УДК 519.21

А. Я. ДОРОГОВЦЕВ, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

Стохастически периодические решения дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами

Приведены критерий существования стохастически периодических решений линейного уравнения в банаховом пространстве при возмущении периодическим процессом, а также достаточное условие существования периодического решения нелинейного уравнения.

Наведено критерій існування стохастично періодичних розв'язків лінійного рівняння в банаховому просторі при збуренні періодичним процесом, а також достатню умову існування періодичного розв'язку нелінійного рівняння.

В настоящей статье приведены условия существования стохастически периодических решений эволюционного уравнения, возмущаемого периодическим процессом, в банаховом пространстве. Результаты статьи представляют развитие и обобщение некоторых утверждений автора, содержащихся в статьях [1, 2]. Там же имеются ссылки на предшествующие работы, а также на прикладные работы, которые приводят к изучению стохастически периодических решений. Стохастически периодическое (далее периодическое) с периодом τ решение и периодический с периодом τ процесс — это случайный процесс на $\mathbf{R}$, все конечномерные распределения которого периодичны с периодом τ по сдвигу времени.

Пусть $(B, \|\cdot\|)$ — комплексное банахово сепарабельное пространство, $\mathcal{L}(B)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов с операторной нормой, обозначаемой также символом $\|\cdot\|$, E — единичный оператор. Пусть $(\Phi, \mathcal{F}, P)$ — полное вероятностное пространство, а $\mathcal{P}$ — класс всех определенных на $(\Phi, \mathcal{F}, P)$ периодических с периодом $\tau > 0$ случайных процессов $\{\xi(t) : t \in \mathbf{R}\}$ в пространстве B, непрерывных на $\mathbf{R}$ по норме, таких, что

$$\int_0^\tau M\|\xi(t)\|\,dt < +\infty.$$

Число τ далее фиксировано.

Под решением рассматриваемых ниже дифференциальных уравнений понимается такой случайный процесс в B, почти все траектории которого непрерывно дифференцируемы на $\mathbf{R}$ по норме и удовлетворяют уравнению. Единственность решения — это единственность с точностью до стохастической эквивалентности.

1. Стационарные решения одного разностного уравнения в банаховом пространстве. Пусть $A \in \mathcal{L}(B)$ — фиксированный оператор. Для оператора $A \in \mathcal{L}(B)$ множество $\sigma(A)$ есть его спектр, а $S := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$.

Лемма. *Для того чтобы для любого стационарного процесса в B $\{y(n) : n \in \mathbf{Z}\}$, $M\|y(n)\| < +\infty$ уравнение*

$$x(n+1) = Ax(n) + y(n),\ n \in \mathbf{Z}, \tag{1}$$

имело единственное стационарное решение

$$\{x(n) : n \in \mathbf{Z}\},\ M\|x(0)\| < +\infty$$

необходимо и достаточно, чтобы $\sigma(A) \cap S = \varnothing$.

Доказательство. Необходимость. Пусть фиксированы произвольные элемент $z \in B$, $z \neq 0$, и число $\lambda_0 \in S$. Пусть θ — равномерно на $[0, 2\pi]$ распределенная случайная величина. Процесс в $\mathbf{C}$ $\{e^{i\theta}\lambda_0^n : n \in \mathbf{Z}\}$ стационарен, поэтому

$$\{-e^{i\theta}\lambda_0^n z : n \in \mathbf{Z}\} \tag{2}$$

— стационарный процесс в B. Пусть $\{x(n): n \in \mathbf{Z}\}$ — единственное стационарное решение уравнения (1) с процессом (2) вместо $\{y(n): n \in \mathbf{Z}\}$. Поскольку для каждого $n \in \mathbf{Z}$

$$e^{i\theta}\lambda_0^n = \langle f_0,\ Ax(n) - x(n+1)\rangle,$$

где $f_0 \in B^*$ — такой функционал, что $\langle f_0, z\rangle = 1$, то процесс в $B \times \mathbf{C}$ $\{(x(n), \lambda_0^n e^{i\theta}) : n \in \mathbf{Z}\}$ стационарен. Функционал f_0 существует в силу теоремы Хана — Банаха. Следовательно, процесс $\{x(n)\lambda_0^{-n}e^{-i\theta} : n \in \mathbf{Z}\}$ также стационарен, причем $M\|x(n)\lambda_0^{-n}e^{-i\theta}\| = M\|x(0)\| < +\infty$. Положим $u := M \times \times (x(n)\lambda_0^{-n}e^{-i\theta}) \in B$. Согласно (1)

$$x(n+1)\lambda_0^{-n}e^{-i\theta} = Ax(n)\lambda_0^{-n}e^{-i\theta} - z,\ n \in \mathbf{Z},$$

переходя к математическим ожиданиям, получаем равенство

$$\lambda_0 u = Au - z. \tag{3}$$

Таким образом, для любого $z \in B$ уравнение (3) имеет решение $u \in B$. Это решение единственно. Действительно, если элемент $v \in B$ $v \neq u$, —

также решение уравнения (3), то процесс $\{x(n)+e^{i\theta}(u-v)\lambda_0^n : n\in\mathbf{Z}\}$ — отличное от процесса $\{x(n): n\in\mathbf{Z}\}$ стационарное решение уравнения (1). Следовательно, оператор $A-\lambda_0 E$ действует взаимно однозначно на все B, а потому имеет (согласно теореме Банаха) определенный на B обратный. Поэтому $\lambda_0 \notin \sigma(A)$.

Достаточность. Предположим, что $\sigma(A)\cap S=\varnothing$. Пусть $\{y(n): n\in\mathbf{Z}\}$ — стационарный процесс в B, причем $M\|y(0)\|<+\infty$. Введем операторы

$$P_-:=-\frac{1}{2\pi i}\oint_S (A-\lambda E)^{-1}d\lambda,\ P_+:=E-P_-.$$

Операторы P_-, P_+ ограничены и являются проекционными в том смысле, что $P_+^2=P_+$, $P_-^2=P_-$, кроме того $P_-A=AP_-$, $P_+A=AP_+$. Эти и другие, используемые далее, свойства операторов P_- и P_+, можно найти, например, в [4].

Для каждого $n\in\mathbf{Z}$ определим случайный элемент

$$x(n):=\sum_{j=0}^{+\infty}(AP_-)^j y(n-1-j)-\sum_{j=-\infty}^{-1}(AP_+)^j y(n-1-j).$$

Ряды в формуле для $x(n)$ сходятся по норме в B с вероятностью 1, поскольку согласно предположениям

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\|(AP_-)^j\|+\sum_{j=-\infty}^{-1}\|(AP_+)^j\|<+\infty.$$

Легко проверить, что процесс $\{x(n): n\in\mathbf{Z}\}$ является стационарным, кроме того $M\|x(0)\|<+\infty$.

Непосредственная подстановка выражения для $x(n+1)$ и $x(n)$ в уравнение (1) показывает, что процесс $\{x(n): n\in\mathbf{Z}\}$ удовлетворяет уравнению (1).

Докажем теперь единственность. Пусть $\{x_j(n): n\in\mathbf{Z}\}$, $M\|x_j(0)\|<+\infty$, $j=1, 2,$— стационарные решения уравнения (1). Тогда для каждого $n\in\mathbf{Z}$ имеем

$$M\|P_-(x_1(n)-x_2(n))\|\leqslant\|(AP_-)^m\|\sup_{k\in Z}M\|P_-(x_1(k)-x_2(k))\|\leqslant$$

$$\leqslant\|P_-\|(M\|x_1(0)\|+M\|x_2(0)\|)\|(AP_-)^m\|;$$

$$M\|P_+(x_1(n)-x_2(n))\|\leqslant\|P_+\|(M\|x_1(0)\|+M\|x_2(0)\|)\|(AP_+)^{-m}\|;$$

$$m\geqslant 1.$$

Из этих неравенств следует, что $x_1(n)=x_2(n)$, $n\in Z$, с веоятностью 1. Лемма доказана.

2. Линейное уравнение. Предположим, что функция $A\in\mathbf{C}(\mathbf{R}, \mathscr{L}(B))$; $A(t+\tau)=A(t)$, $t\in\mathbf{R}$, фиксирована.

Введем решение $U:\mathbf{R}\to\mathscr{L}(B)$ следующей задачи

$$\begin{cases}\dfrac{dU(t)}{dt}=A(t)U(t),\ t\in\mathbf{R};\\ U(0)=E.\end{cases}\tag{4}$$

Оператор $U(t)$ обратим для каждого $t\in\mathbf{R}$ и удовлетворяет для всех $t\in\mathbf{R}$ и $n\in\mathbf{Z}$ соотношению

$$U(t)=U(t-n\tau)U(\tau^n.\tag{5}$$

Для любых значений $t_0<t$ справедлива оценка

$$\|U(t)U(t_0)^{-1}\|\leqslant\exp\Big(\int_{t_0}^{t}\|A(s)\|ds\Big).\tag{6}$$

Существование и свойства функции U хорошо известны; см., например, [3].

Теорема 1. *Для того чтобы для каждого процесса $\xi \in \mathcal{P}$ уравнение*

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t) + \xi(t),\ t \in \mathbf{R}, \tag{7}$$

имело единственное периодическое с периодом τ решение $\{x(t);\ t \in \mathbf{R}\}$ в B такое, что $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant \tau} M\,\|x(t)\| < +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma(U(\tau)) \cap S = \varnothing. \tag{8}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть для процесса $\xi \in \mathcal{P}$ процесс $\{x(t) : t \in \mathbf{R}\}$ — периодическое с периодом τ решение уравнения (7). Легко проверить, что процессы в

$$\{x(n\tau) : n \in \mathbf{Z}\},$$

$$\left\{\xi(n) := \int\limits_0^\tau U(\tau)\,U(s)^{-1}\xi(n\tau + s)\,ds : n \in \mathbf{Z}\right\} \tag{9}$$

является стационарными, причем

$$M\,\|\xi(0)\| \leqslant \exp\Bigl(\int\limits_0^\tau \|A(s)\|\,ds\Bigr)\int\limits_0^\tau M\,\|\xi(s)\|\,ds.$$

Поскольку для решения $\{x(t)\colon t \in \mathbf{R}\}$ уравнения (7) с вероятностью 1 справедливо представление

$$x(t) = U(t)\,U(t_0)^{-1}x(t_0) + \int\limits_{t_0}^t U(t)\,U(s)^{-1}\xi(s)\,ds$$

для $t_0 < t$ [3], то стационарный процесс $\{x(n\tau) : n \in \mathbf{Z}\}$ удовлетворяет уравнению

$$x((n+1)\tau) = U(\tau)\,x(n\tau) + \xi(n),\ \ n \in \mathbf{Z}. \tag{10}$$

Заметим теперь, что для любого стационарного процесса $\{\tilde\xi(n) : n \in \mathbf{Z}\}$ с $M\,\|\tilde\xi(0)\| < +\infty$ определяемый на $\mathbf{R}$ процесс

$$\tilde\xi(n\tau + s) := 6\tau^{-3}s(\tau - s)\,U(s)\,U(\tau)^{-1}\tilde\xi(n),$$

где $n \in \mathbf{Z}$ и $s \in [0, \tau]$, является периодическим с периодом τ и принадлежит $\mathcal{P}$. Кроме того, для $n \in \mathbf{Z}$

$$\int\limits_0^\tau U(\tau)\,U(s)^{-1}\tilde\xi(n\tau + s)\,ds = \int\limits_0^\tau U(\tau)\,U(s)^{-1}U(s)\,U(\tau)^{-1}6\tau^{-3}s(\tau - s)\,\tilde\xi(n)\,ds = \tilde\xi(n).$$

Таким образом, для любого стационарного процесса $\{\xi(n)\colon n \in \mathbf{Z}\}$, $M\|\xi(0)\| < +\infty$ уравнение (10) имеет единственное стационарное решение $\{x(n\tau)\colon n \in \mathbf{Z}\}$, $M\|x(0)\| < +\infty$. Согласно лемме условие (8) выполнено.

Достаточность. Пусть процесс $\{\xi(t)\colon t \in \mathbf{R}\} \in \mathcal{P}$ и $\{\xi(n)\colon n \in \mathbf{Z}\}$ — стационарный процесс, определяемый формулой (9), при этом $M\|\xi(0)\| < +\infty$. В силу леммы при условии 8 существует единственное стационарное решение $\{\tilde x(n\tau)\colon n \in \mathbf{Z}\}$, $M\|\tilde x(0)\| < +\infty$ уравнения (10). Определим теперь процесс $\{x(t)\colon t \in \mathbf{R}\}$ следующим образом:

$$x(n\tau + s) := U(s)\,\tilde x(n\tau) + U(s)\int\limits_0^s U(t)^{-1}\xi(n\tau + t)\,dt,\ n \in \mathbf{Z},\ s \in [0, \tau].$$

Процесс $\{x(t): t \in \mathbf{R}\}$ периодичен с периодом τ. Используя свойства функции U, для любых $n \in \mathbf{Z}$ и $s \in (0, \tau)$ имеем с вероятностью 1

$$\frac{d}{ds} x(n\tau + s) = \frac{dU(s)}{ds} \tilde{x}(n\tau) + \frac{dU(s)}{ds} \int_0^s U(t)^{-1} \xi(n\tau + t)\, dt +$$

$$+ U(s) U(s)^{-1} \xi(n\tau + s) = A(s) U(s) \tilde{x}(n\tau) + A(s) U(s) \int_0^s U(t)^{-1} \xi(n\tau + t)\, dt +$$

$$+ \xi(n\tau + s) = A(s) x(n\tau + s) + \xi(n\tau + s).$$

Аналогично проверяется, что с вероятностью 1

$$D_+ x(n\tau) = A(0) x(n\tau) + \xi(n\tau),$$

$$D_- x(n\tau) = A(\tau) x(n\tau) + \xi(n\tau),$$

где $D_+ f(s)\,(D_- f(s))$ — правая (левая) производная (по норме) функции f в точке s. Таким образом, процесс $\{x(t): t \in \mathbf{R}\}$ удовлетворяет уравнению (7), при этом $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant \tau} M \| x(t) \| < +\infty$.

Докажем теперь единственность. Пусть $\{x_i(t): t \in \mathbf{R}\}$, $i = 1, 2,$ — периодические с периодом τ решения уравнения (7), причем

$$a := \sup_{0 \leqslant t \leqslant \tau} (M \| x_1(t) \| + M \| x_2(t) \|) < +\infty.$$

Тогда для $z(t) := x_1(t) - x_2(t)$, $t \in \mathbf{R}$, имеем с вероятностью 1

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(t) z(t), \ t \in \mathbf{R},$$

поэтому $z(t) = U(t) U(t_0)^{-1} z(t_0)$, $t_0 < t$, откуда $U(t)^{-1} z(t) = U(\tau)^{-n} z(n\tau)$, $t \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z}$. Пусть теперь P_- и P_+ — спектральные проекторы, построенные по оператору $U(\tau)$ аналогично доказательству леммы. Тогда с вероятностью 1

$$P_- U(t)^{-1} z(t) = (U(\tau) P_-)^{-n} P_- z(n\tau),$$

$$P_+ U(t)^{-1} z(t) = (U(\tau) P_+)^{-n} P_+ z(n\tau),$$

откуда

$$\begin{aligned} M \| P_- U(t)^{-1} z(t) \| &\leqslant \| (U(\tau) P_-)^{-n} \| \cdot \| P_- \| a, \\ M \| P_+ U(t)^{-1} z(t) \| &\leqslant \| (U(\tau) P_+)^{-n} \| \cdot \| P_+ \| a. \end{aligned} \tag{11}$$

Устремим теперь $n \to -\infty$ в первом равенстве формулы (11) и $n \to +\infty$ во втором. Получим, что $U(t)^{-1} z(t) = \overline{0}$ с вероятностью 1 при каждом $t \in \mathbf{R}$. Здесь $\overline{0}$ — нулевой элемент в B. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Предположим, что значения функции A удовлетворяют дополнительному условию $A(t) A(s) = A(s) A(t)$, $\{s, t\} \subset [0, \tau]$. В частности, это условие выполнено, если $A(t) \equiv A \in \mathcal{L}(B)$, $t \in [0, \tau]$. Тогда

$$U(\tau) = \exp\left(\int_0^\tau A(s)\, ds \right)$$

и согласно теореме об отображении спектра условие $\sigma(U(\tau)) \cap S = \varnothing$ равносильно тому, чтобы спектр оператора $\int_0^\tau A(s)\, ds$ не пересекался с мнимой осью.

В ряде случаев теорема 1 позволяет получать условия существования периодических решений уравнений старших порядков. Приведем пример такого результата.

Теорема 2. Пусть $T \in \mathcal{L}(B)$. Для того чтобы для любого процесса $\xi \in \mathcal{P}$ уравнение

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = T x(t) + \xi(t), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{12}$$

имело единственное периодическое с периодом τ решение $\{x(t)\colon t\in\mathrm{R}\}$ такое, что

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} M\|x(t)\| + \sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} M\|x'(t)\| < +\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\sigma(T)\cap(-\infty, 0] = \varnothing$.

Замечание 2. Условия существования ограниченных решений однородного уравнения (12) описаны в [5]. При условии теоремы 2 однородное уравнение (12) не имеет нетривиальных периодических решений.

3. Нелинейное уравнение. Пусть A и U — операторные функции из п. 2, P_- и P_+ — спектральные проекторы, построенные по оператору $U(\tau)$ при условии $\sigma(U(\tau))\cap S = \varnothing$. Пусть $f\in C(\mathrm{R}\times B\times B, B)$ — функция, удовлетворяющая с некоторыми неотрицательными c_1 и c_2 условиям

$$f(t+\tau, u_1, v) = f(t, u_1, v),$$

$$\|f(t, u_1, v) - f(t, u_2, v)\| \leqslant c_1\|u_1 - u_2\|,$$

$$\|f(t, \overline{0}, v)\| \leqslant c_2(1 + \|v\|)$$

для всех $t\in\mathrm{R}$, $\{u_1, u_2, v\}\subset B$.

Теорема 3. *Предположим, что* $\sigma(U(\tau))\cap S = \varnothing$ *и выполнено неравенство* $c_1 b\tau(1 + Lb) < 1$, *где*

$$b := \exp\left(\int_0^\tau \|A(s)\|\, ds\right),$$

$$L := \sum_{j=0}^{+\infty}\|U(\tau)P_-\|^j + \sum_{j=-\infty}^{-1}\|U(\tau)P_+\|^j.$$

Тогда для каждого процесса $\xi\in\mathcal{P}$ *уравнение*

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t, x(t), \xi(t)), \quad t\in\mathrm{R},$$

имеет периодическое с периодом τ *решение* $\{x(t)\colon t\in\mathrm{R}\}$ *такое, что*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} M\|x(t)\| < +\infty.$$

Доказательство. Пусть $x_0(t) := \overline{0}$, $t\in\mathrm{R}$. Определим стационарный процесс $\{\tilde{x}(n)\colon n\in\mathbf{Z}\}$ в B как единственное решение уравнения

$$\tilde{x}_1(n+1) = U(\tau)\tilde{x}_1(n) + \xi_1(n), \quad n\in\mathbf{Z}, \tag{13}$$

где

$$\xi_1(n) := \int_0^\tau U(\tau)U(s)^{-1} f(s, \overline{0}, \xi(n\tau + s))\, ds, \quad n\in\mathbf{Z}.$$

Процесс $\{\xi_1(n)\colon n\in\mathbf{Z}\}$ стационарен и

$$M\|\xi_1(0)\| \leqslant bc_2\left(\tau + \int_0^\tau M\|\xi(s)\|\, ds\right),$$

а единственное решение уравнения (13) существует в силу леммы, при этом $M\|\tilde{x}_1(0)\| < +\infty$. Положив для $n\in\mathbf{Z}$ и $s\in[0, \tau]$

$$x_1(n\tau + s) := U(s)\tilde{x}_1(n) + U(s)\int_0^s U(t)^{-1} f(t, \overline{0}, \xi(n\tau + t))\, dt,$$

получим аналогично доказательству теоремы 2 периодический с периодом τ процесс $\{x_1(t)\colon t\in\mathrm{R}\}$ в B, который удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = A(t)x_1(t) + f(t, \overline{0}, \xi(t)), \quad t\in\mathrm{R},$$

условию

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} M\,\|x_1(t)\| < +\infty.$$

Для $m\geqslant 2$ процесс $\{x_m(t)\colon t\in\mathbf{R}\}$ по уже построенному периодическому с периодом τ процессу $\{x_{m-1}(t)\colon t\in\mathbf{R}\}$, удовлетворяющему условию

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} M\,\|x_{m-1}(t)\| < +\infty,$$

определяется следующим образом. По стационарному процессу

$$\xi_m(n) := \int_0^\tau U(\tau)\,U(s)^{-1} f(s, x_{m-1}(n\tau+s), \xi(n\tau+s))\,ds, \quad n\in\mathbf{Z}, \tag{14}$$

который удовлетворяет условию $M\|\xi_m(0)\| < +\infty$, согласно лемме определим процесс $\{\tilde{x}_m(n) : n\in\mathbf{Z}\}$ как единственное стационарное решение уравнения

$$\tilde{x}_m(n+1) = U(\tau)\,\tilde{x}_m(n) + \xi_m(n), \quad n\in\mathbf{Z},$$

при этом $M\,\|\tilde{x}_m(0)\| < +\infty$. Положив теперь для $n\in\mathbf{Z}$ и $s\in[0,\tau]$

$$x_m(n\tau+s) := U(s)\,\tilde{x}_m(n) + U(s)\int_0^s U(t)^{-1} f(t, x_{m-1}(n\tau+t), \xi(n\tau+t))\,dt,$$

получим периодический с периодом τ процесс $\{x_m(t)\colon t\in\mathbf{R}\}$ в B, который удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx_m(t)}{dt} = A(t)\,x_m(t) + f(t, x_{m-1}(t), \xi(t)), \quad t\in\mathbf{R}, \tag{15}$$

и условию

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} M\,\|x_m(t)\| < +\infty.$$

Отметим также, что согласно доказательству леммы

$$\tilde{x}_m(n) = \sum_{j=0}^{+\infty} (U(\tau)P_-)^j\,\xi_m(n-1-j) - \sum_{j=-\infty}^{-1} (U(\tau)P_+)^j\,\xi_m(n-1-j),$$
$$n\in\mathbf{Z};\quad m\geqslant 1, \tag{16}$$

а также то, что процессы $\{x_m(t)\colon t\in\mathbf{R}\}$, $m\geqslant 1$, периодически связаны.

Пусть теперь число $n\in\mathbf{Z}$ фиксировано. Из формул (14) и (16), а также условий на функцию f следует

$$M\,\|\tilde{x}_{m+1}(n) - \tilde{x}_m(n)\| \leqslant Lbc_1\tau \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} M\,\|x_m(s) - x_{m-1}(s)\|, \quad m\geqslant 1.$$

Поэтому для любого $m\geqslant 1$ справедливо следующее неравенство:

$$M\,(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} \|x_{m+1}(s) - x_m(s)\|) \leqslant (\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} \|U(s)\|\,Lbc_1\tau + bc_1\tau)\,\times$$
$$\times \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} M\,\|x_m(s) - x_{m-1}(s)\|.$$

Таким образом,

$$M\,(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} \|x_{m+1}(s) - x_m(s)\|) \leqslant (bc_1\tau(1+Lb))^m \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} M\,\|x_1(s)\|, \quad m\geqslant 1.$$

Следовательно, с вероятностью 1 равномерно на каждом конечном отрезке процесс $\{x_m(t)\colon t\in\mathbf{R}\}$ сходится к некоторому процессу $\{x(t)\colon t\in\mathbf{R}\}$, который периодичен с периодом τ и имеет с вероятностью 1 непрерывные траектории. Из (15) следует также сходимость производных $\{x_m'(t)\colon t\in\mathbf{R}\}$ равномерно на каждом конечном отрезке с вероятностью 1. Поэтому процесс $\{x(t)\colon t\in\mathbf{R}\}$ непрерывно дифференцируем и удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t) + f(t, x(t), \xi(t)), \quad t\in\mathbf{R}. \tag{17}$$

Далее, из формулы (16) имеем для $n \in \mathbf{Z}$:

$$M \| \widetilde{x}_m (n) \| \leqslant LM \| \xi_m (0) \| \leqslant Lbc_1 \tau \sup_{0 \leqslant s \leqslant \tau} M \| x_{m-1} (s) \| +$$

$$+ Lbc_2 \left(1 + \int_0^\tau M \| \xi (s) \| ds \right), \quad m \geqslant 2,$$

а следовательно,

$$M \| x_m (t) \| \leqslant bM \| x_m (0) \| + bc_2 \left(1 + \int_0^\tau M \| \xi (s) \| ds \right) +$$

$$+ bc_1 \tau \sup_{0 \leqslant s \leqslant \tau} M \| x_{m-1} (s) \| \leqslant bc_1 \tau (1 + Lb) \sup_{0 \leqslant s \leqslant \tau} M \| x_{m-1} (s) \| +$$

$$+ bc_2 (1 + Lb) \left(1 + \int_0^\tau M \| \xi (s) \| ds \right), \quad m \geqslant 2.$$

Поэтому

$$d := \sup_{m \geqslant 1} \sup_{0 \leqslant s \leqslant \tau} M \| x_m (s) \| < + \infty,$$

откуда для каждого $t \in \mathbf{R}$ имеем

$$M \| x (t) \| \leqslant \varliminf_{m \to \infty} M \| x_m (t) \| \leqslant d.$$

Теорема 3 доказана.

1. *Дороговцев А. Я.* Стационарные и периодические решения одного стохастического разностного уравнения в банаховом пространстве // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1990.— Вып. 42.— С. 35—42.
2. *Дороговцев А. Я.* Периодические решения эволюционных дифференциальных уравнений, возмущаемых случайными процессами // Укр. мат. журн.— 1989.— 41, № 12.— С. 1642—1648.
3. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.— М. : Мир, 1970.— 456 с.
4. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 896 с.
5. *Крейн М. Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1954.— 186 с.

Получено 27.04.90