УДК 517.5

С. Г. КАЛЬНЕЙ, канд. физ.-мат. наук (Моск. ин-т электрон. техники)

Об аналоге теоремы С. М. Никольского для рядов Якоби

Доказывается достаточное условие для ограниченности функции Лебега линейных средних рядов Якоби. Из него и ранее полученной автором оценки снизу функции Лебега выведены необходимые и достаточные условия сходимости линейных средних рядов Якоби непрерывных функций, аналогичные условиям С. М. Никольского для тригонометрических рядов.

Доводиться достатня умова для функції Лебега лінійних середніх рядів Якобі. З нього і раніше здобутої автором оцінки знизу функції Лебега виведені необхідні та достатні умови збіжності лінійних середніх рядів Якобі неперервних функцій, аналогічні умовам С. М. Нікольського для тригонометричних рядів.

1. Пусть $\{\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — ортонормированная на $[-1, 1]$ с весом $\rho(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$ $(\alpha, \beta > -1)$ система алгебраических многочленов Якоби. Через $L_{\alpha,\beta}$ обозначим пространство измеримых по Лебегу на $[-1, 1]$ функций таких, что

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \|f\rho\|_{L[-1,1]} < \infty.$$

Всякая функция $f \in L_{\alpha,\beta}$ может быть разложена в ряд Якоби

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(t), \tag{1}$$

где

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(t)\, \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(t)\, \rho(t)\, dt.$$

С помощью треугольной матрицы $\Lambda = \{\lambda_m^n = \lambda_m;\ \ n, m = 0, 1, \ldots;\ \lambda_m = 0$ при $m \geqslant n+1\}$ зададим для ряда (1) последовательность линейных средних

$$\tau_n = \tau_n(f) = \tau_n(f, t; \Lambda) = \sum_{m=0}^{n} \lambda_m^n a_m \hat{P}_m^{(\alpha,\beta)}(t).$$

Рассмотрим задачу о нахождении необходимых и достаточных условий равномерной сходимости на $[-1, 1]$ последовательности $\tau_n(f)$ к непрерывной на $[-1, 1]$ функции f. Известно, что для равномерной сходимости последовательности τ_n к f необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\text{A) } \lim_{n\to\infty} \lambda_m^n = 1,\ \forall m; \qquad \text{B) } \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} L_n^{(\alpha,\beta)}(x; \Lambda) \leqslant c,$$

где c не зависит от n и

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(x; \Lambda) = \int_{-1}^{1} \Big| \sum_{m=0}^{n} \lambda_m \hat{P}_m^{(\alpha,\beta)}(x)\, \hat{P}_m^{(\alpha,\beta)}(t) \Big| \rho(t)\, dt$$

— функция Лебега — Якоби линейных средних. Условие B) трудно проверить. Далее будут получены условия ограниченности функций Лебега в терминах коэффициентов матрицы Λ.

Отметим, что далее через c будут обозначаться постоянные, вообще говоря, различные в разных случаях.

В [1] автором доказана такая теорема.

Теорема A. *Пусть* $-1/2 < \alpha$, $-1 < \beta \leqslant \alpha$. *Тогда*

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} L_n^{(\alpha,\beta)}(x, \Lambda) \geqslant L_n^{(\alpha,\beta)}(1; \Lambda) \geqslant c\sqrt{n} \sum_{m=0}^{n} |\lambda_m| (m+1)^{\alpha} (n+1-m)^{-3/2-\alpha}.$$

Положим $\Delta\lambda_m = \lambda_m - \lambda_{m+1}$, $\Delta^{\gamma}\lambda_m = \Delta(\Delta^{\gamma-1}\lambda_m)$, $\gamma = 2, 3, \ldots$. В п. 4 доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $-1/2 < \alpha$, $-1 < \beta$, $\alpha + 1/2 < \gamma < \alpha + 3/2$, $\gamma \in N$. *Тогда*

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(1; \Lambda) \leqslant c \max_m |\lambda_m| + c \sum_{m=0}^{n-1} (m+1)^{\gamma} \left(\frac{n+1-m}{n}\right)^{\gamma-\alpha-1/2} |\Delta^{\gamma+1}\lambda_m|.$$

Теорема 2. *Пусть* $-1/2 < \alpha$, $-1 < \beta \leqslant \alpha$, $\alpha + 1/2 < \gamma < \alpha + 3/2$, $\gamma \in N$. *Если* $\Delta^{\gamma+1}\lambda_m \geqslant 0\ (\leqslant 0)$ *при* $m = 0, 1, \ldots, n-k$, *где* $k \geqslant 0$ — *фиксированное число, не зависящее от* n, *то для ограниченности* $L_n^{(\alpha,\beta)}(1; \Lambda)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$C)\ |\lambda_m^n| \leqslant c;\ \ D)\ \sqrt{n} \sum_{m=0}^{n} |\lambda_m^n| (m+1)^{\alpha} (n+1-m)^{-3/2-\alpha} \leqslant c.$$

Из этой теоремы следует, что если выполнены условия теоремы 2, то условия *A*), *C*) и *D*) необходимы и достаточны для сходимости последовательности $\tau_n(f, 1; \Lambda)$ к $f(1)$ для $f \in C[-1, 1]$. Если, кроме того, предположить, что $-1/2 \leqslant \beta$, то условия *A*), *C*) и *D*) необходимы и достаточны для равномерной сходимости на $[-1, 1]$ $\tau_n(f, x; \Lambda)$ для $f \in C[-1, 1]$. Это вытекает из того, что при $\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2$ $L_n^{(\alpha,\beta)}(1;\Lambda) = \max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} L_n^{(\alpha,\beta)}(x;\Lambda)$ [2, 3].

Данные следствия теоремы 2 являются аналогами известной теоремы С. М. Никольского [4] для тригонометрических рядов Фурье.

2. Вспомогательные утверждения. Пусть $P_m^{(\alpha,\beta)}(t)$ — многочлены Якоби, нормированные условием $P_m^{(\alpha,\beta)}(1) = \dfrac{\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(m+1)}$ [5]. Если $\alpha \geqslant -1/2$, $\beta > -1$, то для $0 \leqslant t \leqslant 1$ [5, с. 177]

$$|P_m^{(\alpha,\beta)}(t)| \leqslant c \begin{cases}(1-t)^{-\alpha/2-1/4}(m+1)^{-1/2}, \\ (m+1)^{\alpha}.\end{cases} \tag{2}$$

Обозначим

$$B_i^{(\alpha,\beta)}(t) = 2^{-\alpha-\beta-1}\frac{\Gamma(i+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(i+\beta+1)} P_i^{(\alpha,\beta)}(t), \tag{3}$$

$$A_i^{(\alpha,\beta)}(t) = 2^{-\alpha-\beta}\frac{(i+\alpha+1)\Gamma(i+\alpha+\beta+2)}{(2i+\alpha+\beta+2)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(i+\beta+1)} \times$$

$$\times \frac{P_i^{(\alpha,\beta)}(t) - \dfrac{i+1}{i+\alpha+1}P_{i+1}^{(\alpha,\beta)}(t)}{1-t}. \tag{4}$$

В этих обозначениях формулу Кристоффеля — Дарбу [5, с. 83] для ядра Дирихле — Якоби $D_m^{(\alpha,\beta)}(t, x)$ можно записать так:

$$D_m^{(\alpha,\beta)}(t,1) = \sum_{i=0}^{m} \hat{P}_i^{(\alpha,\beta)}(1)\hat{P}_i^{(\alpha,\beta)}(t) = \begin{cases}2(\alpha+1)B_m^{(\alpha+1,\beta)}(t), & (5)\\ A_m^{(\alpha,\beta)}(t). & (6)\end{cases}$$

Отсюда и в силу (3), (4)

$$\sum_{i=0}^{m}(2i+\alpha+\beta+1)B_i^{(\alpha,\beta)}(t) = \begin{cases}2(\alpha+1)B_m^{(\alpha+1,\beta)}(t), & (7)\\ A_m^{(\alpha,\beta)}(t), & (8)\end{cases}$$

$$A_i^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{2}{1-t}\left\{\frac{(i+\alpha+1)(i+\alpha+\beta+1)}{2i+\alpha+\beta+2}B_i^{(\alpha,\beta)}(t) - \right.$$

$$\left. - \frac{(i+1)(i+\beta+1)}{2i+\alpha+\beta+2}B_{i+1}^{(\alpha,\beta)}(t)\right\}. \tag{9}$$

Из оценок (2) и равенства (3) следует

$$|B_i^{(\alpha,\beta)}(t)| \leqslant c\begin{cases}(i+1)^{\alpha-1/2}(1-t)^{-\alpha/2-1/4}, \\ (i+1)^{2\alpha}\end{cases} \tag{10}$$

для $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\alpha \geqslant -1/2$, $\beta > -1$. Для $A_i^{(\alpha,\beta)}(t)$ из (2) и равенства (см. [5, с. 83] (4.5.4))

$$A_i^{(\alpha,\beta)}(t) = 2^{-\alpha-\beta-1}\frac{\Gamma(i+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(i+\beta+1)\Gamma(\alpha+1)} P_i^{(\alpha+1,\beta)}(t)$$

получим ($0 \leqslant t \leqslant 1$, $\alpha, \beta > -1$)

$$|A_i^{(\alpha,\beta)}(t)| \leqslant c(i+1)^{\alpha+1/2}(1-t)^{-\alpha/2-3/4}. \tag{11}$$

Пусть $n \geqslant k \geqslant 0$. Положим $I_1 = \left[-1, 1 - \dfrac{1}{(n-k+1)^2}\right]$, $I_2 = \Big[1 -$

$$-\frac{1}{(n-k+1)^2},\ 1-\frac{1}{(n+1)^2}\Big],\quad I_3=\Big[1-\frac{1}{(n+1)^2},1\Big],\quad I_{11}=\Big[0,1-$$
$$-\frac{1}{(n-k+1)^2}\Big].$$

Лемма 1. *Если* $\alpha,\beta>-1$, *то для любого* δ

$$\int_{-1}^{0}|P_i^{(\alpha,\beta)}(t)|(1-t)^\delta(1+t)^\beta\,dt\leqslant c(i+1)^{-1/2}.$$

Доказательство. Справедливо неравенство

$$\int_{-1}^{0}|P_i^{(\alpha,\beta)}(t)|(1-t)^\delta(1+t)^\beta\,dt\leqslant c\int_{-1}^{0}|P_i^{(\alpha,\beta)}(t)|\rho(t)\,dt\leqslant$$
$$\leqslant c\Big(\int_{-1}^{1}\rho(t)\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_{-1}^{1}|P_i^{(\alpha,\beta)}(t)|^2\rho(t)\,dt\Big)^{1/2}\leqslant c(i+1)^{-1/2},$$

так как

$$\int_{-1}^{1}|P_i^{(\alpha,\beta)}(t)|^2\rho(t)\,dt\leqslant c(i+1)^{-1}.$$

В следующих далее оценках γ полагаем натуральным числом.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha,\beta>-1$, $\gamma>\alpha+1/2$ (*при* $\gamma=1$ $\alpha\geqslant-1/2$). *Тогда*

$$\int_{I_1}|B_i^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t)|(1-t)^{\alpha-1}(1+t)^\beta\,dt\leqslant c(i+1)^{\alpha+\gamma-3/2}(n-k+1)^{\gamma-\alpha-1/2}.$$

Доказательство. Из определения $B_i^{(\alpha,\beta)}(t)$ и леммы 1 следует, что при любых $\alpha,\beta>-1$ и $\gamma\geqslant1$

$$\int_{-1}^{0}|B_i^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t)|(1-t)^{\alpha-1}(1+t)^\beta\,dt\leqslant$$
$$\leqslant c(i+1)^{\alpha+\gamma-1}\int_{-1}^{0}|P_i^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t)|(1-t)^{\alpha-1}(1+t)^\beta\,dt\leqslant c(i+1)^{\alpha+\gamma-3/2}.\tag{12}$$

На промежутке I_{11} в силу (10) получим

$$\int_{I_{11}}|B_i^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t)|(1-t)^{\alpha-1}(1+t)^\beta\,dt\leqslant$$
$$\leqslant c(i+1)^{\alpha+\gamma-3/2}\int_{I_{11}}(1-t)^{\alpha/2-\gamma/2-3/4}\,dt\leqslant c(i+1)^{\alpha+\gamma-3/2}(n-k+1)^{\gamma-\alpha-1/2},$$

если $\alpha+\gamma-1\geqslant-1/2$ и $\gamma-\alpha-1/2>0$. Так как $(n-k+1)^{\gamma-\alpha-1/2}\geqslant1$ при $k\leqslant n$ и $\gamma>\alpha+1/2$, то из последнего неравенства и (12) следует утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Если* $\gamma\leqslant\alpha+3/2$, $\alpha\geqslant-1/2$, $\beta>-1$, *то*

$$\int_{I_2}|A_i^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t)|\rho(t)\,dt\leqslant c(i+1)^{\alpha+\gamma-1/2}\begin{cases}\ln\dfrac{n+1}{n-k+1}, & \gamma=\alpha+3/2,\\ (n-k+1)^{\gamma-\alpha-3/2}, & \gamma<\alpha+3/2.\end{cases}$$

Доказательство. Из неравенства (11) для $\alpha,\beta>-1$ вытекает

$$\int_{I_2}|A_i^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t)|\rho(t)\,dt\leqslant c(i+1)^{\alpha+\gamma-1/2}\int_{I_2}(1-t)^{\alpha/2-\gamma/2-1/4}dt\leqslant$$

$$\leqslant c(i+1)^{\alpha+\gamma-1/2}\begin{cases}\ln\dfrac{n+1}{n-k+1}, \ \gamma=\alpha+\dfrac{3}{2},\\(n-k+1)^{\gamma-\alpha-3/2}, \ \gamma<\alpha+\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

Условие $\alpha\geqslant-1/2$ следует из того, что $\gamma\geqslant 1$ и $\gamma\leqslant\alpha+3/2$.

Далее через $\omega(i, \nu)$ будем обозначать рациональные дроби от переменной i такие, что степень многочлена, стоящего в числителе, не менее, чем на $\nu\geqslant 0$, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе. Коэффициенты многочленов рациональной дроби зависят от параметров ν, α, β. Кроме того, будем предполагать, что знаменатель дроби не имеет неотрицательных нулей. В этом случае существует константа c, зависящая от ν, α, β, такая, что

$$|\omega(i,\nu)|\leqslant c(i+1)^{-\nu}, \qquad i=0,1,\ldots. \tag{13}$$

Далее, очевидно,

$$\omega_1(i,\nu_1)\,\omega_2(i,\nu_2)=\omega_3(i,\nu_1+\nu_2)$$

и

$$\omega(i,\nu)-\omega(i\pm 1,\nu)=\omega_4(i,\nu+1).$$

Отметим, что дробь ω_3 обладает свойством (13), если ω_1 и ω_2 удовлетворяют ему. Подобные рассуждения справедливы для ω_4, но, возможно, лишь при $i\geqslant 1$.

Докажем две леммы, играющие основную роль в оценке норм ядер Валле — Пуссена в п. 3.

Лемма 4. *Пусть* $\gamma\geqslant 1$, $\alpha\geqslant -1/2$, $\beta>-1$ *и*

$$s(t)=\sum_{m=k+1}^{n}\sum_{l=0}^{m}\ldots\sum_{i=0}^{p}\omega(i,\nu)\,A_i^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t),$$

a — *кратная сумма*, $1\leqslant a\leqslant\gamma$, $\nu\geqslant\gamma+a-2$. *Тогда*

$$\int\limits_{I_1\cup I_2}|s(t)|\,\rho(t)\,dt\leqslant cn^{\alpha+1/2}(n-k+1)^{\gamma-\alpha-1/2}\begin{cases}1, \ \alpha+1/2<\gamma<\alpha+3/2,\\\ln(n+1), \ \gamma=\alpha+3/2.\end{cases}$$

Доказательство. Из леммы 3 и неравенства (13) следует

$$\int\limits_{I_2}|s(t)|\,\rho(t)\,dt\leqslant c\sum_{m=k+1}^{n}\ldots\sum_{i=0}^{p}(i+1)^{\alpha+\gamma-\nu-1/2}\begin{cases}(n-k+1^{\gamma-\alpha-3/2}, \ \gamma<\alpha+3/2,\\\ln\dfrac{n+1}{n-k+1}, \ \gamma=\alpha+3/2.\end{cases}$$

Если $\nu\geqslant 0$, $a\leqslant\gamma\leqslant\alpha+3/2$, то при $\nu\geqslant\gamma+a-2$

$$\sum_{m=k+1}^{n}\ldots\sum_{i=0}^{p}(i+1)^{\alpha+\gamma-v-1/2}=\sum_{m=k+1}^{n}\ldots\sum_{i=0}^{p}(i+1)^{\alpha-a+3/2}(i+1)^{\gamma-\nu+a-2}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=k+1}^{n}\ldots\sum_{i=0}^{p}(i+1)^{\alpha-a+3/2}\leqslant c\sum_{m=k+1}^{n}m^{\alpha+1/2}\leqslant cn^{\alpha+1/2}(n-k+1).$$

Таким образом, нужная оценка для $s(t)$ на отрезке I_2 доказана.

Для оценки $s(t)$ на I_1 используем представление (9) для $A_i^{(\alpha,\beta)}(t)$ и свойства функций $\omega(i,\nu)$. Имеем

$$s(t)=\frac{2}{1-t}\sum_{m=k+1}^{n}\ldots\sum_{i=0}^{p}\omega(i,\nu)\left\{\frac{(i+\alpha+\gamma)(i+\alpha+\beta+\gamma)}{2i+\alpha+\beta+\gamma+1}B_i^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t)-\right.$$

$$\left.-\frac{(i+1)(i+\beta+1)}{2i+\alpha+\beta+\gamma+1}B_{i+1}^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t)\right\}=$$

$$=\frac{2}{1-t}\sum_{m=k+1}^{n}\ldots\sum_{i=0}^{p}\{\omega_1(i,\nu-1)\,B_i^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t)-$$

$$-\omega_2(i,\nu-1)B_{i+1}^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t)\}=$$

$$=\frac{2}{1-t}\sum_{m=k+1}^{n}\cdots\sum_{p=0}^{u}\left\{\sum_{i=1}^{p}\omega_3(i,\nu)B_i^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t)+\omega_1(0,\nu-1)\times\right.$$

$$\times B_0^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t)-\omega_2(p,\nu-1)B_{p+1}^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t)\}=s_1+s_2+s_3. \qquad (14)$$

При этом было учтено, что $\omega_1(i,\nu-1)-\omega_2(i-1,\nu-1)=\omega_3(i,\nu)$.

В силу леммы 2 для s_1 получим

$$\int_{I_1}|s_1|\rho(t)\,dt\leqslant c\sum_{m=k+1}^{n}\cdots\sum_{i=1}^{p}(i+1)^{-\nu+\alpha+\gamma-3/2}(n-k+1)^{\gamma-\alpha-1/2}=$$

$$=c(n-k+1)^{\gamma-\alpha-1/2}\sum_{m=k+1}^{n}\cdots\sum_{i=1}^{p}(i+1)^{\alpha-a+1/2}(i+1)^{\gamma+a-\nu-2}\leqslant$$

$$\leqslant c(n-k+1)^{\gamma-\alpha-1/2}\begin{cases}n^{\alpha+1/2}, & a<\alpha+\dfrac{3}{2},\\ n^{\alpha+1/2}\ln(n+1), & a=\gamma=\alpha+\dfrac{3}{2}.\end{cases} \qquad (15)$$

Аналогично оценивается s_3:

$$\int_{I_1}|s_3|\rho(t)\,dt\leqslant c\sum_{m=k+1}^{n}\cdots\sum_{p=0}^{u}(p+1)^{-\nu+1+\alpha+\gamma-3/2}(n-k+1)^{\gamma-\alpha-1/2}\leqslant$$

$$\leqslant c(n-k+1)^{\gamma-\alpha-1/2}\sum_{m=k+1}^{n}\cdots\sum_{p=0}^{u}(p+1)^{\alpha-a+3/2}\leqslant$$

$$\leqslant cn^{\alpha+1/2}(n-k+1)^{\gamma-\alpha-1/2}. \qquad (16)$$

В силу леммы 2 справедлива оценка

$$\int_{I_1}|s_2|\rho(t)\,dt\leqslant c\sum_{m=k+1}^{n}\cdots\sum_{p=0}^{u}(n-k+1)^{\gamma-\alpha-1/2}\leqslant$$

$$\leqslant c(n-k+1)^{\gamma-\alpha-1/2}n^{a-1}\leqslant cn^{\alpha+1/2}(n-k+1)^{\gamma-\alpha-1/2}$$

при $a\leqslant\alpha+3/2$.

С учетом изложенного выше, соотношений (14)—(16) следует искомая оценка для $s(t)$ на промежутке I_1.

Отметим, что при $a=1$ сумма s_2 в равенстве (14) будет иметь несколько иной вид, а именно:

$$s_2=\frac{2}{1-t}\omega_1(k+1,\nu-1)B_{k+1}^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t).$$

Но, в силу леммы 2

$$\int_{I_1}|s_2|\rho(t)\,dt\leqslant c(k+1)^{-\nu+1+\alpha+\gamma-3/2}(n-k+1)^{\gamma-\alpha-1/2}=$$

$$=c(n-k+1)^{\gamma-\alpha-1/2}(k+1)^{\alpha+1/2+\gamma-\nu-1}\leqslant cn^{\alpha+1/2}(n-k+1)^{\gamma-\alpha-1/2},$$

поскольку $\nu\geqslant\gamma-1$ при $a=1$ Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть* $\gamma\geqslant 1$, $\alpha>-1/2$, $\beta>-1$ *и*

$$s(t)=\sum_{m=k+1}^{n}\cdots\sum_{i=0}^{p}\omega(i,\nu)B_i^{(\alpha+\gamma-r\beta)}(t),$$

a — *кратная сумма,* $2\leqslant a\leqslant\gamma$, $1\leqslant r\leqslant a$, $\nu\geqslant 0$, $\nu+2r\geqslant\gamma+a-2$.

Тогда

$$\int\limits_{I_1\cup I_2} |s(t)|\,\rho(t)\,dt \leqslant c\,(n-k+1)^{\gamma-\alpha-1/2} n^{\alpha+1/2} \begin{cases} 1, & \alpha+\frac{1}{2}<\gamma<\alpha+\frac{3}{2}, \\ \ln(n+1), & \gamma=\alpha+\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $r = 1$, $a > 1$. С помощью преобразования Абеля и формулы (8) получим

$$\sum_{i=0}^{p} \omega(i, \nu)\, B_i^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t) = \sum_{i=0}^{p} \omega_1(i, \nu+1)\,(2i+\alpha+\beta+\gamma)\, B_i^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t) =$$
$$= \sum_{i=0}^{p-1} \omega_2(i, \nu+2)\, A_i^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t) + \omega_1(p, \nu+1)\, A_p^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t).$$

Следовательно,

$$s(t) = \sum_{m=k+1}^{n} \dots \sum_{i=0}^{p-1} \omega_2(i, \nu+2)\, A_i^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t) +$$
$$+ \sum_{m=k+1}^{n} \dots \sum_{p=0}^{u} \omega_1(p, \nu+1)\, A_p^{(\alpha+\gamma-1,\beta)}(t).$$

Применяя лемму 4 к каждой сумме в правой части этого равенства, найдем, что лемма справедлива для случая $r = 1$. Заметим, что при $p = 0$ преобразование Абеля применить нельзя. Нужная оценка для $s(t)$ получается аналогично доказательству (16).

Пусть теперь лемма 5 верна для $r = l - 1 \geqslant 1$ и $a > 1$. Докажем, что она верна для $r = l$ и $a > 1$. В силу преобразования Абеля и соотношения (7) будем иметь

$$\sum_{i=0}^{p} \omega(i, \nu)\, B_i^{(\alpha+\gamma-l,\beta)}(t) = \sum_{i=0}^{p} \omega_1(i, \nu+1)\,(2i+\alpha+\beta+\gamma-$$
$$-l+1)\, B_i^{(\alpha+\gamma-l,\beta)}(t) = \sum_{i=0}^{p-1} 2\omega_2(i, \nu+2)\,(\alpha+\gamma-l+1)\, B_i^{(\alpha+\gamma-l+1,\beta)}(t) +$$
$$+ 2\omega_1(p, \nu+1)\,(\alpha+\gamma-l+1)\, B_p^{(\alpha+\gamma-l+1,\beta)}(t).$$

Таким образом,

$$s(t) = \sum_{m=k+1}^{n} \dots \sum_{i=0}^{p-1} \omega_3(i, \nu+2)\, B_i^{(\alpha+\gamma-(l-1),\beta)}(t) +$$
$$+ \sum_{m=k+1}^{p} \dots \sum_{p=0}^{u} \omega_4(p, \nu+1)\, B_p^{(\alpha+\gamma-(l-1),\beta)}(t) = s_1(t) + s_2(t).$$

По условию $\nu + 2l \geqslant \gamma + a - 2$. Но $\nu + 2l = \nu + 2 + 2(l-1)$. Поэтому оценка для $s_1(t)$ получается по предположению. Сумма $s_2(t)$ является $(a-1)$-кратной. Для нее выполнено условие $\nu + 1 + 2(l-1) = \nu + 2l - 1 \geqslant \gamma + a - 1 + 2$. Тем самым оценка для $s_2(t)$ также получается по предположению. Лемма доказана.

3. Ядра Валле — Пуссена. Пусть дан ряд $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$. Суммой Валле — Пуссена порядка γ назовем разность $S_{n,k}^{\gamma} = S_n^{\gamma} - S_k^{\gamma}$, где S_m^{γ} суммы Чезаро порядка γ данного ряда ($n \geqslant k \geqslant 0$, $\gamma \in N$). Средними Валле — Пуссена порядка γ будем называть

$$V_{n,k}^{\gamma} = \frac{S_{n,k}^{\gamma}}{A_n^{\gamma} - A_k^{\gamma}},$$

где A_m^γ — числа Чезаро порядка γ. Отметим, что

$$A_n^\gamma - A_k^\gamma \sim n^{\gamma-1}(n-k+1). \tag{17}$$

Пусть $u_i = \widehat{P}_i^{(\alpha,\beta)}(1)\,\widehat{P}_i^{(\alpha,\beta)}(t)$. В этом случае $V_{n,k}^\gamma = V_{n,k}^\gamma(t)$ назовем ядром Валле — Пуссена порядка γ ряда Фурье — Якоби.

Лемма 6. *Пусть* $\alpha > -1/2$, $\beta > -1$, $\alpha + 1/2 < \gamma < \alpha + 3/2$, $\gamma \in N$. *Тогда*

$$\| V_{n,k}^\gamma \|_{\alpha,\beta} \leqslant c \left(\frac{n}{n-k+1} \right)^{\alpha+3/2-\gamma}.$$

Доказательство. В силу определения $V_{n,k}^\gamma(t)$ и (17) имеем

$$\| V_{n,k}^\gamma \|_{\alpha,\beta} \leqslant c n^{-\gamma+1} (n-k+1)^{-1} \| S_{n,k}^\gamma \|_{\alpha,\beta}, \tag{18}$$

где

$$S_{n,k}^\gamma = S_{n,k}^\gamma(t) = \sum_{m=k+1}^{n} S_m^{\gamma-1}(t) = \sum_{m=k+1}^{n} \cdots \sum_{i=0}^{p} D_i^{(\alpha,\beta)}(t,1).$$

При этом кратность суммы равна γ.

Из оценки (10) и равенства (5) получаем $(\alpha, \beta > -1)$

$$\int_{I_3} | S_{n,k}^\gamma(t) | \rho(t)\, dt \leqslant c \sum_{m=k+1}^{n} \cdots \sum_{i=0}^{p} (i+1)^{2\alpha+2} \int_{I_3} (1-t)^\alpha dt \leqslant$$
$$\leqslant c \sum_{m=k+1}^{n} \cdots \sum_{i=0}^{p} 1 = c (A_n^\gamma - A_k^\gamma) \leqslant c n^{\gamma-1}(n-k+1). \tag{19}$$

Теперь оценим интеграл от $S_{n,k}^\gamma$ на промежутке $I_1 \cup I_2$. При $\gamma = 1$, используя (6), сумму $S_{n,k}^1$ запишем в виде

$$S_{n,k}^1 = \sum_{m=k+1}^{n} D_m^{(\alpha,\beta)}(t,1) = \sum_{m=k+1}^{n} \omega(m,0) A_m^{(\alpha,\beta)}(t).$$

Следовательно, применяя лемму 4 в случае $a = 1$, $\gamma = 1$, $\nu = 0$ и $-1/2 < \alpha < 1/2$, найдем

$$\int_{I_1 \cup I_2} | S_{n,k}^1(t) | \rho(t)\, dt \leqslant c n^{\alpha+1/2} (n-k+1)^{1/2-\alpha}.$$

Из последней оценки и соотношений (18), (19) вытекает, что при $-1/2 < \alpha < 1/2$ и $\beta > -1$

$$\| V_{n,k}^1 \|_{\alpha,\beta} \leqslant c [1 + n^{\alpha+1/2} (n-k+1)^{1/2-\alpha} (n-k+1)^{-1}] =$$
$$= c \left(\frac{n}{n-k+1} \right)^{\alpha+1/2}.$$

Таким образом, в случае $\gamma = 1$ лемма доказана. Пусть теперь $\gamma > 1$. С помощью (5) запишем сумму $S_{n,k}^\gamma$ в виде

$$S_{n,k}^\gamma(t) = \sum_{m=k+1}^{n} \cdots \sum_{i=0}^{p} 2(\alpha+1) B_i^{(\alpha+1,\beta)}(t) =$$
$$= \sum_{m=k+1}^{n} \cdots \sum_{i=0}^{p} \omega(i,0) B_i^{(\alpha+\gamma-(\gamma-1),\beta)}(t).$$

Отсюда и из леммы 5 ($a = \gamma$, $r = \gamma - 1$, $\nu = 0$) получим

$$\int_{I_1 \cup I_2} | S_{n,k}^\gamma(t) | \rho(t)\, dt \leqslant c n^{\alpha+1/2} (n-k+1)^{\gamma-\alpha-1/2},$$

если $\alpha > -1/2$, $\beta > -1$, $\alpha + 1/2 < \gamma < \alpha + 3/2$. Данная оценка в сочетании с (18) и (19) показывает, что при выполнении условий леммы 6

$$\| V_{n,k}^{\gamma} \|_{\alpha,\beta} \leqslant c \left(\frac{n}{n-k+1} \right)^{\alpha+3/2-\gamma}$$

Лемма доказана.

Замечания 1. Лемма 6 справедлива и при $k = -1$, если полагать $A_{-1}^{\gamma} = 0$ для любого γ.

2. Если $\beta \leqslant \alpha$, то из теоремы A следует

$$\| V_{n,k}^{\gamma} \|_{\alpha,\beta} \geqslant c \left(\frac{n}{n-k+1} \right)^{\alpha+3/2-\gamma}.$$

4. Доказательство теорем. Доказательство теоремы 1. Обозначим

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(t, 1; \Lambda) = \sum_{m=0}^{n} \lambda_m \widehat{P}_m^{(\alpha,\beta)}(1)\, \widehat{P}_m^{(\alpha,\beta)}(t)$$

ядро линейных средних. С помощью преобразования Абеля запишем его следующим образом: ($\nu = [n/2]$):

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(t, 1; \Lambda) = \sum_{m=0}^{n} \lambda_m \widehat{P}_m^{(\alpha,\beta)}(1)\, \widehat{P}_m^{(\alpha,\beta)}(t) = \sum_{m=0}^{n} \Delta\lambda_m D_m^{(\alpha,\beta)}(t, 1) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \Delta^{\gamma}\lambda_m S_m^{\gamma-1}(t) = \sum_{m=0}^{\nu} \Delta^{\gamma}\lambda_m S_m^{\gamma-1}(t) + \sum_{m=\nu+1}^{n} \Delta^{\gamma}\lambda_m S_m^{\gamma-1} t) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\nu} A_m^{\gamma}\Delta^{\gamma+1}\lambda_m \sigma_m^{\gamma}(t) - \sum_{m=\nu+1}^{n} (A_n^{\gamma} - A_m^{\gamma})\, \Delta^{\gamma+1}\lambda_m V_{n,m}^{\gamma}(t) +$$

$$+ \Delta^{\gamma}\lambda_{\nu+1} A_n^{\gamma}\sigma_n^{\gamma}(t). \tag{20}$$

Здесь $\sigma_m^{\gamma}(t) = S_m^{\gamma}(t)/A_m^{\gamma}$ — ядра Чезаро порядка γ. Отметим, что если эти же рассуждения применить к сумме $\sum_{m=0}^{n} \Delta\lambda_m = \lambda_0$, то получим

$$\lambda_0 = \sum_{m=0}^{\nu} A_m^{\gamma}\Delta^{\gamma+1}\lambda_m - \sum_{m=\nu+1}^{n-1} (A_n^{\gamma} - A_m^{\gamma})\, \Delta^{\gamma+1}\lambda_m + A_n^{\gamma}\Delta^{\gamma}\lambda_{\nu+1}.$$

Значит,

$$A_n^{\gamma} | \Delta^{\gamma}\lambda_{\nu+1} | \leqslant c \max_m | \lambda_m | +$$

$$+ c \sum_{m=0} (m+1)^{\gamma} | \Delta^{\gamma+1}\lambda_m | + c \sum_{m=\nu+1}^{n-1} (n-m+1)\, n^{\gamma-1} | \Delta^{\gamma+1}\lambda_m |.$$

и, так как $n^{\gamma-1}(n-m+1) \leqslant n^{\gamma} \left(\frac{n-m+1}{n} \right)^{\gamma-\alpha-1/2}$ при $m \geqslant \nu$ и $\gamma < \alpha + 3/2$, то

$$n^{\gamma} | \Delta^{\gamma}\lambda_{\nu+1} | \leqslant c \max_m | \lambda_m | +$$

$$+ c \sum_{m=0}^{n-1} (m+1)^{\gamma} \left(\frac{n-m+1}{n} \right)^{\gamma-\alpha-1/2} | \Delta^{\gamma+1}\lambda_m |. \tag{21}$$

Будем считать, что $S_{-1}^{\gamma} \equiv 0$ для любого γ. Тогда $\sigma_m^{\gamma}(t) = V_{m,-1}^{\gamma}(t)$ и, по лемме 6 и замечанию 1 к ней, $\| \sigma_m^{\gamma} \|_{\alpha,\beta} \leqslant c$, если $\alpha > -1/2$, $\alpha + 1/2 <$

$<\gamma<\alpha+3/2$. Таким образом, в силу (20) и леммы 6

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(1;\Lambda)=\|K_n^{(\alpha,\beta)}(t,1;\Lambda)\|_{\alpha,\beta}\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{m=0}^{\nu}(m+1)^{\gamma}|\Delta^{\gamma+1}\lambda_m|+c\sum_{m=\nu+1}^{n-1}n^{\gamma-1}(n-m+1)|\Delta^{\gamma+1}\lambda_m|\times$$

$$\times\left(\frac{n}{n-m+1}\right)^{\alpha+3/2-\gamma}+cn^{\gamma}|\Delta^{\gamma}\lambda_{\nu+1}|\leqslant c\sum_{m=0}^{\nu}(m+1)^{\gamma}|\Delta^{\gamma+1}\lambda_m|+$$

$$+cn^{\gamma}|\Delta^{\gamma}\lambda_{\nu+1}|+c\sum_{m=\nu+1}^{n-1}(m+1)^{\gamma}\left(\frac{n-m+1}{n}\right)^{\gamma-\alpha-1/2}|\Delta^{\gamma+1}\lambda_m|. \qquad (22)$$

Но $\dfrac{n-m+1}{n}\sim 1$ для $m\leqslant\nu$. Поэтому из (21) и (22) следует

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(1;\Lambda)\leqslant c\max_m|\lambda_m|+c\sum_{m=0}^{n-1}(m+1)^{\gamma}\left(\frac{n-m+1}{n}\right)^{\gamma-\alpha-1/2}|\Delta^{\gamma+1}\lambda_m|.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Необходимость условия D) для ограниченности $L_n^{(\alpha,\beta)}(1;\Lambda)$ вытекает из теоремы А. Необходимость условия C) почти очевидна, а именно: положим $f(t)=\widehat{P}_m^{(\alpha,\beta)}(t)/\widehat{P}_m^{(\alpha,\beta)}(1)$. Тогда $\max\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1}|f(t)|=1$ для $\alpha>-1/2$, $\beta\leqslant\alpha$. Значит,

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(1;\Lambda)\geqslant\left|\int_{-1}^{1}f(t)\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\widehat{P}_i^{(\alpha,\beta)}(1)\widehat{P}_i^{(\alpha,\beta)}(t)\rho(t)\,dt\right|=|\lambda_m|.$$

Для доказательства достаточности прежде всего заметим, что если $|\lambda_m|\leqslant c\varphi(n)$ для $m\in[n_1, n_2]$, то разности $|\Delta^i\lambda_m|\leqslant c\varphi(n)$ для $m\in[n_1, n_2-i]$. В частности, так как из условия D) теоремы 2 вытекает, что $|\lambda_m|\leqslant cn^{-\alpha-1/2}$ при $n-p\leqslant m\leqslant n$, где p — фиксированное число, не зависящее от n, то и

$$|\Delta^i\lambda_m|\leqslant cn^{-\alpha-1/2} \qquad (23)$$

при $n-p\leqslant m\leqslant n$. Далее, если матрица Λ ограничена, то из условия D) следует

$$n^{\alpha+1/2}\sum_{m=0}^{n}|\lambda_m|(n+1-m)^{-3/2-\alpha}\leqslant c. \qquad (24)$$

Таким образом, если выполнены условия теоремы 2, то из теоремы 1 с учетом (23) получим

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(1;\Lambda)\leqslant c+c\left|\sum_{m=0}^{n-k}(m+1)^{\gamma}\left(\frac{n-m+1}{n}\right)^{\gamma-\alpha-1/2}\Delta^{\gamma+1}\lambda_m\right|+$$

$$+c\sum_{m=n-k+1}^{n-1}(m+1)^{\gamma}\left(\frac{n-m+1}{n}\right)^{\gamma-\alpha-1/2}|\Delta^{\gamma+1}\lambda_m|\leqslant$$

$$\leqslant c+cn^{\alpha+1/2-\gamma}\left|\sum_{m=0}^{n-k}(m+1)^{\gamma}(n+1-m)^{\gamma-\alpha-1/2}\Delta^{\gamma+1}\lambda_m\right|. \qquad (25)$$

Для сокращения записи положим $u_m=(m+1)^{\gamma}(n+1-m)^{\gamma-\alpha-1/2}$ и рассмотрим сумму

$$s=\sum_{m=0}^{n-k}u_m\Delta^{\gamma+1}\lambda_m.$$

Применим преобразование Абеля. Получим

$$s = u_0 \Delta^{\gamma} \lambda_0 - u_{n-k} \Delta^{\gamma} \lambda_{n-k+1} - \sum_{m=0}^{n-k-1} \Delta^{\gamma} \lambda_{m+1} \Delta u_m. \tag{26}$$

Так как $|u_0| \leqslant n^{\gamma-\alpha-1/2}$, $|\Delta^{\gamma} \lambda_0| \leqslant c$, $|u_{n-k}| \leqslant cn^{\gamma}$, то из (26) и (23) находим

$$|s| \leqslant \Big| \sum_{m=0}^{n-k-1} \Delta u_m \Delta^{\gamma} \lambda_{m+1} \Big| + cn^{\gamma-\alpha-1/2}.$$

Повторив эти рассуждения γ раз, будем иметь

$$|s| \leqslant \sum_{m=0}^{n-k-\gamma-1} |\Delta^{\gamma+1} u_m| \, |\lambda_{m+\gamma+1}| + cn^{\gamma-\alpha-1/2}. \tag{27}$$

Теперь оценим $\Delta^{\gamma+1} u_m$. Пусть $u(x) = (x+1)^{\gamma} (n+1-x)^{\gamma-\alpha-1/2}$. Тогда

$$|\Delta^{\gamma+1} u_m| \leqslant c \, |u^{(\gamma+1)}(\theta)|,$$

где $m < \theta < m + \gamma + 1$. Из формулы Лейбница для производной произведения

$$|u^{(\gamma+1)}(x)| \leqslant c \sum_{i=0}^{\gamma} (x+1)^{\gamma-i} (n+1-x)^{-\alpha-3/2+i} =$$

$$= c(n+1-x)^{-\alpha-3/2} \sum_{i=0}^{\gamma} (x+1)^{\gamma-i} (n+1-x)^{i} \leqslant cn^{\gamma} (n+1-x)^{-\alpha-3/2}.$$

Итак, $|\Delta^{\gamma+1} u_m| \leqslant cn^{\gamma} (n+1-m)^{-\alpha-3/2}$ при $0 \leqslant m \leqslant n-k-\gamma-1$. Следовательно, в силу (27)

$$|s| \leqslant cn^{\gamma} \sum_{m=0}^{n-k-\gamma-1} |\lambda_{m+\gamma+1}| (n+1-m)^{-\alpha-3/2} \leqslant$$

$$\leqslant cn^{\gamma} \sum_{m=0}^{n} |\lambda_m| (n+1-m)^{-\alpha-3/2}.$$

Отсюда и ввиду (24), (25) окончательно получим

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(1; \Lambda) \leqslant c + cn^{\alpha+1/2} \sum_{m=0}^{n} |\lambda_m| (n+1-m)^{-\alpha-3/2} \leqslant c.$$

Теорема 2 доказана.

1. *Кальней С. Г.* Об оценке снизу функции Лебега линейных средних рядов Фурье — Якоби // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1984.— 170.— С. 113—118.
2. *Askey R.*, *Wainger S.* A convolution structure for Jacobi series // Amer. J. Math.— 1969.— N 2.— P. 463—485.
3. *Gasper G.* Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel // Ann. Math.— 1972.— 95.— N 2.— P. 261—280.
4. *Никольский С. М.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1948.— 12, № 3.— С. 259—278.
5. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены.— М. : Физматгиз, 1962.— 500 с.

Получено 02.07.90

Применим преобразование Абеля. Получим

$$s = u_0\Delta^\gamma\lambda_0 - u_{n-k}\Delta^\gamma\lambda_{n-k+1} - \sum_{m=0}^{n-k-1}\Delta^\gamma\lambda_{m+1}\Delta u_m. \tag{26}$$

Так как $|u_0| \leqslant n^{\gamma-\alpha-1/2}$, $|\Delta^\gamma\lambda_0| \leqslant c$, $|u_{n-k}| \leqslant cn^\gamma$, то из (26) и (23) находим

$$|s| \leqslant \left|\sum_{m=0}^{n-k-1}\Delta u_m\Delta^\gamma\lambda_{m+1}\right| + cn^{\gamma-\alpha-1/2}.$$

Повторив эти рассуждения γ раз, будем иметь

$$|s| \leqslant \sum_{m=0}^{n-k-\gamma-1}|\Delta^{\gamma+1}u_m||\lambda_{m+\gamma+1}| + cn^{\gamma-\alpha-1/2}. \tag{27}$$

Теперь оценим $\Delta^{\gamma+1}u_m$. Пусть $u(x) = (x+1)^\gamma(n+1-x)^{\gamma-\alpha-1/2}$. Тогда

$$|\Delta^{\gamma+1}u_m| \leqslant c|u^{(\gamma+1)}(\theta)|,$$

где $m < \theta < m+\gamma+1$. Из формулы Лейбница для производной произведения

$$|u^{(\gamma+1)}(x)| \leqslant c\sum_{i=0}^{\gamma}(x+1)^{\gamma-i}(n+1-x)^{-\alpha-3/2+i} =$$

$$= c(n+1-x)^{-\alpha-3/2}\sum_{i=0}^{\gamma}(x+1)^{\gamma-i}(n+1-x)^i \leqslant cn^\gamma(n+1-x)^{-\alpha-3/2}.$$

Итак, $|\Delta^{\gamma+1}u_m| \leqslant cn^\gamma(n+1-m)^{-\alpha-3/2}$ при $0 \leqslant m \leqslant n-k-\gamma-1$. Следовательно, в силу (27)

$$|s| \leqslant cn^\gamma\sum_{m=0}^{n-k-\gamma-1}|\lambda_{m+\gamma+1}|(n+1-m)^{-\alpha-3/2} \leqslant$$

$$\leqslant cn^\gamma\sum_{m=0}^{n}|\lambda_m|(n+1-m)^{-\alpha-3/2}.$$

Отсюда и ввиду (24), (25) окончательно получим

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(1;\Lambda) \leqslant c + cn^{\alpha+1/2}\sum_{m=0}^{n}|\lambda_m|(n+1-m)^{-\alpha-3/2} \leqslant c.$$

Теорема 2 доказана.

1. *Кальней С. Г.* Об оценке снизу функции Лебега линейных средних рядов Фурье — Якоби // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1984.— 170.— С. 113—118.
2. *Askey R., Wainger S.* A convolution structure for Jacobi series // Amer. J. Math.— 1969.— N 2.— P. 463—485.
3. *Gasper G.* Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel // Ann. Math.— 1972.— 95.— N 2.— P. 261—280.
4. *Никольский С. М.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1948.— 12, № 3.— С. 259—278.
5. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены.— М. : Физматгиз, 1962.— 500 с.

Получено 02.07.90