)$ безмежної кубічної гратки з ребром a, ν — коефіцієнт в'язкості.

Нехай на поверхні $\partial M = \partial\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^3} F_k\right)$ задані граничні умови

$$v(x)\,|_{x\in\partial M} = 0 \qquad (2)$$

та визначений однорідний зовнішній потік $v^\infty = (0, 0, v_0)$.

Внаслідок кубічної симетрії області $\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^3} F_k$ розв'язки $v(x)$, $p(x)$ граничної задачі (1), (2) періодичні з періодом a. Тому природньо розглядати область $\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^3} F_k$ як об'єднання множин $L_k = \left\{x\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, |x_i - ak_i| \leqslant \frac{a}{2},\ i=1, 2, 3;\ |x - ak| \geqslant d\right\}$ і будувати розв'язки в області L_0.

Розв'язками рівнянь (1) є функції — гідродинамічні потенціали подвійного шару [1—3]:

$$v_i(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} \int_{\partial F_k} T_{jl}(u^i(x, y+ak),\quad q^i(x, y+ak))\, \varphi_j^{(k)}(y)\, n_l^{(k)}(y)\, dS_y, \qquad (3)$$

$$p(x) = \frac{\nu}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\partial F_k} q^i(x, y+ak)\, \varphi_i^{(k)}(y)\, n_j^{(k)}(y)\, dS_y, \qquad (4)$$

де $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ — густина гідродинамічного потенціалу (внаслідок симетрії області $\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^3} F_k$ густина $\varphi^{(k)}$ однакова на кожній з поверхонь ∂F_k), $n^{(k)}(y)$ — вектор нормалі до поверхні ∂F_k в точці y, dS_y — елемент поверхні ∂F_k, T_{jl} — тензор напруг:

$$T_{jl}(u^i(x, y),\quad q^i(x, y)) = q^i(x, y)\,\delta_{jl} + \nu\left(\frac{\partial u_j^i(x, y)}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^i(x, y)}{\partial x_j}\right), \qquad (5)$$

а функції $q^i(x, y)$, $u_j^i(x, y)$ — фундаментальні розв'язки рівнянь (1):

$$u_j^i(x, y) = -\frac{1}{8\pi\nu}\left(\frac{\delta_{ij}}{|x-y|} + \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x-y|^3}\right), \qquad (6)$$

$$q^i(x, y) = -\frac{x_i - y_i}{|x-y|^3}.$$

Вирази (3), (4) є розв'язками граничної задачі (1), (2), якщо густина $\varphi(x)$ гідродинамічного потенціалу задовольняє інтегральні рівняння

$$\frac{1}{2}\varphi_i(x)+\frac{3}{4\pi}\int\limits_{\partial F_0}\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}\frac{(x_i-y_i-ak_i)(x_j-y_j-ak_j)(x_l-y_l-ak_l)}{|x-y-ak|^5}\times$$
$$\times n_l(y)\varphi_j(y)\,dS_y=v_i^\infty,\quad x\in\partial F_0,\quad i=1,2,3. \tag{7}$$

З цих рівнянь, зокрема, випливає, що функція $\varphi(x)$ має такі властивості симетрії:

$$\varphi_j(T_ix)=\begin{cases}\varphi_j(x), & i\neq j,\\ -\varphi_j(x), & i=j=1,2,3,\end{cases} \tag{8}$$

де T_i — оператор інверсії i-ї координатної осі.

Зазначимо, що рівняння (7), а також формули для розв'язків (3), (4), є формальними виразами, так як вони містять ряди по $k\in\mathbb{Z}^3$, що не є абсолютно збіжними.

2. Віднімальна процедура. Розглянемо банахів простір $B(\partial F_0)$ обмежених функцій $f=(f_1,f_2,f_3)$, які визначені на поверхні ∂F_0 та задовольняють умови (8), з нормою $\|f\|=\sup\limits_{x\in\partial F_0}|f(x)|$. Зауважимо, що безпосередньо розглядати рівняння (7) в просторі $B(\partial F_0)$ не можна, оскільки ядра цих інтегральних рівнянь визначаються рядами

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}\frac{(x_i-y_i-ak_i)(x_j-y_j-ak_j)(x_l-y_l-ak_l)}{|x-y-ak|^5}, \tag{9}$$

що не є абсолютно збіжними. Це є наслідком повільного спадання на безмежності функцій Гріна (6). Для усунення розбіжностей сформулюємо віднімальну процедуру.

Розкладемо в ряд за мультиполями [4] загальний член ряду (9) з рівнянь (7) при $|k|\neq 0$. Виділимо окремо перші два члени мультипольного розкладу, що не є абсолютно збіжними по $k\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}$. Інші члени мультипольного розкладу, що є абсолютно збіжними рядами по $k\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}$, запишемо як залишковий член розкладу у формі Лагранжа. Після такого тотожного перетворення рівняння (7) набудуть вигляду

$$\frac{1}{2}\varphi_i(x)+(A_{ij}\varphi_j)(x)+(B_{ij}\varphi_j)(x)+(C_{ij}\varphi_j)(x)=v_i^\infty,\quad i=1,2,3, \tag{10}$$

де

$$(A_{ij}\varphi_j)(x)=\frac{3}{4\pi}\int\limits_{\partial F_0}\frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)(x_l-y_l)}{|x-y|^5}\,n_l(y)\varphi_j(y)\,dS_y, \tag{11}$$

$$(B_{ij}\varphi_j)(x)=\frac{3}{8\pi}\int\limits_{\partial F_0}\sum_{k\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}}\frac{\partial^2}{\partial(x_p-y_p)\,\partial(x_m-y_m)}\times$$
$$\times\left((x_i-y_i-ak_i)\frac{(x_j-y_j-ak_j)(x_l-y_l-ak_l)}{|x-y-ak|^5}\right)\Bigg|_{\xi}\times$$
$$\times(x_p-y_p)(x_m-y_m)\varphi_j(y)n_l(y)\,dS_y, \tag{12}$$
$$0<\xi_p<(x_p-y_p),\quad p,m=1,2,3,$$

$$(C_{ij}\varphi_j)(x)=\frac{3}{4\pi}\int\limits_{\partial F_0}\sum_{k\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}}\left[\frac{ak_iak_jak_l}{|ak|^5}+\frac{\partial}{\partial(x_p-y_p)}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{(x_i-y_i-ak_i)(x_j-y_j-ak_j)(x_l-y_l-ak_l)}{|x-y-ak|^5}\right)\Bigg|_{x-y=0}(x_p-y_p)\right]\times$$
$$\times\varphi_j(y)n_l(y)\,dS_y. \tag{13}$$

Ядро інтегрального оператора (12) є сумою абсолютно і рівномірно по $x \in L_0$, $y \in \partial F_0$ збіжного ряду. В формулі (13) ряд по $k \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ не є абсолютно збіжний, тому вираз $(C_{ij}\varphi_j)(x)$ надалі будемо інтерпретувати як контрчлен. Зауважимо, що в квантовій теорії поля контрчлени звичайно розбіжні і їх відкидають [5, 6]. В даному ж випадку контрчлен (13) може бути підрахований.

Введемо деякі означення. Під терміном механічний диполь будемо розуміти дві рівні за величиною та протилежно спрямовані сили $\pm\mathcal{F}$, що прикладені в різних точках рідини на деякій відстані $|l|$. При цьому вважається, що довжина $|l|$ вектора l, проведеного від точки дії сили $\mathcal{F}$ до точки дії сили $-\mathcal{F}$, значно менша характерного розміру a гратки. Характеристикою механічного диполя є тензор механічного моменту (дипольний момент), який визначається тензорним добутком векторів $\mathcal{F}$ та l [4].

Покажемо, що контрчлен (13) є згорткою нормалі до поверхні ∂F_0 з тензором напруг (5) у випадку, коли у вузлах кубічної гратки розміщені механічні диполі з певним дипольним моментом.

Лема. *Справедлива рівність*

$$(C_{ij}\varphi_j)(x) = \frac{d}{3} D_l n_l(x) \left(\frac{4}{5} + \delta_{jj} n_j(x)\right), \quad i = 1, 2, 3, \tag{14}$$

де $D_l = d_{ll}$ *— густина дипольного моменту:* $d_{ij} = d^{-1} \int\limits_{\partial F_0} \varphi_i(y)\, y_j dS_y$.

Доведення. З умов симетрії (8) маємо

$$\int\limits_{\partial F_0} dS_y n_l(y)\, \varphi_j(y) \sum_{k \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} \left[\frac{ak_i ak_j ak_l}{|ak|^5} + \frac{\partial}{\partial (x_p - y_p)} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{(x_i - y_i - ak_i)(x_j - y_j - ak_j)(x_l - y_l - ak_l)}{|x - y - ak|^5} \right)_{x=y} y_p \right] = 0.$$

Інші доданки у виразі (13) дорівнюють згортці нормалі з тензором напруг (5), що відповідає течії U^i, Q^i в початку координат, створюваній механічними диполями (з дипольним моментом $D_i = d^{-1} \int\limits_{\partial F_0} dS_y \varphi_i(y)\, y_i$), розташованими у вузлах кубічної гратки (за винятком початку координат)

$$\frac{3}{4\pi} \int\limits_{\partial F_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} \frac{\partial}{\partial (x_p - y_p)} \times$$
$$\times \left(\frac{(x_i - y_i - ak_i)(x_j - y_j - ak_j)(x_l - y_l - ak_l)}{|x - y - ak|^5} \right)_{x=y} x_p \varphi_j(y)\, n_l(y)\, dS_y =$$
$$= \frac{3}{4\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} \frac{\partial}{\partial (x_p - y_p)} \times$$
$$\times \left(\frac{(x_i - y_i - ak_i)(x_j - y_j - ak_j)(x_l - y_l - ak_l)}{|x - y - ak|^5} \right)_{x=y} x_p d_{lj} = dT_{ij}(U, Q)\, n_j(x). \tag{15}$$

Розіб'ємо простір $\mathbb{R}^3$ на дві області: кулю радіусу $R \gg a$ з центром в початку координат $S(0, R)$ та $\mathbb{R}^3 \setminus S(0, R)$. Визначимо внесок механічних диполей з області $S(0, R)$ в вираз (15):

$$T_{jl}(U^i, Q^i)\, n_l = \sum_{k \in S(0,R) \cap \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} \left\{ -\frac{1}{4\pi\nu} \delta_{jl} \frac{|ak|^5 \delta_{ip} - 3ak_i ak_p}{|ak|^5} n_p d_{jl} + \right.$$
$$+ \frac{1}{8\pi\nu} \frac{\partial}{\partial (ak_j)} \left(\frac{(\delta_{il} ak_p - \delta_{lp} ak_i - \delta_{ip} ak_l)|ak|^2 + 3ak_i ak_l ak_p}{|ak|^5} \right) n_p d_{jl} +$$

$$+\frac{1}{8\pi\nu}\frac{\partial}{\partial(ak_l)}\left(\frac{(\delta_{ij}ak_p-\delta_{jp}ak_i-\delta_{ip}ak_j)\,|ak|^2+3ak_iak_jak_p}{|ak|^5}\right)n_pd_{jl}\Big\}\,.$$

Так як сумування проводиться по вузлах кубічної гратки, розташованої в межах кулі $S(0,R)$, то така сума — скінченна. Перегрупуємо члени цієї суми наступним чином, наприклад для виразу першої суми, коли $i=1$, маємо

$$\sum_{k\in S(0,R)\cap\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}}\frac{|ak|^2n_1(x)-3ak_1ak_pn_p(x)}{|ak|^5}=$$

$$=\sum_{k\in S(0,R)\cap\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}}\frac{(ak_2)^2-(ak_1)^2}{|ak|^5}n_1(x)+$$

$$+\sum_{k\in S(0,R)\cap\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}}\frac{(ak_3)^2-(ak_1)^2}{|ak|^5}n_1(x)-3\sum_{k\in S(0,R)\cap\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}}\frac{ak_1ak_2}{|ak|^5}n_2(x)-$$

$$-3\sum_{k\in S(0,R)\cap\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}}\frac{ak_1ak_3}{|ak|^5}n_3(x)\,. \tag{16}$$

У правій частині рівності (16) в першому виразі внесок від вузлів (k_1, k_2, k_3) та (k_2, k_1, k_3) компенсується, в другому — від вузлів (k_1, k_2, k_3) та (k_3, k_2, k_1), в третьому та четвертому — відповідно від вузлів (k_1, k_2, k_3) та $(-k_1, k_2, k_3)$. Аналогічно можна показати, що для значень $i=2, 3$ суми по $k\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}\cap S(0, R)$ дорівнюють нулю.

Визначимо тепер вклад у вираз (15) диполів з області $\mathbb{R}^3\setminus S(0,R)$. Оскільки вони достатньо віддалені від початку координат, то підрахуємо їх вклад у макроскопічному наближенні. Тобто будемо вважати, що розглядається суцільне середовище з дипольним моментом $D_i=d^{-1}\int\limits_{\partial F_0}\varphi_i(y)\times$ $\times\, y_idS_y$. Відповідний тензор напруг $T_{jl}(U,Q)$ дорівнює виразу $T_{ij}(U,Q)=$ $=\frac{1}{3}\left(D_ln_l+\frac{4}{5}D_j\right)$. Ця рівність встановлюється за допомогою процедури, подібної до тієї, що використовується для підрахунку напруженості електростатичного поля в діелектрику з певним дипольним моментом [7].

Таким чином, якщо у вузлах кубічної гратки за винятком початку координат розташувати механічні диполі з дипольним моментом $D_i=$ $=d^{-1}\int\limits_{\partial F_0}\varphi_i(y)\,y_idSy$, то контрчлен (13) співпаде з виразом (14).

Згідно з лемою рівняння (7) набувають вигляду

$$\frac{1}{2}\varphi_i(x)+(A_{ij}\varphi_j)(x)+(B_{ij}\varphi_j)(x)+\frac{d}{3}\,D_ln_l(x)\left(\frac{4}{5}+\delta_{jj}n_j(x)\right)=v_i^\infty\,. \tag{17}$$

Ці рівняння вільні від розбіжностей і є шуканими рівняннями для густини гідродинамічного потенціалу подвійного шару граничної задачі (1), (2) в області з складною границею $\partial\left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}F_k\right)$.

3. Розв'язки інтегральних рівнянь. Теорема. *Якщо* $c_0\rho^{4/3}+\frac{9}{5}\rho<1$, $c_0<\infty$, *то існує єдиний розв'язок інтегральних рівнянь* (17), *який визначається збіжним в нормі простору* $B(\partial F_0)$ *рядом.*

Доведення. Для інтегральних операторів (11) — (13) справедливі оцінки $\left(\rho=\frac{4}{3}\pi(d/a)^3\right)$

$$\sup_{x\in L_\nu}|(A_{ij}\varphi_j)(x)|\leqslant\text{const}\,\|\varphi\|, \tag{18}$$

$$\sup_{x\in L_0} |(C_{ij}\varphi_j)(x)| \leqslant \text{const}\, \|\varphi\|\, \rho, \tag{19}$$

$$\sup_{x\in L_0} |(B_{ij}\varphi_j)(x)| \leqslant \text{const}\, \|\varphi\|\, \rho^{2/3}. \tag{20}$$

Оцінка (18) перевіряється безпосереднім підрахунком, а нерівність (19) є наслідком леми. Доведемо нерівність (20). Загальний член ряду (12) пропорційний функції $|x-y|^2 |x-y-ak|^{-4}$, для якої вірна оцінка

$$|x-y|^2\, |x-y-ak|^{-4} \leqslant a^{-2}\, |k|^{-4}, \quad x\in L_0, \quad y\in \partial F_0.$$

Отже ряд (12) можна мажорувати так:

$$|(B_{ij}\varphi_j)(x)| \leqslant c_1 a^{-2} \|\varphi\| \sum_{k\in \mathbb{Z}^3\setminus\{0\}} |k|^{-4}, \quad c_1 < \infty,$$

де ряд по $k \in \mathbb{Z}^3\setminus\{0\}$ є абсолютно збіжним і його сума не перевищує деяку константу. Таким чином, ядро оператора $B_{ij}(x, y)$ є неперервною по $x\in L_0$, $y\in \partial F_0$ функцією і для оператора B_{ij} виконується оцінка (20). З аналогічних міркувань також маємо

$$\sup_{x\in \partial F_0} |(B_{ij}\varphi_j)(x)| \leqslant \text{const}\, \|\varphi\|\, \rho^{4/3}. \tag{21}$$

Розв'язки рівнянь (17) можна представити у вигляді

$$\varphi_i(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} ([(I+A)_{ij}^{-1} (B_{jl}+C_{jl})]^n (I+A)_{lp}^{-1} v_p^{\infty})(x), \tag{22}$$

де через $((I+A)_{ij}^{-1} v_j^{\infty})(x)$ позначено відомий розв'язок граничної задачі про обтікання рідиною однієї кулі [1]. Згідно з оцінками (18)—(21) ряд (22) є збіжним в нормі простору $B(\partial F_0)$, якщо $c_0\rho^{3/4} + \frac{9}{5}\rho < 1$.

4. Формули для полів швидкості і тиску. Оскільки формули (3), (4) для розв'язків граничної задачі (1), (2) є формальними (вони визначаються рядами по $k\in \mathbb{Z}^3$, що не є абсолютно збіжними), то застосуємо до них віднімальну процедуру. В результаті матимемо такі формули для поля швидкості:

$$v_i(x) = -\frac{3}{4\pi} \int_{\partial F_0} \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)(x_l-y_l)}{|x-y|^5} n_l(y)\, \varphi_j(y)\, dS_y -$$

$$-\frac{3}{8\pi} \int_{\partial F_0} \sum_{k\in \mathbb{Z}^3\setminus\{0\}} \frac{\partial^2}{\partial(x_p-y_p)\,\partial(x_m-y_m)} ((x_i-y_i-ak_i)(x_j-y_j-ak_j)\times$$

$$\times (x_l-y_l-ak_l)\,|x-y-ak|^{-5})|_{\xi}\, (x_p-y_p)(x_m-y_m)\, \varphi_j(y)\, n_l(y)\, dS_y -$$

$$-\frac{1}{3} d^{-1} \int_{\partial F_0} \varphi_l(y)\, y_l dS_y\, x_l\left(\frac{4}{5} + \delta_{ij} n_j(x)\right), \tag{23}$$

та тиску

$$p(x) = \frac{\nu}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\partial F_0} \frac{x_i-y_i}{|x-y|^3} n_j(y)\, \varphi_i(y)\, dS_y + \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\partial F_0} \sum_{k\in \mathbb{Z}^3\setminus\{0\}} \frac{\partial}{\partial(x_p-y_p)} \left(\frac{x_i-y_i-ak_i}{|x-y-ak|^3}\right)\Bigg|_{\xi} (x_p-y_p)\times$$

$$\left. \times\, n_j(y)\, \varphi_i(y)\, dS_y - \frac{1}{3} d^{-1} \int_{\partial F_0} \varphi_l(y)\, y_l\, dS_y\, x_l \right\}. \tag{24}$$

Згідно з оцінками (18)—(21) вирази (23), (24) визначені в просторі $B_1(\partial F_0)$.

Зауважимо, що вирази (23), (24) є розкладами функцій $v(x)$, $p(x)$ в ряд по параметру ρ. Тому формули (23), (24) дозволяють отримувати явні вирази для полів швидкості та тиску в кожному порядку по ρ.

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.— М. : Наука, 1970.— 288 с.
2. *Odqvist F. K. G.* Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten // Math. Z.— 1930.— 32.— P. 329—375.
3. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей.— Киев : Наук. думка, 1984.— 280 с.
4. *Gerasimenko V. I., Stashenko M. A.* The Stokes Flow inside Dynamic Membranes.— Kiev, 1984.— 20 p.— (Preprint; ITP-84-47E).
5. *Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С.* О вычитательном формализме при умножении причинных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1956.— 20.— С. 585—610.
6. *Петрина Д. Я.* О решении одной классической задачи электростатики и вычитательная процедура // Докл. АН СССР.— 1983.— 270, № 1.— С. 78—82.
7. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества.— М. : Наука, 1966.— 624 с.

Получено 19.09.88