УДК 517.44:519.46

В. И. СТОГНИЙ, канд. физ.-мат. наук (Киев. политех. ин-т),
В. М. ШТЕЛЕНЬ, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Симметрия и точные решения некоторых уравнений Фоккера — Планка

Изучена симметрия и построены точные решения одно- и двухмерных уравнений Фоккера — Планка.

Вивчена симетрія та побудовані точні розв'язки одно- та двовимірних рівнянь Фоккера — Планка.

В настоящей работе изучена симметрия некоторых одномерных уравнений Фоккера—Планка (ФП) и на основании этого найдены в явном виде замены, которые сводят различные уравнения ФП к уравнению теплопроводности. Также рассмотрена симметрия и построены точные решения двухмерного уравнения ФП — уравнения Крамерса.

1. Уравнение ФП является основным уравнением в теории непрерывных марковских процессов. В одномерном случае оно имеет вид (см., например, [1, 2])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(x, t)u] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(x, t)u], \tag{1}$$

где $u = u(x, t)$ — плотность вероятности; A, B — некоторые гладкие функции.

Особый интерес представляют следующие случаи уравнения (1) [1, 2]: процесс диффузии в поле силы тяжести

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}[gu] + \frac{1}{2}D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

процесс Орнштейна — Уленбека

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}[kxu] + \frac{1}{2}D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3}$$

процесс рэлеевского типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\gamma x - \frac{\mu}{x}\right)u\right] + \frac{1}{2}\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4}$$

процессы в популяционной генетике

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[(x-c)^2 u] + \beta\frac{\partial}{\partial x}[(x-c)u], \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[(1-x^2)^2 u], \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[x^2(1-x)^2 u], \tag{7}$$

процесс Рэлея

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\gamma x - \frac{\mu}{x}\right)u\right] + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{8}$$

где D, g, k, γ, μ, α, β, c — произвольные постоянные.

С помощью метода Ли [3] можно показать, что максимальная в смысле Ли алгебра инвариантности уравнений (2)—(7) шестимерна. В частности, для уравнения (3) базисные элементы алгебры инвариантности имеют вид

$$
\begin{gathered}
X_0 = \partial_t, \quad X_1 = \exp\{-kt\}\,\partial_x, \quad x_2 = u\partial_u, \\
X_3 = \exp\{-2kt\}\left(-\frac{1}{k}\,\partial_t + x\partial_x - u\partial_u\right), \\
X_4 = \exp\{kt\}\left(\partial_x - \frac{2}{D}\,kxu\partial_u\right), \\
X_5 = \exp\{2kt\}\left(\frac{1}{k}\,\partial_t + x\partial_x - \frac{kx^2}{D}\,u\partial_u\right).
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Поскольку уравнение ФП диффузионного типа и, кроме того, в рассматриваемом случае уравнения (2)—(7) имеют размерность алгебры инвариантности ту же, что и уравнение диффузии (теплопроводности) [3], естественно возникает вопрос о возможной связи между этими уравнениями. Положительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. *Уравнения* (2)—(7) *с помощью замены*

$$u(x, t) = f(x, t)\,w(y(x, t), \tau(x, t)), \tag{10}$$

где функция f и новые переменные y, τ соответственно равны:

$$f = \exp\left\{-\frac{g}{D}x - \frac{g^2}{2D}t\right\}, \quad y = x, \quad \tau = \frac{1}{2}Dt, \tag{11}$$

$$f = \exp\{kt\}, \quad y = \exp\{kt\}\,x, \quad \tau = \frac{D}{4k}\exp\{2kt\}, \tag{12}$$

$$f = \exp\{2\gamma t\}\,x, \quad y = \exp\{\gamma t\}\,x, \quad \tau = \frac{\mu}{4\gamma}\exp\{2\gamma t\}, \tag{13}$$

$$
\begin{gathered}
f = \exp\left\{\left(-\frac{\beta^2}{2\alpha} - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{8}\right)t\right\}(x - c)^{-\beta/\alpha - 3/2}, \\
y = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\ln(x - c), \quad \tau = t,
\end{gathered}
\tag{14}
$$

$$f = \exp\{-t\}(1 - x^2)^{-3/2}, \quad y = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}, \quad \tau = t, \tag{15}$$

$$f = \exp\left\{-\frac{\alpha}{8}t\right\}x^{-3/2}(1 - x)^{-3/2}, \quad y = \ln\frac{x}{1 - x}, \quad \tau = \frac{\alpha}{2}t, \tag{16}$$

сводятся к уравнению теплопроводности

$$w_\tau = w_{yy}. \tag{17}$$

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

Замечание 1. Для уравнения ФП (1) можно доказать более общее утверждение. Уравнение (1) с коэффициентами

$$A(x, t) = A(x), \quad B(x, t) = B = \text{const} \tag{18}$$

сводится к уравнению теплопроводности тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$A^{\cdot} + B\frac{\partial A}{\partial x} = c_2x^2 + c_1x + c_0, \tag{19}$$

где c_0, c_1, c_2 — некоторые постоянные.

Нетрудно проверить, что в случае уравнений (2)—(7) условие (19) выполнено, а для уравнения (8) — нет. Отметим также, что общее решение уравнения Риккати (19) в квадратурах не выражается [4].

Замечание 2. В работах [5, 6] рассматривается уравнение ФП вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[(a(t)x + b(t))u\right] + c(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{20}$$

где $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ — произвольные функции t.

С помощью довольно сложных алгебраических методов для уравнения (20) в [5, 6] найден один класс решений. Результат [5, 6] можно легко получить, используя фундаментальное решение уравнения теплопроводности и тот факт, что уравнение (20) сводится к уравнению (17) с помощью замены (7), где

$$f = \exp\{\alpha(t)\}, \quad y = \exp\{\alpha(t)\}x + \beta(t), \quad \tau = \gamma(t),$$

$$\alpha(t) = -\int_0^t a(s)\,ds, \quad \beta(t) = \int_0^t b(s)\exp\{\alpha(s)\}\,ds, \tag{21}$$

$$\gamma(t) = \int_0^t c(s)\exp\{2\alpha(s)\}\,ds.$$

2. Рассмотрим двухмерное уравнение ФП, которое описывает движений частицы во флуктуирующей среде (броуновское движение)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(yu) + \frac{\partial}{\partial y}(V'(x)u) + \gamma\frac{\partial}{\partial y}\left(yu + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{22}$$

где $u = u(t, x, y)$, γ — произвольная постоянная, $V(x)$ — потенциал, градиент которого $V'(x)$ создает силу (внешнюю), действующую на частицу. Уравнение (22) известно в литературе (см., например, [1]) как уравнение Крамерса.

Изучим симметрийные свойства свободного уравнения Крамерса ($V'(x) = 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(yu) + \gamma\frac{\partial}{\partial y}\left(yu + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{23}$$

Теорема 2. *Максимальной в смысле Ли алгеброй инвариантности уравнения (23) является 6-мерная алгебра Ли, базисные элементы которой имеют вид*

$$\begin{gathered} P_0 = \partial_t, \quad P_1 = \partial x, \quad I = u\partial_u, \\ G_1 = t\partial_x + \partial_y - \frac{1}{2}(y + \gamma x)u\partial_u, \\ S_1 = \exp\{\gamma t\}\left(\frac{1}{\gamma}\partial_x + \partial_y - yu\partial_u\right), \\ T_1 = \exp\{-\gamma t\}\left(\frac{1}{\gamma}\partial_x - \partial_y\right) \end{gathered} \tag{24}$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{gathered} [P_0, G_1] = P_1, \quad [P_0, S_1] = \gamma S_1, \\ [P_0, T_1] = -\gamma T_1, \quad [P_1, G_1] = -\frac{1}{2}\gamma I, \\ [T_1, S_1] = I \end{gathered} \tag{25}$$

(*все остальные коммутаторы равны нулю*).

Доказательство можно получить с помощью метода Ли.

З а м е ч а н и е. При $V'(x) = c$ уравнение (22) с помощью замены

$$u = w(\tau, \xi, \eta), \quad \tau = t, \quad \xi = x + \frac{c}{\gamma} t, \; \eta = y + \frac{c}{\gamma} \tag{26}$$

сводится к уравнению (23).

Выпишем конечные преобразования, порождаемые операторами G_1, S_1, T_1 (24). Имеем

$$G_1: t' = t, \quad x' = x + at, \; y' = y + a,$$
$$u'(x') = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(ay + \frac{a^2}{2}(1 + \gamma t) + \gamma a x\right)\right\} u(x); \tag{27}$$

$$S_1: t' = t, \; x' = x + \frac{b}{\gamma}\exp\{\gamma t\}, \; y' = y + b\exp\{\gamma t\},$$
$$u'(x') = \exp\left\{-by\exp\{\gamma t\} - \frac{b^2}{2}\exp\{2\gamma t\}\right\} u(x); \tag{28}$$

$$T_1: t' = t, \; x' = x + \frac{\Theta}{\gamma}\exp\{-\gamma t\}, \; y' = y - \Theta\exp\{-\gamma t\},$$
$$u'(x') = u(x), \tag{29}$$

где a, b и Θ — произвольные параметры.

Используя эти преобразования, нетрудно построить соответствующие формулы размножения [7] решений уравнения (23):

$$u_{\text{II}}(t, x, y) = \exp\left\{\frac{1}{2}\left(ay + \frac{a^2}{2}(1 + \gamma t) + \gamma a x\right)\right\} u_{\text{I}}(t', x', y'), \tag{30}$$

$$u_{\text{II}}(t, x, y) = \exp\left\{+by\exp\{\gamma t\} + \frac{b^2}{2}\exp\{2\gamma t\}\right\} u_{\text{I}}(t', x' y'), \tag{31}$$

$$u_{\text{II}}(t, x, y) = u_{\text{I}}(t', x', y'), \tag{32}$$

где t', x' и y' — указаны в (27)—(29) соответственно. Если $u_{\text{I}}(t, x, y)$ — решение уравнения (23), то $u_{\text{II}}(t, x, y)$, построенное по формулам (30) — (32), также будет его решением.

Отметим, что преобразования (27) — это галилеевские преобразования (переменная y в уравнении Крамерса (22) совпадает с точностью до постоянного множителя со скоростью частицы).

Хорошо известное в статистической физике распределение Больцмана

$$u(x, y) = N\exp\left\{-V(x) - \frac{1}{2}y^2\right\} \tag{33}$$

(N — некоторая нормировочная постоянная) является решением уравнения (22). Это стационарное решение. Применяя к (33) с $V(x) = 0$ формулы (30)—(32), легко получить новые нестационарные решения уравнения (17).

С помощью оператора S_1 согласно алгоритму [7—9] находим анзац

$$u(t, x, y) = \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}\varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = t, \quad \omega_2 = \gamma x - y. \tag{34}$$

Подстановка (34) в уравнение (17) редуцирует его к уравнению теплопроводности

$$\varphi_{\omega_1} - \gamma\varphi_{\omega_2\omega_2} = 0. \tag{35}$$

Простейшим решением уравнения (35) будет $\varphi = \text{const}$, но именно оно совместно с (34) приводит к решению уравнения (23) в виде распределения Больцмана (33).

Используя решения уравнения теплопроводности (35) и анзац (34), можно выписать множество решений уравнения (23). В частности, с помощью фундаментального решения уравнения (35) находим

$$u(t, x, y) = \sqrt{\frac{1}{4\pi\gamma t}}\exp\left\{-\left(\frac{y^2}{2} + \frac{(\gamma x - y)^2}{4\gamma t}\right)\right\}. \tag{36}$$

Оператор T_1 приводит к анзацу

$$u = \tilde{\varphi}(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = t, \quad \omega_2 = \gamma x + y, \tag{37}$$

который редуцирует (23) к уравнению (35), где $\varphi = \exp\{\gamma\omega_1\}\tilde{\varphi}(\omega_1, \omega_2)$.

Построим еще ряд решений уравнения (23) используя способ, описанный в [10]. С этой целью представим операторы G_1, S_1, T_1 (24) в следующем виде:

$$G_1 = t\partial_x + \partial_y + \frac{1}{2}(\gamma x + y),$$

$$S_1 = \exp\{\gamma t\}\left(\frac{1}{\gamma}\partial_x + \partial_y + y\right), \tag{38}$$

$$T_1 = \exp\{-\gamma t\}\left(\frac{1}{\gamma}\partial_x - \partial_y\right).$$

Итак, если $u_0(t, x, y)$ — решение уравнения (23), то решениями также будут функции Qu_0, Q^2u_0, ..., где Q — любой из операторов (38).

Например, выбирая в качестве $u_0 = \exp\{\gamma t\}$, находим

$$u_1 = 2G_1\exp\{\gamma t\} = \exp\{\gamma t\}(\gamma x + y),$$

$$u_2 = G_1u_1 = \exp\{\gamma t\}\left[(\gamma t + 1) + \frac{1}{2}(\gamma x + y)^2\right], \tag{39}$$

. . . .

С помощью T_1 и решения (23) находим

$$u_1 = T_1\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} = y\exp\left\{-\left(\gamma t + \frac{y^2}{2}\right)\right\},$$

$$u_2 = T_1u_1 = (-1 + y^2)\exp\left\{-\left(2\gamma t + \frac{y^2}{2}\right)\right\}. \tag{40}$$

К решениям (33), (36), (39), (40) можно применить формулы размножения (30)—(32).

1. *Гардинер К. В.* Стохастические методы в естественных науках.— М. : Мир, 1986.— 526 с.
2. *Kimura M.* Diffusion models in population genetics // J. Appl. Probab.— 1964.— **1**, N 2.— P. 178—230.
3. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М. : Наука, 1976.— 576 с.
5. *Suzuki M.* Decomposition formulas of exponential operators and Lie exponentials with some applications to quantum mechanics and statistical physics // J. Math. Phys.— 1985.— 26, N 4.— P. 601—612.
6. *Wolf F.* Lie algebraic solutions of linear Fokker — Planck equations // Ibid.— 1988.— 29, N 2.— P. 305—307.
7. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики.— Киев : Наук. думка, 1989.— 335 с.
8. *Фущич В. И.* Симметрия в задачах математической физики // Теоретико-алгебраические исследования в мат. физике.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 6—28.
9. *Фущич В. И.* О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений // Укр. мат. журн.— 1987.— 39, № 1.— С. 116—123.
10. *Штелень В. М.* Об одном способе построения точных решений многомерных линейных дифференциальных уравнений // Симметрия и точные решения нелинейн. уравнений мат. физики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1987.— С. 31—36.

Получено 21.09.89

Оператор T_1 приводит к анзацу

$$u = \tilde{\varphi}(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = t, \quad \omega_2 = \gamma x + y, \tag{37}$$

который редуцирует (23) к уравнению (35), где $\varphi = \exp\{\gamma\omega_1\} \tilde{\varphi}(\omega_1, \omega_2)$.

Построим еще ряд решений уравнения (23) используя способ, описанный в [10]. С этой целью представим операторы G_1, S_1, T_1 (24) в следующем виде:

$$G_1 = t\partial_x + \partial_y + \frac{1}{2}(\gamma x + y),$$

$$S_1 = \exp\{\gamma t\}\left(\frac{1}{\gamma}\partial_x + \partial_y + y\right), \tag{38}$$

$$T_1 = \exp\{-\gamma t\}\left(\frac{1}{\gamma}\partial_x - \partial_y\right).$$

Итак, если $u_0(t, x, y)$ — решение уравнения (23), то решениями также будут функции Qu_0, Q^2u_0, ..., где Q — любой из операторов (38).

Например, выбирая в качестве $u_0 = \exp\{\gamma t\}$, находим

$$u_1 = 2G_1 \exp\{\gamma t\} = \exp\{\gamma t\}(\gamma x + y),$$

$$u_2 = G_1 u_1 = \exp\{\gamma t\}\left[(\gamma t + 1) + \frac{1}{2}(\gamma x + y)^2\right], \tag{39}$$

. . . .

С помощью T_1 и решения (23) находим

$$u_1 = T_1 \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} = y \exp\left\{-\left(\gamma t + \frac{y^2}{2}\right)\right\},$$

$$u_2 = T_1 u_1 = (-1 + y^2)\exp\left\{-\left(2\gamma t + \frac{y^2}{2}\right)\right\}. \tag{40}$$

К решениям (33), (36), (39), (40) можно применить формулы размножения (30)—(32).

1. *Гардинер К. В.* Стохастические методы в естественных науках.— М. : Мир, 1986.— 526 с.
2. *Kimura M.* Diffusion models in population genetics // J. Appl. Probab.— 1964.— **1**, N 2.— P. 178—230.
3. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М. : Наука, 1976.— 576 с.
5. *Suzuki M.* Decomposition formulas of exponential operators and Lie exponentials with some applications to quantum mechanics and statistical physics // J. Math. Phys.— 1985.— 26, N 4.— P. 601—612.
6. *Wolf F.* Lie algebraic solutions of linear Fokker — Planck equations // Ibid.— 1988.— 29, N 2.— P. 305—307.
7. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики.— Киев : Наук. думка, 1989.— 335 с.
8. *Фущич В. И.* Симметрия в задачах математической физики // Теоретико-алгебраические исследования в мат. физике.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 6—28.
9. *Фущич В. И.* О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений // Укр. мат. журн.— 1987.— 39, № 1.— С. 116—123.
10. *Штелень В. М.* Об одном способе построения точных решений многомерных линейных дифференциальных уравнений // Симметрия и точные решения нелинейн. уравнений мат. физики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1987.— С. 31—36.

Получено 21.09.89