УДК 517.53

А. П. Голуб

Об одной системе биортогональных полиномов и ее приложениях

В статье [1] были построены обобщенные моментные представления для базисных гипергеометрических рядов. При этом возникла задача биортогонализации последовательностей функций $\{\alpha_i(t) = t^{\rho\lambda_{i+1}(q)}\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{\beta_j(t) = t^{\nu+\tilde{\lambda}_j(q)}\}_{j=0}^{\infty}$, где $\lambda_{i+1}(q) = \dfrac{q^{i+1}-1}{q-1}$, $i = \overline{0, \infty}$; $\tilde{\lambda}_j(q) = \dfrac{q^j - 1}{(q-1)\,q^j}$, $j =$

$=\overline{0, \infty}$, $\gamma=\dfrac{q-\rho}{1-q}>-1$, ρ, $q>0$, $q\neq 1$, т. е. отыскания обобщенных полиномов

$$A_M(t)=\sum_{i=0}^{M} c_i^{(M)}\alpha_i(t), \quad c_M^{(M)}\neq 0, \quad M=\overline{0, \infty}, \tag{1}$$

и

$$B_N(t)=\sum_{j=0}^{N} d_j^{(N)}\beta_j(t), \quad d_N^{(N)}\neq 0, \quad N=\overline{0, \infty}, \tag{1'}$$

обладающих свойствами

$$\int_0^1 A_M(t)\,B_N(t)\,dt=0, \quad M\neq N. \tag{2}$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Полиномы* $A_M(t)$, $M=\overline{0, \infty}$, *и* $B_N(t)$, $N=\overline{0, \infty}$, *определенные по формулам* (1), (1′) *и* (2), *можно представить в виде*

$$A_M(t)=\sum_{m=0}^{M}(-1)^m q^{\frac{m(m-1)}{2}}\prod_{r=1}^{m}\frac{q^{M-r+1}-1}{q^r-1}\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{M}\frac{\rho q^{2M-m-l+1}-1}{q-1}\,t^{\rho\lambda_{M-m+1}}, \quad M=\overline{0, \infty},$$

$$B_N(t)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{r=1}^{n}\frac{q^{N-r+1}-1}{q^r-1}\prod_{k=1}^{2N-n}\frac{\rho q^k-1}{q-1}\,b_{N-n}(t),$$

$$b_j(t)=\frac{(q-1)^j}{\prod_{r=1}^{j}(q^r-1)}\sum_{m=0}^{j}(-1)^m q^{\frac{m(m-1)}{2}}\prod_{r=1}^{m}\frac{q^{j-r+1}-1}{q^r-1}\,\beta_m(t), \quad j=\overline{0, N}.$$

Доказательство. Очевидно, если определить оператор $A: C[0,1]\to \to C[0, 1]$ по формуле

$$(A\varphi)(t)=t^{\rho}\int_0^1\varphi(t^q u)\,u^{\gamma}du$$

и полином $A_M(t)$ по формуле (3), то будут иметь место соотношения $(A^k A_M)(1)=0$, $k=\overline{1, M}$; $M=\overline{1, \infty}$. Поэтому, если учесть равенство

$$\int_0^1 (A\varphi)(t)\,\psi(t)\,dt=\int_0^1\varphi(t)\,(B\psi)(t)\,dt, \tag{4}$$

где оператор $B: L_1[0, 1]\to L_1[0, 1)$ имеет вид

$$(B\psi)(t)=\frac{1}{q}\,t^{\gamma}\int_t^1\psi(v^{1/q})\,v^{\frac{\rho+1-\gamma q-2q}{q}}\,dv, \tag{5}$$

а также соотношения

$$b_j(t)=\frac{(q-1)^j}{\prod_{r=1}^{j}(q^r-1)}\sum_{m=0}^{j}(-1)^m q^{\frac{m(m-1)}{2}}\times$$

$$\times\prod_{r=1}^{m}\frac{q^{j-r+1}-1}{q^r-1}\,\beta_m(t)=(B^j b_0)(t), \quad j=\overline{0, \infty}, \tag{6}$$

где $b_0(t) = \beta_0(t) = t^\gamma$ (по поводу (4) — (6) см. [1]), получим

$$\int_0^1 A_M(t)\, b_j(t)\, dt = \int_0^1 A_M(t)\,(B^j b_0)(t)\, dt = \int_0^1 (A^j A_M)(t)\, b_0(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 (A^j A_M)(t)\, t^\gamma dt = [A(A^j A_M)](1) = (A^{j+1} A_M)(1) = 0, \quad j = \overline{0, M-1}.$$

Таким образом, полиномы $A_M(t)$ ортогональны функциям $b_j(t)$, $j = \overline{0, M-1}$, а следовательно, и функциям $\beta_j(t)$, $j = \overline{0, M-1}$, являющимся их линейными комбинациями:

$$\int_0^1 A_M(t)\, \beta_j(t)\, dt = 0, \quad j = \overline{0, M-1}. \tag{7}$$

После этого нетрудно установить, что

$$\int_0^1 \alpha_i(t)\, B_N(t)\, dt = 0, \quad i = \overline{0, N-1}. \tag{8}$$

Объединяя (7) и (8), получаем (2). Теорема доказана.

Этот результат можно применить к аппроксимации Паде базисных гипергеометрических рядов. Заметим, что разложения этих рядов в цепные дроби рассмотрены в [2, 3].

Теорема 2. *Для функции* [4, с. 195—196]

$$f(z) = \frac{{}_1\Phi_1\begin{bmatrix} q;\ (1-q)z \\ \rho \end{bmatrix} - 1 - \dfrac{z(1-q)}{1-\rho}}{z^2}\left(\frac{1-\rho}{1-q}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\gamma+1+\rho)[\gamma+1+\rho(1+q)]\cdot\ldots\cdot[\gamma+1+\rho(1+q+\ldots+q^n)]}, \tag{9}$$

если только $\gamma := \dfrac{q-\rho}{1-q} > -1$; $\rho,\ q > 0$; $q \neq 1$, *полиномы Паде порядка* $[N-1/N]$, $N = \overline{1, \infty}$, *могут быть представлены по формулам*

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)} =$$

$$= \frac{\displaystyle\sum_{m=0}^{M} (-1)^m q^{\frac{m(m-1)}{2}} \prod_{r=1}^{m} \frac{q^{M-r+1}-1}{q^r-1} \prod_{k=1}^{2M-m} \frac{\rho q^k - 1}{q-1}\, z^m T_{M-m-1}(f; z)}{\displaystyle\sum_{m=0}^{M} (-1)^m q^{\frac{m(m-1)}{2}} \prod_{r=1}^{m} \frac{q^{M-r+1}-1}{q^r-1} \prod_{k=1}^{2M-m} \frac{\rho q^k - 1}{q-1}\, z^m},$$

где $T_j(f; z)$ — *частные суммы порядка* j *ряда* (9). *Погрешность аппроксимации при этом представима в виде*

$$f(z) - [N-1/N]_f(z) = \frac{z^N}{Q_N(z)} \int_0^1 A_N(t) \sum_{j=0}^{\infty} z^j b_j(t) dt.$$

Теорема 3. *Для функции* [4, с. 195 — 196]

$$f(z) = \frac{(1-q)\alpha}{(1-\alpha)z\rho}\left[{}_2\Phi_1\begin{pmatrix} q;\ \alpha;\ \dfrac{\xi z}{\alpha q} \\ \xi \end{pmatrix} - 1\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho+\gamma+\sigma+1)[\rho(q+1)+\gamma+\sigma+1]\ldots[\rho(q^{n-1}+\ldots+1)+\gamma+\sigma+1]z^n}{(\rho+\gamma+1)[\rho(q+1)+\gamma+1]\ldots[\rho(q^n+\ldots+1)+\gamma+1]} \tag{10}$$

$\left(\text{здесь } \alpha := \dfrac{\rho}{\varkappa - \sigma(q-1)};\ \xi := \dfrac{\rho q}{\varkappa};\ \varkappa := \rho - (q-1)(\gamma+1)\right)$, если только $\gamma := \dfrac{q-\rho}{1-q} > -1$; $\rho,\ q > 0$; $q \neq 1$; $\sigma \neq \dfrac{\varkappa(q^r-1)}{q^r(q-1)}$, $r = \overline{1, \infty}$, полиномы Паде порядка $[N-1/N]$, $N = \overline{1, \infty}$ могут быть представлены по формулам

$$[N-1/N]_f = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)} =$$

$$= \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{r=1}^{n} \frac{q^{N-r+1}-1}{q^r-1} \frac{\prod_{k=1}^{2N-n} (\rho q^k - 1)}{\prod_{l=1}^{N-n} (\rho q^l - 1 + \sigma(q-1))} z^n T_{N-1-n}(f; z)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{r=1}^{n} \frac{q^{N-r+1}-1}{q^r-1} \frac{\prod_{k=1}^{2N-n} (\rho q^k - 1)}{\prod_{l=1}^{N-n} (\rho q^l - 1 + \sigma(q-1))} z^n},$$

где $T_j(f; z)$ — частные суммы порядка j ряда (10). *Погрешность аппроксимации при этом представима в виде*

$$f(z) - [N-1/N]_f(z) = \frac{z^n}{Q_N(z)} \int_0^1 A_N(t) \sum_{j=0}^{\infty} z^j \tilde{b}_j(t)\, dt,$$

где

$$\tilde{b}_j(t) = \sum_{m=0}^{j} t^{\gamma+\tilde{\lambda}_m(q)} \prod_{l=1}^{j-m} \frac{\sigma + \varkappa \dfrac{q^{l-1}-1}{q-1}}{\varkappa\left(\dfrac{q^l-1}{q-1}\right)} \times$$

$$\times \prod_{r=1}^{m} \left(\frac{1}{q} - \frac{\sigma(q-1)q^{r-1}}{\varkappa(q^r-1)}\right), \quad j = \overline{0, \infty}.$$

Доказательства теорем 2 и 3 легко следуют из теоремы 1 настоящей статьи и теорем 2 и 4 статьи [1].

З а м е ч а н и е. Формулы для диагональных полиномов Паде q-аналога экспоненты, являющегося частным случаем (9), получены в [5]. Частный случай функций (10) рассмотрен в [6].

1. *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления базисных гипергеометрических рядов // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 6.— С. 803—808.
2. *Frank E.* A new class of continued fraction expansions for the ratios of Heine functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1958.— **88**.— P. 288—300.
3. *Маурер Г. В.* О разложении в цепные дроби некоторых предельных случаев функции Гейне // Волж. мат. сб.— 1966.— Вып. 5.— С. 211—221.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра.— М. : Наука, 1965.— 296 с.
5. *Walliser R.* Rationale Approximation des q-Analogons der Exponentialfunction und Irrationalitätsaussagen fur diese Function // Arch. Math.— 1985.— **44**, N 1.— S. 59—64.

6. *Корнилов В. Е.* Приложение цепных дробей к вычислению базисных гипергеометрических рядов // Цепные дроби и их применения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976.— С. 67—68.

Ин-т пробл. моделирования в энергетике
АН УССР, Киев

Получено 30.10.86