УДК 517.98

И. Г. ИЗВЕКОВ, канд. физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т)

Принцип локализации для разложений обобщенных функций по собственным функциям оператора Штурма—Лиувилля на конечном интервале

Для линейных методов суммирования разложений обобщенных функций в ряды по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля установлены условия, при которых имеет место принцип локализации Римана.

Для лінійних методів підсумовування розкладів узагальнених функцій в ряди за власними функціями оператора Штурма — Ліувілля встановлено умови, при яких має місце принцип локалізації Рімана.

1. Пусть A — дифференциальный оператор, порождаемый на $(0; \pi)$ выражением $-d^2/dx^2 + q(x)$ с бесконечно дифференцируемой на $[0; \pi]$ действительной функцией $q(x)$. Область определения $\mathcal{D}(A)$ оператора A состоит из функций $y(x) \in C^2([0; \pi])$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\begin{cases} y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \\ y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Значения параметра μ, при которых уравнение $Ay = \mu y$ имеет ненулевые решения из $\mathcal{D}(A)$, называются собственными значениями, а соответствующие решения — собственными функциями оператора A. Известно, что при сформулированных условиях оператор A имеет бесконечное множество действительных собственных значений, образующих последовательность $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, а последовательность нормированных собственных функций $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ образует ортогональный базис в $L^2(0;\pi)$ [1].

Область определения оператора A^p, $p = 0, 1, \ldots,$ обозначим через $\mathscr{D}_p$. На этом множестве вводится норма $\|y\|_p = \max\limits_{\substack{x\in[0,\pi]\\ j=0,1,\ldots,p}} |(A^j y)(x)|$. $\mathscr{D}_\infty$ будет обозначать множество $\bigcap\limits_{p=1}^{\infty} \mathscr{D}_p$ с топологией проективного предела. Заметим, что $\mathscr{D}_\infty$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций и содержит все бесконечно дифференцируемые функции с носителями, принадлежащими $[0;\pi]$.

Множество всех линейных непрерывных функционалов над $\mathscr{D}_\infty$ обозначим через $\mathscr{D}'_\infty$, а элементы этого пространства будем называть обобщенными функциями. Если $y\in\mathscr{D}_\infty$, а $F\in\mathscr{D}'_\infty$, то $\langle F, y\rangle$ обозначает действие функционала F на элемент y.

Любую функцию $f(x)\in L^2(0;\pi)$ можно отождествлять с функционалом $F_f\in\mathscr{D}'_\infty$, определяемым формулой

$$\langle F_f, y\rangle = \int_0^\pi f(x)\,y(x)\,dx, \quad y\in\mathscr{D}_\infty.$$

Для произвольной обобщенной функции $F\in\mathscr{D}'_\infty$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(F)\,u_n(x), \quad c_n(F) = \langle F, u_n\rangle \tag{2}$$

сходится к F, вообще говоря, в слабой топологии пространства $\mathscr{D}'_\infty$. Однако во многих задачах математической физики естественным образом возникают преобразования рядов вида (2), связанные с различными линейными методами суммирования. При этом, если обобщенная функция F на некотором интервале $(a;b)\subset[0;\pi]$ совпадает с гладкой функцией $f(x)$, то ряд (2) может суммироваться к этой функции уже не в слабой топологии, а в более сильном смысле, например равномерно внутри (a,b). В связи с этим возникает задача общего описания линейных методов суммирования, обладающих такими свойствами.

2. Говорят, что обобщенная функция F равна нулю на интервале $(a;b)\subset[0;\pi]$, если $\langle F, y\rangle = 0$ для любой функции $y\in\mathscr{D}_\infty$ с носителем в $(a;b)$. Обобщенные функции F_1 и F_2 совпадают на $(a;b)$, если $F_1 - F_2 = 0$ на $(a;b)$.

Пусть $\{\lambda_n(\xi)\} = \Lambda$, $n = 0, 1, \ldots,$ — набор действительных чисел, а параметр ξ пробегает множество с предельной точкой ξ_0. Предполагается, что $\lambda_0(\xi) = 1$, и метод суммирования рядов, определяемый этим набором коэффициентов, регулярен [2]. Для ряда (2) величины

$$S_\xi(F, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(\xi)\,c_n(F)\,u_n(x)$$

называются средними метода суммирования Λ. Если для любой обобщенной функции F, равной нулю на интервале $(a;b)$, и любого $\varepsilon > 0$ средние равномерно сходятся к нулю при $\xi\to\xi_0$, $x\in[a+\varepsilon; b-\varepsilon]$, то Λ называется методом суммирования типа $\mathscr{L}(\mathscr{D}_\infty)$.

Т е о р е м а. *Если для всех $p = 0, 1, 2, \ldots$ и $\sigma > 0$:*

$$\max_{x\in[\sigma;2\pi-\sigma]} \left| \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\xi)\cos nx \right)^{(p)} \right| \to 0, \quad \xi\to\xi_0, \tag{3}$$

то Λ — метод суммирования типа $\mathscr{L}(\mathscr{D}_\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определенности будем считать, что в условиях (1) $\alpha\neq 0$ и $\beta\neq 0$. Известно, что в рассматриваемом случае собственные функции $y_n(x)$ оператора A допускают представление

$$y_n(x) = \cos(\sqrt{\mu_n}x) + \int_0^x K(x; t)\cos(\sqrt{\mu_n}t)\,dt, \tag{4}$$

где функция $K(x; t)$ бесконечно дифференцируема по обеим переменным, а собственные числа μ_n разлагаются при $n \to \infty$ в асимптотические ряды [3]

$$\sqrt{\mu_n} \simeq n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k+1}}{n^{2k+1}}. \tag{5}$$

Подставляя в (4) асимптотическое представление $\sqrt{\mu_n}$, после несложных преобразований получаем

$$y_n(x) = \sum_{j=0}^{p}\left(\frac{b_{2j}(x)}{n^{2j}}\cos nx + \frac{b_{2j+1}(x)}{n^{2j+1}}\sin nx\right) + O\left(\frac{1}{n^{2p+2}}\right),$$

где $b_0(x) = 1$, а функции $b_l(x)$, $l = 0, 1, \ldots, 2p+1$, бесконечно дифференцируемы на $[0; \pi]$ и не зависят от n. Отсюда для нормированных собственных функций $u_n(x)$ легко получаем представление

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{c_{2j}(x)}{n^{2j}}\cos nx + \frac{c_{2j+1}(x)}{n^{2j+1}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2p+2}}\right). \tag{6}$$

Далее, пусть $F \in \mathcal{D}'_\infty$ и $F = 0$ на интервале $(a; b) \subset [0; \pi]$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и выберем бесконечно дифференцируемую функцию $g(t)$, равную 1 при $t \in [a + \varepsilon/2; b - \varepsilon/2]$ и 0 вне $(a; b)$. Тогда, обозначая $h(t) = 1 - g(t)$, имеем

$$S_\xi(F, x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(\xi)c_n(F)u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(\xi)\langle F_t, h(t)u_n(t)u_n(x)\rangle =$$

$$= \langle F_t, h(t)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(\xi)u_n(t)u_n(x)\rangle.$$

Покажем, что семейство функций $Q_\xi(x; t) = h(t)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(\xi)u_n(t)u_n(x)$ при $x \in [a + \varepsilon; b - \varepsilon]$ является ограниченным множеством в пространстве $\mathcal{D}_\infty$. Поскольку $h(t) = 0$ при $t \in [a + \varepsilon/2; b - \varepsilon/2]$ и операция умножения на бесконечно дифференцируемую функцию $h(t)$ непрерывна в $\mathcal{D}_\infty$, достаточно доказать ограниченность при $x \in [a + \varepsilon; b - \varepsilon]$ и $t \overline{\in} [a + \varepsilon/2, b - \varepsilon/2]$ величин $A^p\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(\xi)u_n(t)u_n(x)\right)$ для каждого $p = 0, 1, \ldots$.

Заметим, что равенство $A^p(u_n(t)u_n(x)) = \mu_n^p u_n(t)u_n(x)$ после подстановки в него асимптотических представлений (5) и (6) и простых преобразований принимает вид

$$A^p(u_n(t)u_n(x)) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\{[n^{2p} + \alpha_1(x; t)n^{2p-2} + \ldots \alpha_p(x; t)]\cos n(t - x) + \tag{7}$$

$$+ [n^{2p} + \beta_1(x; t)n^{2p-2} + \ldots + \beta_p(x; t)]\cos n(t + x) + \tag{8}$$

$$+ \left[n^{2p-1} + \gamma_1(x; t)n^{2p-3} + \ldots + \frac{\gamma_p(x; t)}{n}\right]\sin n(t - x) + \tag{9}$$

$$+ \left[n^{2p-1} + \delta_1(x; t)n^{2p-3} + \ldots + \frac{\delta_p(x; t)}{n}\right]\sin n(t + x), \tag{10}$$

где функции α_i, β_i, γ_i, δ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, бесконечно дифференцируемы по обеим переменным.

Из результатов работы [4] следует, что при $x \in [a + \varepsilon; b - \varepsilon]$, $t \in [a + \varepsilon/2; b - \varepsilon/2]$ ряды, составленные из слагаемых вида (7)—(10), равномерно суммируются методом Λ к нулю. Отсюда следует, что для таких значений x и t и $p = 1, 2, \ldots$:

$$\left| A^p \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (\xi)\, u_n (t)\, u_n (x) \right) \right| \leqslant C_p = \mathrm{const}.$$

Выберем теперь последовательность функций $f_j \in C^\infty([0; \pi])$ такую, что $f_j = 0$ на $(a + \varepsilon/3; b - \varepsilon/3)$, $j = 1, 2, \ldots$, и сходящуюся к F в пространстве $\mathscr{D}'_\infty$. Это значит, что $f_j \to F$ в некотором пространстве $\mathscr{D}'_p$, т. е. для любого $\delta > 0$ существует j_0, для которого

$$|\langle F - f_{j_0}, y \rangle| \leqslant \delta \| y \|_p, \quad y \in \mathscr{D}_\infty.$$

Тогда для всех $x \in [a + \varepsilon; b - \varepsilon]$:

$$| S_\xi (F, x) | = |\langle F_t, Q_\xi (x, t) \rangle| \leqslant |\langle F - f_{j_0}, Q_\xi (x, t) \rangle| + \\ + |\langle f_{j_0}, Q_\xi (x, t) \rangle| \leqslant \delta C_p + |\langle f_{j_0}, Q_\xi (x, t) \rangle|.$$

Поскольку последнее слагаемое равномерно стремится к нулю при $\xi \to \xi_0$, $x \in [a + \varepsilon; b - \varepsilon]$ в силу полноты системы $\{u_n (x)\}$ в $L^2 (0; \pi)$ и регулярности метода суммирования Λ, а $\delta > 0$ произвольно мало, то теорема доказана.

В заключение отметим, что в [4] приводятся многочисленные примеры линейных методов суммирования, удовлетворяющих условию теоремы. В частности, методами типа $\mathscr{L} (\mathscr{D}_\infty)$ являются классические методы суммирования Абеля — Пуассона и Гаусса — Вейерштрасса.

1. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма—Лиувилля и Дирака.— М. : Наука, 1988.— 432 с.
2. *Харди Г.* Расходящиеся ряды.— М. : Изд-во иностр. лит., 1951.— 504 с.
3. *Марченко В. А.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1977.— 332 с.
4. *Извеков И. Г.* Принцип локализации Римана для рядов Фурье в пространствах обобщенных функций // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1986.— № 2.— С. 5—8.

Получено 05.12.90