УДК 517.944:519.46

Р. З. ЖДАНОВ, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Симметрия и точные решения нелинейных галилеевски-инвариантных уравнений для спинорного поля

С использованием подгрупповой структуры группы Галилея G (1, 3) построены наборы анзацев, приводящих галилеевски-инвариантные спинорные уравнения к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены классы точных решений нелинейного G (1,3)-инвариантного спинорного уравнения со степенной нелинейностью.

З використанням підгрупової структури групи Галілея G (1,3) побудовано анзаци, які зводять галілеєвськи-інваріантні спінорні рівняння до систем звичайних диференціальних рівнянь. Одержано класи точних розв'язків нелінійного G (1,3)-інваріантного спінорного рівняння із степеневою нелінійністю.

Настоящая статья посвящена исследованию симметрии и построению точных решений систем нелинейных спинорных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) вида

$$[-i(\gamma_0+\gamma_4)\partial_t + i\gamma_a\partial_{x_a} + m(\gamma_0-\gamma_4)]\psi = F(\psi^*, \psi), \tag{1}$$

где $\psi = \psi(t, x_1, x_2, x_3)$ — четырехкомпонентная комплекснозначная функция-столбец, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_{x_a} = \partial/\partial x_a$; $\gamma_0, \ldots, \gamma_4$ — матрицы Дирака размерности 4×4; F — четырехкомпонентная функция-столбец. Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 3.

Известно, что уравнение (1) при $F = 0$ инвариантно относительно одиннадцатипараметрической группы Галилея $G(1, 3)$ с такими базисными генераторами (см., например, [1, 2]):

$$P_0 = \partial_t, \quad P_a = \partial_{x_a}, \quad M = 2im, \tag{2}$$

$$G_a = t\partial_{x_a} + 2imx_a + \frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_a,$$

$$J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a} - \frac{1}{2}\gamma_a\gamma_b.$$

Операторы G_a генерируют трехпараметрическую группу галилеевских преобразований

$$t' = t, \quad x'_a = x_a + tv_a,$$

$$\psi'(x') = \exp\left\{-2im\left(v_ax_a + \frac{1}{2}v_av_at\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_av_a\right\}\psi(x), \quad v_a - \text{const}, \quad x = (t, \vec{x}), \tag{3}$$

инвариантность относительно которых означает выполнение принципа относительности Галилея. Исходя из этого, наложим ограничение на вид функции $F(\psi^*, \psi)$, потребовав, чтобы уравнение (1) допускало группу $G(1, 3)$ (см. также [3, 4]).

Теорема. *Система ДУЧП (1) инвариантна относительно группы Галилея если и только если*

$$F = [f_1 + f_2(\gamma_0+\gamma_4)]\psi, \tag{4}$$

где $f_i = f_i(\bar\psi\psi, \bar\psi(\gamma_0+\gamma_4)\psi)$, $\bar\psi = (\psi^*)^T\gamma_0$,

Доказательство этого утверждения, проводимое с помощью инфинитезимального алгоритма С. Ли [5], очень громоздко, поэтому мы его опускаем.

Замечание. При $m = 0$ уравнение (1), (4) инвариантно относительно бесконечнопараметрической группы преобразований

$$t' = t, \quad x'_a = x_a + h_a(t),$$

$$\psi'(x') = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_a\dot h_a(t)\right\}, \tag{5}$$

где $h_a(t) \in C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$ — произвольные функции, $\dot h_a = dh_a/dt$.

Для построения точных решений системы ДУЧП (1), (4) существенно используются ее симметрийные свойства и следующий анзац, предложенный в [6, 7]:

$$\psi(x) = A(x)\varphi(\omega), \tag{6}$$

где $A(x)$ — переменная матрица 4×4, $\omega(x)$ — действительная скалярная функция, $\varphi(\omega)$ — четырехкомпонентная комплекснозначная функция.

Функции $A(x)$, $\omega(x)$ определяются из следующей пер... системы линейных ДУЧП первого порядка:

$$Q_a A \equiv [\xi_{a0}(x)\,\partial_t + \xi_{ab}(x)\,\partial_{x_b} + \eta_a(x)]\,A = 0,$$

$$[\xi_{a0}(x)\,\partial_t + \xi_{ab}(x)\,\partial_{x_b}]\,\omega = 0, \qquad a = \overline{1,3}. \tag{7}$$

Здесь Q_a — линейные комбинации операторов (2), образующие трехмерную алгебру Ли, причем $\operatorname{rank}\|\xi_{a\mu}\|^{3}_{a=1}{}^{3}_{\mu=0} = 3$ (эти условия обеспечивают совместность системы (7)).

Согласно [5, 7] подстановка анзаца (6) с таким образом выбранными $A(x)$, $\omega(x)$ в ДУЧП (1), (4) приводит последнее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений на $\varphi(\omega)$. Если эту систему удается проинтегрировать в квадратурах, то, подставляя полученный результат в формулу (6), приходим к точному решению исходного ДУЧП.

Согласно [8] список $G(1,3)$-неэквивалентных трехмерных подалгебр, удовлетворяющих условию $\operatorname{rank}\|\xi_{a\mu}\|^{3}_{a=1}{}^{3}_{\mu=0} = 3$, исчерпывается такими подалгебрами:

$$A_1 = \langle P_0, P_1, P_2\rangle; \quad A_2 = \langle J_{12} + \alpha P_0, P_1, P_2\rangle; \quad A_3 = \langle P_0 + i\alpha m, P_1, P_2\rangle;$$

$$A_4 = \langle J_{12}, P_0, P_3\rangle; \quad A_5 = \langle J_{12} + \alpha P_0 + \beta G_3, P_1, P_2\rangle;$$

$$A_6 = \langle J_{12} + \alpha G_3, P_1, P_2\rangle; \quad A_7 = \langle J_{12} + \alpha G_3, G_1, G_2\rangle;$$

$$A_8 = \langle J_{12} + \alpha P_3, P_1, P_2\rangle; \quad A_9 = \langle J_{12} + \alpha P_3, G_1, G_2\rangle; \quad A_{10} = \langle P_1, P_2, P_3\rangle;$$

$$A_{11} = \langle G_1, P_2, P_3\rangle; \quad A_{12} = \langle G_1 + \alpha P_1, G_2, P_3\rangle; \quad A_{13} = \langle G_1 + \alpha P_1, G_2 + \beta P_2,$$

$$G_3\rangle; \quad A_{14} = \langle G_1 + \alpha P_0, P_2, P_3\rangle; \quad A_{15} = \langle J_{12} + i\alpha m, P_0, P_3\rangle;$$

$$A_{16} = \langle G_1 + \alpha P_2, G_2 + \alpha P_1 + \beta P_2 + (\alpha\rho + \delta\beta) P_3,$$

$$-G_3 + \rho G_1 + \delta G_2 + \alpha\delta P_1\rangle,$$

где $\alpha, \beta, \delta, \rho \subset \mathbb{R}^1$.

Интегрируя систему ДУЧП (7) для каждой из подалгебр A_1—A_{16}, получаем следующий набор галилеевски-инвариантных анзацев для спинорного поля $\psi(x)$:

1) $\psi(x) = \varphi(x_3)$;

2) $\psi(x) = \exp\left\{\dfrac{t}{2\alpha}\gamma_1\gamma_2\right\}\varphi(x_3)$;

3) $\psi(x) = \exp\{-i\alpha m t\}\varphi(x_3)$;

4) $\psi(x) = \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg}\dfrac{x_1}{x_2}\right\}\varphi(x_1^2 + x_2^2)$;

5) $$\psi(x) = \exp\left\{\frac{2}{3}\, i m\alpha^{-2}\beta t\,(\beta t^2 - 3\alpha x_3) - \alpha^{-1}\beta t\eta_3 + \right.$$
$$\left. + \frac{t}{2\alpha}\gamma_1\gamma_2\right\}\varphi(\beta t^2 - 2\alpha x_3);$$

6) $\psi(x) = \exp\left\{\dfrac{x_3}{2\alpha t}(\gamma_1\gamma_2 - 2\alpha\eta_3 - 2i\alpha m x_3)\right\}\varphi(t)$;

7) $$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{im}{t}(x_1^2 + x_2^2) - t^{-1}(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)\right\}\times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{x_3}{2\alpha t}(2i\alpha m x_3 + \alpha\eta_3 - \gamma_1\gamma_2)\right\}\varphi(t);$$

8) $\psi(x) = \exp\left\{-\dfrac{x_3}{2\alpha}\gamma_1\gamma_2\right\}\varphi(t)$;

9) $$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{im}{t}(x_1^2 + x_2^2) - t^{-1}(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)\right\}\times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{x_3}{2\alpha}\gamma_1\gamma_2\right\}\varphi(t); \tag{8}$$

10) $\psi(x) = \varphi(t)$;

11) $\psi(x) = \exp\left\{-\frac{im}{t}\, x_1^2 - \frac{x_1}{t}\, \eta_1\right\} \varphi(t)$;

12) $\psi(x) = \exp\left\{-\frac{x_2}{t}(imx_2 + \eta_2) + \frac{x_1}{\alpha - t}(imx_1 + \eta_1)\right\} \varphi(t)$;

13) $\psi(x) = \exp\left\{-\frac{x_3}{t}(imx_3 + \eta_3) + \frac{x_1}{\alpha - t}(imx_1 + \eta_1) + \right.$

$$\left. + \frac{x_2}{\beta - t}(imx_2 + \eta_2)\right\} \varphi(t);$$

14) $\psi(x) = \exp\left\{\frac{2}{3}\, i\alpha^{-2} mt\,(t^2 - 3\alpha x_1) - \alpha^{-1} t\eta_1\right\} \varphi(t^2 - 2\alpha x_1)$;

15) $\psi(x) = \exp\left\{\left(i\alpha m - \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2\right) \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}\right\} \varphi(x_1^2 + x_2^2)$;

16) $\psi(x) = \exp\left\{-\frac{x_1}{t}(imx_1 + \eta_1) - im(\alpha x_1 + tx_2)^2 [t(t(t - \beta) - \right.$

$$\left. -\alpha^2)]^{-1} + \frac{x_3}{\tau t}(\alpha\eta_1 + t\eta_2)\right\} \exp\left\{imw^2 [f(t)(t(t-\beta) - \alpha^2)]^{-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{w}{f(t)}[\alpha(\tau^{-1} - \delta t^{-2})\eta_1 + (t\tau^{-1} - \delta)\eta_2 + \eta_3]\right\} \varphi(t),$$

где

$$\eta_a = \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_4)\gamma_a, \quad \tau = \alpha\rho + \delta\beta,$$

$$f(t) = \tau[\alpha(\rho t - \alpha\delta) + \delta t^2] - t[t(t - \beta) - \alpha^2],$$

$$w = \tau(\alpha x_1 + tx_2) + [t(t - \beta) - \alpha^2]\, x_3.$$

В качестве примера рассмотрим процедуру построения анзаца, соответствующего алгебре A_{11}. Подставляя в уравнения (7)

$$Q_1 = t\partial_{x_1} + 2imx_1 + \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_4)\gamma_1, \quad Q_2 = \partial_{x_2}, \quad Q_3 = \partial_{x_3},$$

имеем

$$\frac{\partial A}{\partial x_2} = \frac{\partial A}{\partial x_3} = 0,$$

$$t\frac{\partial A}{\partial x_1} + \left[2imx_1 + \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_4)\gamma_1\right] A = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \frac{\partial \omega}{\partial x_3} = 0, \quad t\frac{\partial \omega}{\partial x_1} = 0. \tag{10}$$

Первый интеграл системы (10), очевидно, имеет вид $\omega = t$. Из (9) следует, что $A = A(t, x_1)$, причем

$$\frac{\partial A}{\partial x_1} = -\omega^{-1}\left(2imx_1 + \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_4)\gamma_1\right) A.$$

Интегрируя эту систему линейных матричных ОДУ, получаем

$$A = \exp\left\{-\frac{imx_1^2}{t} - \frac{x_1}{2t}(\gamma_0 + \gamma_4)\gamma_1\right\}.$$

Подстановка выражений для $\omega(t, \vec{x})$, $A(t, \vec{x})$ в формулу (6) дает анзац 11 из (8) для поля $\psi(t, \vec{x})$.

Подставляя анзацы (8) в ДУЧП (1), (4) и умножая полученные выражения на A^{-1}, после некоторых довольно громоздких вычислений приходим к системам ОДУ на четырехкомпонентные функции $\varphi(\omega)$:

$$
\begin{aligned}
&1)\ i\gamma_3\dot{\varphi} + m(\gamma_0 - \gamma_4)\varphi = R;\\
&2)\ i\gamma_3\dot{\varphi} + \left[\frac{i}{2\alpha}(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_3 + m(\gamma_0-\gamma_4)\right]\varphi = R;\\
&3)\ i\gamma_3\dot{\varphi} + [\alpha m(\gamma_0+\gamma_4) + m(\gamma_0-\gamma_4)]\varphi = R;\\
&4)\ 2i\gamma_2\dot{\varphi}\omega^{1/2} + \left[\frac{i}{2}\omega^{-1/2}\gamma_2 + m(\gamma_0-\gamma_4)\right]\varphi = R;\\
&5)\ -2i\alpha\gamma_3\dot{\varphi} + \left[\frac{i}{2\alpha}(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_3 + \frac{\beta\omega}{\alpha^2}(\gamma_0+\gamma_4) + m(\gamma_0-\gamma_4)\right]\varphi = R;\\
&6)\ -i(\gamma_0+\gamma_4)\dot{\varphi} + \left[\frac{i}{2\alpha\omega}(\gamma_0\gamma_4 - \alpha(\gamma_0+\gamma_4)) + m(\gamma_0-\gamma_4)\right]\varphi = R;\\
&7)\ -i(\gamma_0+\gamma_4)\dot{\varphi} + \left[\frac{i}{2\alpha\omega}\gamma_0\gamma_4 - \frac{i}{\omega}(\gamma_0+\gamma_4) + m(\gamma_0-\gamma_4)\right]\varphi = R;\\
&8)\ -i(\gamma_0+\gamma_4)\dot{\varphi} + \left[m(\gamma_0-\gamma_4) - \frac{i}{2\alpha}\gamma_0\gamma_4\right]\varphi = R;\\
&9)\ -i(\gamma_0+\gamma_4)\dot{\varphi} + \left[m(\gamma_0-\gamma_4) - \frac{i}{\omega}(\gamma_0+\gamma_4) - \frac{i}{2\alpha}\gamma_0\gamma_4\right]\varphi = R; \qquad (11)\\
&10)\ -i(\gamma_0+\gamma_4)\dot{\varphi} + m(\gamma_0-\gamma_4)\varphi = R;\\
&11)\ -i(\gamma_0+\gamma_4)\dot{\varphi} + \left[m(\gamma_0-\gamma_4) - \frac{i}{2\omega}(\gamma_0+\gamma_4)\right]\varphi = R;\\
&12)\ -i(\gamma_0+\gamma_4)\dot{\varphi} + \Big[m(\gamma_0-\gamma_4) - \frac{i}{2}(\omega^{-1} + (\omega-\alpha)^{-1}) \times\\
&\qquad\qquad \times (\gamma_0+\gamma_4)\Big]\varphi = R;\\
&13)\ -i(\gamma_0+\gamma_4)\dot{\varphi} + \Big[m(\gamma_0-\gamma_4) - \frac{i}{2}(\omega^{-1} + (\omega-\alpha)^{-1} +\\
&\qquad\qquad + (\omega-\beta)^{-1})(\gamma_0+\gamma_4)\Big]\varphi = R;\\
&14)\ -2i\alpha\gamma_1\dot{\varphi} + \left[m(\gamma_0-\gamma_4) + \frac{m\omega}{\alpha^2}(\gamma_0+\gamma_4)\right]\varphi = R;\\
&15)\ 2i\omega^{1/2}\gamma_2\dot{\varphi} + \Big[i\omega^{-1/2}\left(i\alpha m\gamma_1 + \frac{1}{2}\gamma_2\right) + m(\gamma_0-\gamma_4) +\\
&\qquad\qquad + \beta m(\gamma_0+\gamma_4)\Big]\varphi = R;\\
&16)\ -i(\gamma_0+\gamma_4)\dot{\varphi} + \{i(\gamma_0+\gamma_4)[[2\omega f(\omega)]^{-1}(\omega^3 + \alpha(\alpha+\rho\tau)\omega -\\
&\qquad\qquad - 2\delta\alpha^2\tau) - \omega^{-1}] + m(\gamma_0-\gamma_4)\}\varphi = R.
\end{aligned}
$$

Здесь $\dot{\varphi} = d\varphi/d\omega$, $R = \{f_1(\bar{\varphi}\varphi, \bar{\varphi}(\gamma_0+\gamma_4)\varphi) + (\gamma_0+\gamma_4)f_2(\bar{\varphi}\varphi, \bar{\varphi}(\gamma_0+\gamma_4)\varphi)\}\varphi$.

Далее построим в явном виде точные решения галилеевски-инвариантного спинорного уравнения

$$[-i(\gamma_0+\gamma_4)\partial_t + i\gamma_a\partial_{x_a} + m(\gamma_0-\gamma_4) - \lambda(\bar{\psi}(\gamma_0+\gamma_4)\psi)^{1/2k}]\psi(t, \vec{x}) = 0, \tag{12}$$

которое получается из (1), (4) при $f_1 = \lambda(\bar{\psi}(\gamma_0+\gamma_4)\psi)^{1/2k}$, λ, k—const, $f_2 = 0$.

Анзацы (8) редуцируют систему ДУЧП (12) к системам ОДУ (11) где $R=\lambda(\bar{\varphi}(\gamma_0+\gamma_4)\varphi)^{1/2k}\varphi$. Нам удалось проинтегрировать уравнения 6 — 13, при этом существенно использовалось следующее утверждение.

Лемма. *Величины*

$$I_6=\bar{\varphi}(\gamma_0+\gamma_4)\varphi\omega,\quad I_7=\bar{\varphi}(\gamma_0+\gamma_4)\varphi\omega^2,\quad I_8=\bar{\varphi}(\gamma_0+\gamma_4)\varphi,$$
$$I_9=\bar{\varphi}(\gamma_0+\gamma_4)\varphi\omega^2,\quad I_{10}=\bar{\varphi}(\gamma_0+\gamma_4)\varphi,\quad I_{11}=\bar{\varphi}(\gamma_0+\gamma_4)\varphi\omega,$$
$$I_{12}=\bar{\varphi}(\gamma_0+\gamma_4)\varphi\,(\omega^2-\alpha\omega),\quad I_{13}=\bar{\varphi}(\gamma_0+\gamma_4)\varphi\,(\omega^3-2(\alpha+\beta)\,\omega^2+\alpha\beta\omega) \tag{13}$$

являются первыми интегралами систем ОДУ 6, 7, ..., 13 *соответственно*.

Доказательство проведем для системы 6, в остальных случаях рассуждения аналогичны. Применяя к этому уравнению операцию комплексного сопряжения и умножая полученный результат на матрицу γ_0 справа, приходим к следующей системе ОДУ на четырехкомпонентную функцию $\bar{\varphi}(\omega)$:

$$i\dot{\bar{\varphi}}(\gamma_0+\gamma_4)+\bar{\varphi}\Big[m(\gamma_0-\gamma_4)+\frac{i}{2\omega}(\gamma_0+\gamma_4)+$$
$$+\frac{i}{2\alpha\omega}\gamma_0\gamma_4\Big]=\lambda(\bar{\varphi}(\gamma_0+\gamma_4)\varphi)^{1/2k}\varphi,$$

откуда $\dot{\bar{\varphi}}(\gamma_0+\gamma_4)\varphi+\bar{\varphi}(\gamma_0+\gamma_4)\dot{\varphi}=-\omega^{-1}\bar{\varphi}(\gamma_0+\gamma_4)\varphi$ или $[\bar{\varphi}(\gamma_0+\gamma_4)\varphi]^{\cdot}=-\omega^{-1}\bar{\varphi}(\gamma_0+\gamma_4)\varphi$. Интегрирование полученного ОДУ дает $\bar{\varphi}(\gamma_0+\gamma_4)\varphi=C\omega^{-1}$, C — const, что и требовалось доказать.

Выражая из соотношений (13) нелинейные функции $\bar{\varphi}(\gamma_0+\gamma_4)\varphi$ и подставляя полученный результат в уравнения 6—13 из (11), приходим к системам линейных ОДУ, общее решение которых представляется в виде

$$\varphi_N(\omega)=\frac{1}{2}[f_N(\omega)(\gamma_0+\gamma_4)+g_N(\omega)(1+\gamma_0\gamma_4)]\chi,\quad N=\overline{6,13}. \tag{14}$$

Здесь $\chi=(\chi^0,\chi^1,\chi^2,\chi^3)^T$, $\chi^\mu\in\mathbb{C}^1$,

$$f_6(\omega)=\frac{1}{2m}(\tilde{\lambda}\omega^{-1/2k}+(2i\alpha\omega)^{-1})\,g_6(\omega),$$
$$g_6(\omega)=\omega^{-1/2}\exp\{(16i\alpha^2m\omega)^{-1}+i\Phi_1(k,\omega)\};$$
$$f_7(\omega)=\frac{1}{2m}(\lambda\omega^{-1/k}+(2i\alpha\omega)^{-1})\,g_7(\omega),$$
$$g_7(\omega)=\omega^{-1}\exp\{(16i\alpha^2m\omega)^{-1}+i\Phi_2(k,\omega)\};$$
$$f_8(\omega)=\frac{1}{2m}\left(\tilde{\lambda}+\frac{i}{2\alpha}\right)g_8(\omega),$$
$$g_8(\omega)=\exp\{-(1+4\alpha^2\tilde{\lambda}^2)(16i\alpha^2m)^{-1}\omega\};$$
$$f_9(\omega)=\frac{1}{2m}\left(\tilde{\lambda}\omega^{-1/k}+\frac{i}{2\alpha}\right)g_9(\omega),$$
$$g_9(\omega)=\omega^{-1}\exp\{-(16i\alpha^2m)^{-1}\omega+i\Phi_2(k,\omega)\};$$
$$f_{10}(\omega)=\frac{\tilde{\lambda}}{2m}\exp\left\{\frac{i\tilde{\lambda}^2}{4m}\omega\right\}g_{10}(\omega),$$
$$g_{10}(\omega)=\exp\left\{\frac{i\tilde{\lambda}^2}{4m}\omega\right\};$$

$$f_{11}(\omega) = \frac{\widetilde{\lambda}}{2m}\omega^{-1/2k} g_{11}(\omega),$$

$$g_{11}(\omega) = \omega^{-1/2}\exp\{i\Phi_1(k, \omega)\}; \tag{15}$$

$$f_{12}(\omega) = \frac{\widetilde{\lambda}}{2m}(\omega^2 - \alpha\omega)^{-1/2k} g_{12}(\omega),$$

$$g_{12}(\omega) = (\omega^2 - \alpha\omega)^{-1/2}\exp\left\{\frac{i\widetilde{\lambda}^2}{4m}\int^{\omega}(z^2 - \alpha z)^{-1/k}\,dz\right\};$$

$$f_{13}(\omega) = \frac{\widetilde{\lambda}}{2m}[\omega(\omega-\alpha)(\omega-\beta)]^{-1/2k} g_{13}(\omega),$$

$$g_{13}(\omega) = [\omega(\omega-\alpha)(\omega-\beta)]^{-1/2k}\exp\left\{\frac{i\widetilde{\lambda}^2}{4m}\int^{\omega}[z(z-\alpha)(z-\beta)]^{-1/k}\,dz\right\}.$$

В (15) $\widetilde{\lambda} = \lambda(\bar{\chi}(\gamma_0 + \gamma_4)\chi)^{1/2k}$,

$$\Phi_n(k, \omega) = \frac{\widetilde{\lambda}^2}{4m}\begin{cases}\dfrac{k}{k-n}\omega^{(k-n)/k}, & k \neq n,\\ \ln\omega, & k = n.\end{cases}$$

Подставляя полученные результаты в соответствующие анзацы для поля $\psi(x)$, имеем следующие классы точных решений нелинейного ДУЧП (12):

$$\psi(t, \vec{x}) = \exp\left\{\frac{x_3}{2\alpha t}(\gamma_1\gamma_2 - 2\alpha\eta_3 - 2i\alpha m x_3)\right\}\varphi_6(t);$$

$$\psi(t, \vec{x}) = \exp\left\{-\frac{im}{t}x_a x_a - \frac{1}{t}x_a\eta_a\right\}\exp\left\{\frac{x_3}{2\alpha t}\gamma_1\gamma_2\right\}\varphi_7(t);$$

$$\psi(t, \vec{x}) = \exp\left\{-\frac{x_3}{2\alpha}\gamma_1\gamma_2\right\}\varphi_8(t);$$

$$\psi(t, \vec{x}) = \exp\left\{-\frac{im}{t}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{t}(x_1\eta_1 + x_2\eta_2)\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{x_3}{2\alpha}\gamma_1\gamma_2\right\}\varphi_9(t); \tag{16}$$

$$\psi(t, \vec{x}) = \varphi_{10}(t);$$

$$\psi(t, \vec{x}) = \exp\left\{-\frac{im}{t}x_1^2 - \frac{x_1}{t}\eta_1\right\}\varphi_{11}(t);$$

$$\psi(t, \vec{x}) = \exp\left\{-\frac{x_2}{t}(imx_2 + \eta_2) + \frac{x_1}{\alpha - t}(imx_1 + \eta_1)\right\}\varphi_{12}(t);$$

$$\psi(t, \vec{x}) = \exp\left\{-\frac{x_3}{t}(imx_3 + \eta_3) + \frac{x_1}{\alpha - t}(imx_1 + \eta_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{x_2}{\beta - t}(imx_2 + \eta_2)\right\}\varphi_{13}(t).$$

Следует отметить, что построенные решения зависят от параметра m (который интерпретируют как массу частицы, описываемой нелинейным уравнением (12)) неаналитическим образом.

Как установлено в [3], система ДУЧП (12) при $k = 3/2$ помимо группы Галилея допускает однопараметрические группы масштабных преобразований

$$t' = e^{2\theta} t, \quad x'_a = e^{\theta} x_a, \quad \psi'(x') = \exp\left\{-2\theta + \frac{\theta}{2}\gamma_0\gamma_4\right\}\psi(x) \tag{17}$$

и проективных преобразований

$$t' = t(1-\theta t)^{-1}, \quad x'_a = x_a(1-\theta t)^{-1},$$

$$\psi'(x') = (1-\theta t)^2 \exp\left\{im\theta(x_a x_a)(\theta t - 1)^{-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2t}\ln(1-\theta t)\left[t\gamma_0\gamma_4 + (\gamma_0+\gamma_4)\gamma_a x_a\right]\right\}\psi(x), \tag{18}$$

где $\theta \in \mathbb{R}^1$ — групповой параметр. Поэтому, используя операцию группового размножения преобразованиями (17), (18) [4, 7], можно получить из (16) более широкие классы точных решений нелинейного спинорного уравнения (12) при $k = 3/2$.

1. *Levi-Leblonde J.-M.* Nonrelativistic particles and wave equations//Comm. Math. Phys.— 1967.— **6**, N 4.— P. 286—311.
2. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Нерелятивистские уравнения движения для частиц с произвольным спином // Физика элементар. частиц и атом. ядра.— 1981.— **12**, вып. 3.— С. 1157—1219.
3. *Фущич В. И., Штелень В. М.* О линейных и нелинейных системах дифференциальных уравнений, инвариантных относительно группы Шредингера // Теорет. и мат. физика.— 1983.— **56**, № 3.— С. 387—394.
4. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики.— Киев : Наук. думка, 1989.— 336 с.
5. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
6. *Фущич В. И.* Симметрия в задачах математической физики // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 6—28.
7. *Fushchich W. I., Zhdanov R. Z.* Symmetry and exact solutions of nonlinear spinor equations// Phys. Repts.— 1989.— **172**, N 4.— P. 123—174.
8. *Sorba P.* The Galilei group and its connected subgroups // J. Math. Phys.— 1976.— **17**, N 6.— P. 941—953.

Получено 11.05.90