УДК 517.512

К. М. СЛЕПЕНЧУК, канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

Теоремы тауберова типа для матричных преобразований двойных рядов

Для определенного класса матриц преобразования двойного числового ряда установлена теорема тауберова типа с условием на матрицы типа O-большое.

Для певного класу матриць перетворення подвійного числового ряду встановлена теорема тауберового типу з умовою на матриці типу O-велике.

Преобразуем двойной числовой ряд

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} u_{kl}, \tag{1}$$

частичные суммы которого S_{mn}, с помощью матриц $\Gamma = \| \gamma_k^{(1)}(x)\, \gamma_l^{(2)}(y) \|$ и $A = \| a_k^{(1)}(x)\, a_l^{(2)}(y) \|$ следующим образом:

$$\Gamma(x, y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \gamma_k^{(1)}(x)\,\gamma_l^{(2)}(y)\,u_{kl}, \quad A(x, y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_k^{(1)}(x)\,a_l^{(2)}(y)\,S_{kl}$$

при условии, что ряды сходятся в области $D\{a \leqslant x < \infty,\ b \leqslant y < \infty,\ a > 0,\ b > 0\}$.

Двойной ряд (1) Г-суммируем к S, если $\Gamma(x, y) \to S,\ x, y \to \infty$.

Аналогично определяется A-суммируемость $\{S_{mn}\}$.

В настоящей статье доказана теорема тауберова типа с условием O-большое для матричных преобразований двойных рядов.

Отметим, что эта теорема была сформулирована в виде тезисов в [1].

Введем обозначения:

$$\Delta_l \alpha_{kl} = \alpha_{kl} - \alpha_{kl-1}, \quad \Delta_k \alpha_{kl} = \alpha_{kl} - \alpha_{k-1l},$$

$$\Delta \alpha_{kl} = \alpha_{kl} - \alpha_{k-1l} - \alpha_{kl-1} + \alpha_{k-1l-1},$$

$$\overline{\Delta}_l \alpha_{kl} = \alpha_{kl} - \alpha_{kl+1}, \quad \overline{\Delta}_k \alpha_{kl} = \alpha_{k+1l} - \alpha_{kl}.$$

Г-метод, для которого

1) матрицы $\|\gamma_{mk}^{(1)}\|$ и $\|\gamma_{nl}^{(2)}\|$ являются регулярными;

2) ряды $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_{mk}^{(1)}}{c_k^{(1)}},\ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\gamma_{nl}^{(2)}}{c_l^{(2)}}$ сходятся, $c_k^{(1)} > h,\ c_l^{(2)} > h,\ h > 0$;

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |\overline{\Delta}_k \Gamma_{mk}^{(1)}| = O(1),\ \sum_{l=1}^{\infty} |\overline{\Delta}_l \Gamma_{nl}^{(2)}| = O(1)$, где

$$\Gamma_{mk}^{(1)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=k}^{\infty} \frac{\gamma_{mi}^{(1)}}{c_i^{(1)}} - \sum_{i=k}^{m} \frac{1}{c_i^{(1)}}, & 1 \leqslant k \leqslant m; \\ \displaystyle\sum_{i=k}^{\infty} \frac{\gamma_{mi}^{(1)}}{c_i^{(1)}}, & k > m, \end{cases}$$

$$\Gamma_{nl}^{(2)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=l}^{\infty} \frac{\gamma_{nl}^{(2)}}{c_l^{(2)}} - \sum_{i=l}^{n} \frac{1}{c_i^{(2)}}, & 1 \leqslant l \leqslant n; \\ \displaystyle\sum_{i=l}^{\infty} \frac{\gamma_{nl}^{(2)}}{c_l^{(2)}}, & l > n, \end{cases}$$

обозначим через $(\Gamma, c^{(1)}, c^{(2)})$.

A-метод, для которого

4) матрицы $\|a_{mk}^{1}\|$ и $\|a_{nl}^{(2)}\|$ являются регулярными;

5) ряды $\displaystyle\sum_{i=k}^{\infty} a_{mi}^{(1)} \sum_{j=k}^{i} \frac{1}{c_j^{(1)}},\ \sum_{i=l}^{\infty} a_{ni}^{(2)} \sum_{j=l}^{i} \frac{1}{c_j^{(2)}}$ сходятся;

6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |\overline{\Delta}_k A_{mk}^{(1)}| = O(1),\quad \sum_{l=1}^{\infty} |\overline{\Delta}_l A_{nl}^{(2)}| = O(1)$, где

$$A_{mk}^{(1)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=k}^{\infty} a_{mi}^{(1)} \sum_{j=k}^{i} \frac{1}{c_j^{(1)}} - \sum_{j=k}^{m} \frac{1}{c_j^{(1)}}, & 1 \leqslant k \leqslant m; \\ \displaystyle\sum_{i=k}^{\infty} a_{mi}^{(1)} \sum_{j=k}^{i} \frac{1}{c_j^{(1)}}, & k > m, \end{cases}$$

$$A_{nl}^{(2)} = \begin{cases} \sum\limits_{i=l}^{\infty} a_{ni}^{(2)} \sum\limits_{j=l}^{i} \frac{1}{c_j^{(2)}} - \sum\limits_{i=l}^{n} \frac{1}{c_i^{(2)}}, & 1 \leqslant l \leqslant n; \\ \sum\limits_{i=l}^{\infty} a_{ni}^{(2)} \sum\limits_{j=l}^{i} \frac{1}{c_j^{(2)}}, & l > n; \end{cases}$$

7) $N \sum\limits_{l=N}^{\infty} a_{ml}^{(1)} = O_m(1)$, $N \sum\limits_{i=N}^{\infty} a_{ni}^{(2)} = O_n(1)$,

обозначим через $(A, c^{(1)}, c^{(2)})$.

Будем говорить, что двойной ряд (1) принадлежит классу R_1 ($\{S_{mn}\} \in R_2$), если сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{mk}^{(1)} u_{kl}, \qquad \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_{nl}^{(2)} u_{kl},$$
$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}^{(1)} S_{kl}, \quad \sum_{l=1}^{\infty} a_{nl}^{(2)} S_{kl}\right). \tag{2}$$

Теорема. *Если двойной ряд* (1) $(\Gamma, c^{(1)}, c^{(2)})$*-суммируем к* S (*двойная* $\{S_{mn}\}$ $(A, c^{(1)}, c^{(2)})$*-суммируема к* S), *то он* (*она*) *сходится к* S, *если*

8) $\tau_{mn}^{(1)} = c_m^{(1)} \gamma_m^{(1)} \sum\limits_{l=1}^{n} u_{ml} = O(1)$, $\gamma_m^{(1)} \to \infty$, $m \to \infty$, $\tau_{mn}^{(2)} = c_n^{(2)} \gamma_n^{(2)} \times \sum\limits_{k=1}^{m} u_{kn} = O(1)$, $\gamma_n^{(2)} \to \infty$, $n \to \infty$;

9) *двойной ряд* (1) *принадлежит классу* R_1 ($\{S_{mn}\} \in R_2$).

Доказательство. Пусть двойной ряд (1) $(\Gamma, c^{(1)}, c^{(2)})$-суммируем к S. В дальнейшем, если принять во внимание (2), двойные ряды можно заменить повторными. Рассмотрим тождество

$$\Gamma_{mn} - S_{mn} = \left(\sum_{l=1}^{\infty} \gamma_{nl}^{(2)} \Delta_l S_{ml} - S_{ml}\right) + \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_{nl}^{(2)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{mk}^{(1)} u_{kl} - \Delta_l S_{ml}\right) =$$
$$= \sigma_{ml}^{(1)} + \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_{nl}^{(2)} \sigma_{ml}^{(2)} = \sigma_{mn}^{(1)} + \sigma_{mn}^{(3)}. \tag{3}$$

Заметим, что

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\tau_{kn}^{(1)}}{c_k^{(1)} \gamma_k^{(1)}}, \quad S_{mn} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\tau_{ml}^{(2)}}{c_l^{(2)} \gamma_l^{(2)}},$$

$$S_{mn} - S_{mn-1} = \frac{\tau_{mn}^{(2)}}{c_n^{(2)} \gamma_n^{(2)}}, \quad S_{mn} - S_{mn-1} = \frac{\tau_{mn}^{(1)}}{c_m^{(1)} \gamma_m^{(1)}}.$$

Положим

$$\mu_{nl}^{(2)} = \sum_{i=l}^{\infty} \frac{\gamma_{ni}^{(2)}}{c_i^{(2)}}, \quad \mu_{mk}^{(1)} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\gamma_{mi}^{(1)}}{c_i^{(1)}}.$$

В силу преобразования Абеля

$$\sum_{l=1}^{N} \mu_{nl}^{(2)} \Delta_l \frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}} = \sum_{l=1}^{N-1} \frac{\gamma_{nl}^{(2)}}{c_l^{(2)}} \frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}} + \mu_{nN}^{(2)} \frac{\tau_{mN}^{(2)}}{\gamma_N^{(2)}},$$

откуда

$$\sum_{l=1}^{\infty}\mu_{nl}^{(2)}\Delta_l \frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}}=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\gamma_{nl}^{(2)}}{c_l^{(2)}}\frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}},$$

а следовательно,

$$\sigma_{mn}^{(1)}=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\gamma_{nl}^{(2)}}{c_l^{(2)}}\frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}}-\sum_{l=1}^{n}\frac{\tau_{ml}^{(2)}}{c_l^{(2)}\gamma_l^{(2)}}=\sum_{l=1}^{\infty}\mu_{nl}^{(2)}\Delta_l\frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}}-$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{c_l^{(2)}}\sum_{i=1}^{l}\Delta_i\frac{\tau_{mi}^{(2)}}{\gamma_i^{(2)}}=\sum_{l=1}^{\infty}\mu_{nl}^{(2)}\Delta_l\frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}}-$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{i=l}^{n}\frac{1}{c_i^{(2)}}\right)\Delta_l\frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}}=\sum_{l=1}^{\infty}\Gamma_{nl}^{(2)}\Delta_l\frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}}.$$

А так как

$$\sum_{l=1}^{N-1}\Gamma_{nl}^{(2)}\Delta_l\frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}}=\sum_{l=1}^{N-1}\overline{\Delta}_l\Gamma_{nl}^{(2)}\frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}}+\frac{\tau_{mN}^{(2)}}{\gamma_N^{(2)}}\Gamma_{nN}^{(2)},\ \Gamma_{nN}^{(2)}\to 0,\ N\to\infty,\ n=1,2,\ldots$$

то

$$\sigma_{mn}^{(1)}=\sum_{l=1}^{\infty}\overline{\Delta}_l\Gamma_{nl}^{(2)}\frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}}.$$

Пусть $|\tau_{ml}^{(2)}|\gamma_l^{(2)}<\varepsilon,\ m>\mu,\ l>\nu$. Так как для $l\leqslant\nu$

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\Delta}_l\Gamma_{nl}^{(2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c_l^{(2)}}(\gamma_{nl}^{(2)}-1)=0,$$

то из неравенства

$$|\sigma_{mn}^{(1)}|\leqslant\sum_{l=1}^{\nu}|\overline{\Delta}_l\Gamma_{nl}^{(2)}|\frac{|\tau_{ml}^{(2)}|}{\gamma_l^{(2)}}+\sum_{l=\nu+1}^{\infty}|\overline{\Delta}_l\Gamma_{nl}^{(2)}|\frac{|\tau_{ml}^{(2)}|}{\gamma_l^{(2)}}$$

имеем $\sigma_{mn}^{(1)}=o(1),\ m,\ n\to\infty$.

Далее,

$$\sum_{k=1}^{N}\mu_{mk}^{(1)}\Delta\frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\gamma_k^{(1)}}=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\gamma_{mk}^{(1)}\Delta_l\tau_{kl}^{(1)}}{c_k^{(1)}\gamma_k^{(1)}}+\frac{\gamma_{mN}\Delta_l\tau_{Nl}^{(1)}}{c_N^{(1)}\gamma_N^{(1)}},$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{mk}^{(1)}\Delta\frac{\tau_{ml}^{(1)}}{\gamma_k^{(1)}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_{mk}^{(1)}\Delta_l\tau_{kl}^{(1)}}{c_k^{(1)}\gamma_k^{(1)}}=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{mk}^{(1)}u_{kl}.$$

Следовательно,

$$\sigma_{ml}^{(2)}=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{mk}^{(1)}\Delta\frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\gamma_k^{(1)}}-\sum_{k=1}^{m}\frac{\Delta_l\tau_{kl}^{(1)}}{c_k^{(1)}\gamma_k^{(1)}}=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{mk}^{(1)}\Delta\frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\gamma_k^{(1)}}-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{c_k^{(1)}}\sum_{i=1}^{m}\Delta\frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\gamma_k^{(1)}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{mk}^{(1)}\Delta\frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\gamma_k^{(1)}}-\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=k}^{m}\frac{1}{c_i^{(1)}}\right)\Delta\frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\gamma_k^{(1)}}=\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma_{mk}^{(1)}\Delta\frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\gamma_k^{(1)}}.$$

В таком случае

$$\sigma_{mn}^{(3)} = \sum_{k,l=1}^{\infty} \Gamma_{mk}^{(1)} \gamma_{nl}^{(2)} \Delta \frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_k^{(1)}}.$$

Если применить преобразование Харди, то

$$\sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{N} \Gamma_{mk}^{(1)} \gamma_{nl}^{(2)} \Delta \frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\gamma_k^{(1)}} = \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{l=1}^{N-1} \overline{\Delta}_k \Gamma_{mk}^{(1)} \overline{\Delta}_l \gamma_{nl}^{(2)} \frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\gamma_k^{(1)}} + \overline{\Delta}_N \gamma_{nN}^{(2)} \sum_{k=1}^{N-1} \overline{\Delta}_k \Gamma_{mk}^{(1)} \frac{\tau_{kN}^{(1)}}{\gamma_k^{(1)}} +$$

$$+ \tau_{MN}^{(1)} \Gamma_{mM}^{(1)} \gamma_{nN}^{(2)} \frac{1}{\gamma_M^{(1)}} + \overline{\Delta}_M \Gamma_{mM}^{(1)} \sum_{l=1}^{N-1} \overline{\Delta}_l \gamma_{nl}^{(2)} \frac{\tau_{Ml}^{(1)}}{\gamma_M^{(1)}},$$

откуда

$$\sigma_{mn}^{(3)} = \sum_{k,l=1}^{\infty} \overline{\Delta}_k \Gamma_{mk}^{(1)} \overline{\Delta}_l \gamma_{kl}^{(2)} \frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\gamma_k^{(1)}}.$$

Из неравенства

$$|\sigma_{mn}^{(3)}| \leqslant \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{l=1}^{\nu} + \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{l=1}^{\infty} + \sum_{k=\mu}^{\infty} \sum_{l=1}^{\nu} + \sum_{k=\mu+1}^{\infty} \sum_{l=\nu+1}^{\infty}$$

имеем $\sigma_{mn}^{(3)} = o(1)$, $m, n \to \infty$. А тогда, как показывает (3), $S_{mn} \to S$, $m, n \to \infty$.

Пусть двойной ряд (1) $(A, c^{(1)}, c^{(2)})$-суммируем к S. Рассмотрим тождество

$$A_{mn} - S_{mn} = \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{nl}^{(2)} S_{ml} - S_{ml} \right) - \sum_{l=1}^{\infty} a_{nl}^{(2)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}^{(1)} S_{kl} - S_{ml} \right) =$$

$$= \overline{\sigma}_{mn}^{(1)} + \sum_{l=1}^{\infty} a_{nl}^{(2)} \overline{\sigma}_{ml}^{(2)} = \overline{\sigma}_{mn}^{(1)} + \overline{\sigma}_{mn}^{(3)}. \tag{4}$$

Если положить

$$R_{nl} = \sum_{i=l}^{\infty} a_{ni}^{(2)} \sum_{j=l}^{i} \frac{1}{c_j^{(2)}}, \quad \delta_{nl} = \sum_{i=l}^{\infty} a_{ni}^{(2)},$$

то

$$\sum_{l=1}^{N+1} R_{nl} \overline{\Delta}_l \frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}} = \sum_{l=1}^{N} \frac{\delta_{nl}^{(2)}}{c_l^{(2)}} \frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}} + R_{nN+1} \frac{\tau_{mN+1}^{(2)}}{\gamma_{n+1}^{(2)}},$$

$$\sum_{l=1}^{N} \delta_{n} \frac{1}{c_l^{(2)}} \frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}} = \sum_{l=1}^{N-1} a_{nl}^{(2)} \sum_{i=1}^{l} \frac{\tau_{mi}^{(2)}}{c_i^{(2)} \gamma_i^{(2)}} + \delta_{nN} \sum_{l=1}^{N} \frac{\tau_{ml}^{(2)}}{c_l^{(2)} \gamma_l^{(2)}},$$

$$\sigma_{mn}^{(1)} = \lim_{N \to \infty} \sum_{l=1}^{N-1} a_{nl}^{(2)} \sum_{i=1}^{l} \frac{\tau_{mi}^{(2)}}{c_i^{(2)} \gamma_i^{(2)}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_l^{(1)}} \sum_{i=1}^{l} \overline{\Delta}_i \frac{\tau_{mi}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}} =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{l=1}^{N+1} R_{nl} \overline{\Delta}_l \frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}} - R_{nN+1} \frac{\tau_{mN+1}^{(2)}}{\gamma_{N+1}^{(2)}} - \delta_{nN} \sum_{l=1}^{N} \frac{\tau_{ml}^{(2)}}{c_l^{(2)} \gamma_l^{(2)}} \right) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{i=l}^{n} \frac{1}{c_i^{(2)}} \right) \overline{\Delta}_l \frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}} = \sum_{l=1}^{\infty} A_{nl}^{(2)} \overline{\Delta}_l \frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}}.$$

А так как

$$\sum_{l=1}^{N} A_{nl}^{(2)} \overline{\Delta}_l \frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}} = \sum_{l=1}^{N-1} \overline{\Delta}_l A_{nl}^{(2)} \frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}} + \frac{\tau_{mN}^{(2)}}{\gamma_N^{(2)}} A_{nN}^{(2)},$$

$$A_{nN}^{(2)} \to 0, \quad N \to \infty, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то

$$\overline{\sigma}_{mn}^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \overline{\Delta}_l A_{nl}^{(2)} \frac{\tau_{ml}^{(2)}}{\gamma_l^{(2)}}.$$

Легко видеть, что $\overline{\sigma}_{mn}^{(1)} = o(1)$, m, $n \to \infty$. Так как

$$\overline{\sigma}_{mn}^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk}^{(1)} \Delta_k \frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\gamma_k^{(1)}}$$

и

$$\sum_{l=1}^{N} \delta_{nl} \Delta \frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\gamma_k^{(1)}} = \sum_{k=1}^{N-1} a_{ml}^{(1)} \Delta_k \frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\gamma_k^{(1)}} + \delta_{nN} \Delta_k \frac{\tau_{kN}^{(1)}}{\gamma_N^{(1)}},$$

то

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{nl}^{(2)} \Delta_k \frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\gamma_k^{(1)}} = \sum_{l=1}^{\infty} \delta_{nl} \Delta \frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\gamma_k^{(1)}}.$$

Следовательно,

$$\overline{\sigma}_{mn}^{(3)} = \sum_{k,l=1}^{\infty} A_{mk}^{(1)} a_{nl}^{(2)} \Delta \frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\gamma_k^{(1)}}.$$

Если применить преобразование Харди, то

$$\overline{\sigma}_{mn}^{(3)} = \sum_{k,l=1}^{\infty} \overline{\Delta}_k A_{mk}^{(1)} a_{nl}^{(2)} \frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\gamma_k^{(1)}},$$

откуда $\overline{\sigma}_{mn}^{(3)} = o(1)$, m, $n \to \infty$, если принять во внимание, что для $k \leqslant \nu$

$$\lim_{m\to\infty} \Delta A_{mk} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{c_k^{(1)}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{ni} - 1 \right) = 0.$$

А тогда, как показывает (4), $S_{mn} \to S$, m, $n \to \infty$.

1. *Слепенчук К. М.* Теоремы тауберова типа для матричных преобразований // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1987.— 180.— С. 200—201.

Получено 18.09.89