УДК 517.956

С. А. АЛДАШЕВ, д-р физ.-мат. наук (Алмаатин. ин-т инженеров ж.-д. транспорта)

Задача Трикоми для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе

Для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе

$$\Delta_x u + \operatorname{sgn} t \cdot u_{tt} = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_m), \quad m \geqslant 2,$$

доказана однозначная разрешимость задачи Трикоми.

Для багатовимірного рівняння Лаврентьєва — Біцадзе

$$\Delta_x u + \operatorname{sgn} t \cdot u_{tt} = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_m), \quad m \geqslant 2,$$

доведена однозначна розв'язність задачі Трікомі.

Пусть Ω — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \dots$ $\dots, x_m, t)$, ограниченная в полупространстве $t > 0$ тороидальной поверхностью $T_\varepsilon : \rho^2 + t^2 + \varepsilon = (1 + \varepsilon)\rho$, а при $t < 0$ — конусами $\rho = \varepsilon - t$, $\rho = 1 + t$, где $\rho = |x|$ — длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$, $0 \geqslant t \geqslant (\varepsilon - 1)/2$, $0 < \varepsilon < 1$, $m \geqslant 2$. Обозначим через Ω_ε^+ и Ω_ε^- части области Ω_ε, лежащие соответственно в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$, через S_ε — общую часть границ областей $\Omega_\varepsilon^+ > 0$ и $\Omega_\varepsilon^- < 0$, представляющих множество $\{t = 0, \varepsilon < \rho < 1\}$ точек из E_m. Часть конусов $\rho = \varepsilon - t$, $\rho = 1 + t$, ограничивающих область Ω_ε^-, обозначим через S_ε и S_1 соответственно.

В области Ω_ε рассмотрим многомерное уравнение Лаврентьева — Бицадзе

$$\Delta_x u + \operatorname{sgn} t \cdot u_{tt} = 0, \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m$.

В качестве задачи Трикоми для уравнения (1) можно рассмотреть следующую задачу.

Задача T. Найти решение уравнения (1) в области Ω_ε при $t \neq 0$ из класса $L(\Omega_\varepsilon) = C(\bar{\Omega}_\varepsilon) \cap C^2(\Omega_\varepsilon^+ \cup \Omega_\varepsilon^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{T_\varepsilon} = \varphi(x), \quad u|_{S_\varepsilon} = \sigma_\varepsilon(x) \tag{2}$$

или

$$u|_{T_\varepsilon} = \varphi(x), \quad u|_{S_1} = \sigma_1(x). \tag{3}$$

Отметим, что многомерным аналогам задач Трикоми посвящены работы [1—4], однако в области Ω_ε $(\varepsilon > 0)$ задача T изучается впервые

Для дальнейшего изложения удобно перейти от декартовых координат $x_1, \dots, x_m, t$ к сферическим $\rho, \theta_1, \dots, \theta_m, t$, $\rho \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi$, $i = 2, 3, \dots, m - 1$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $k_n(m-2)!\,n! = (n + m - 3)!\,(2n + m - 2)$. Если $m = 2$, то $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система функций $\{\sin n\theta, \cos n\theta\}$, $W_2^l(S)$ — пространства Соболева, а $\widetilde{S}^\varepsilon = \{(\rho, \theta) \in S^\varepsilon,\ \varepsilon < \rho < (1 + \varepsilon)/2\}$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$.

Через $f_n^k(\rho)$ обозначим коэффициенты разложения ряда по $Y_{n,m}^k(\theta)$ функций $f(\rho, \theta)$.

Введем множество функций

$$B_0^l(S^\varepsilon) = \Big\{ f(\rho, \theta) : f \in W_2^l(S^\varepsilon), \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \| f_n^k(\rho) \|^2_{C^3([\varepsilon, 1])} \exp 2(n^2 + n(m-4)) < \infty, \ l > m - 1 \Big\},$$

$$B_1^l(\tilde{S}^\varepsilon) = \Big\{f(\rho,\theta): f \in W_2^l(\tilde{S}^\varepsilon), \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} (\| f_n^k(\rho)\|^2_{C^2((\varepsilon,(1+\varepsilon)/2))} +$$

$$+ \| f_n^k(\rho)\|^2_{C([\varepsilon,(1+\varepsilon)/2])}) \exp 2(n^2 + n(m-2)) < \infty,\ l > m-1\Big\},$$

$$L_\alpha(\Omega_\varepsilon) = \{u(x,t): u(x,0) = (|x| - \sqrt{\varepsilon})^\alpha \bar{u}(x,0),\quad \alpha > m/2 + 1, \bar{u} \in (\Omega_\varepsilon)\}.$$

Теорема. *Если* $\varphi(\rho,\theta) \in B_0^l(\hat{S}^\varepsilon)$, $\sigma_\varepsilon(\rho,\theta) \in B_1^l(\hat{S}^\varepsilon)$, $\sigma_1(\rho,\theta) \in B_1^l \times (S^\varepsilon | \hat{S}^\varepsilon)$, *то задача T в классе функций $L_\alpha(\Omega_\varepsilon)$ имеет единственное решение.*

Доказательство. Уравнение (1) в области Ω_ε^+ в сферических координатах имеет вид

$$u_{\rho\rho} + \frac{m-1}{\rho} u_\rho - \frac{1}{\rho^2}\delta u + u_{tt} = 0, \tag{4}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),$$

$$g_1 = 1,\quad g_j = (\sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{j-1})^2,\quad j > 1.$$

Введем m-мерные тороидальные координаты $\eta, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, \varphi$, $0 \leqslant \eta < \infty$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, причем

$$\rho = \frac{c\cdot \operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\varphi},\quad \theta_i = \theta_i,\quad i = \overline{1,\ m-1},\quad t = \frac{c\cdot\sin\varphi}{\operatorname{ch}\eta - \cos\varphi},$$

$$\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{(\rho+c)^2 + t^2}{(\rho-c)^2+t^2},\quad \theta_i = \theta_i,\quad i = \overline{1, m-1},$$

$$\varphi = \frac{i}{2}\ln\frac{\rho^2 + (t-ic)^2}{\rho^2+(t+ic)^2},$$

c — масштабный множитель.

Отметим, что тороидальные (кольцевые) координаты, насколько нам известно, ранее вводились только при $m = 2$ (см., например, [5, 6]).

Теперь нетрудно показать, что уравнение (4) в указанных (тороидальных) координатах запишется в виде

$$\left(\frac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\varphi}\right)^{2-m}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\frac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta-\cos\varphi}\right)^{m-1}\frac{\partial v}{\partial\eta}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(\frac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta-\cos\varphi}\right)^{m-1}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right]\right\} - \frac{\delta v}{\operatorname{sh}\eta(\operatorname{ch}\eta - \cos\varphi)} = 0, \tag{5}$$

$$u\left[\frac{\sqrt{\varepsilon}\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta-\cos\varphi}, \theta, \frac{\sqrt{\varepsilon}\sin\varphi}{\operatorname{ch}\eta - \cos\varphi}\right] = v(\eta,\theta,\varphi), \tag{6}$$

а замкнутая область $\bar{\Omega}_\varepsilon^+$ переходит в область

$$\bar{G}_{\eta_0} = \{(\eta,\varphi,\theta): \eta_0 \leqslant \eta \leqslant \infty, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \eta_0 = \ln((1+\sqrt{\varepsilon})/(1-\sqrt{\varepsilon}))\}.$$

Далее удобно ввести вместо $v(\eta,\theta,\varphi)$ новую функцию $\omega(\eta,\theta,\varphi)$ с помощью соотношения $v = \omega(\operatorname{ch}\eta - \cos\varphi)^{(m-1)/2}$; при этом (5) приводится к уравнению

$$\omega_{\eta\eta} + \omega_{\varphi\varphi} + (m-1)\omega_\eta \operatorname{cth}\eta + \frac{(m-1)^2}{4}\omega - \frac{\delta\omega}{\operatorname{sh}^2\eta} = 0. \tag{7}$$

Так как искомое решение задачи T принадлежит в области Ω_ε^+ классу $C(\bar{\Omega}_\varepsilon^+)\cap C^2(\Omega_\varepsilon^+)$, то $\omega(\eta,\theta,\varphi)$ можно искать в виде ряда

$$\omega(\eta,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\omega_n^k(\eta,\varphi)\,Y_{n,m}^k(\theta), \tag{8}$$

где $\omega_n^k(\eta,\varphi)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots,$ — функции, подлежащие определению. Подставляя (8) в (7), легко убедиться в том, что

$$\omega_{n\eta\eta}^k+\omega_{n\varphi\varphi}^k+(m-1)\,\omega_{n\eta}^k\operatorname{cth}\eta+\left[\frac{(m-1)^2}{4}-\frac{\lambda^2}{\operatorname{sh}^2\eta}\right]\omega_n^k=0,$$

$$\lambda^2=n(n+m-2). \tag{9}$$

При этом из первого условия краевых условий (2) и (3) следует, что функция $\omega_n^k(\eta,\varphi)$ удовлетворяет условию

$$\omega_n^k(\eta_0,\varphi)=\psi_n^k(\eta_0,\varphi),\quad \psi_n^k(\eta_0,\varphi)=\varphi_n^k\left[\frac{\sqrt{\varepsilon}\operatorname{ch}\eta_0}{\operatorname{ch}\eta_0-\cos\varphi}\right],\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi. \tag{10}$$

Известно [7], что система функций $\left\{\frac{1}{2},\cos 2l\varphi,\sin 2l\varphi,\ l=1,2,\ldots\right\}$ полна, ортогональна на $C([0,\pi])$, и следовательно, замкнута. Отсюда следует, что функция $\omega_n^k(\eta,\varphi)$ разложима в ряд

$$\omega_n^k(\eta,\varphi)=\frac{a_{n,0}^k(\eta)}{2}+\sum_{l=1}^{\infty}[a_{n,l}^k(\eta)\cos 2l\varphi+b_{n,l}^k(\eta)\sin 2l\varphi]; \tag{11}$$

аналогично

$$\psi_n^k(\eta_0,\varphi)=\frac{\bar{\psi}_{n,0}^k(\eta_0)}{2}+\sum_{l=1}^{\infty}\left[\bar{\psi}_{n,l}^k(\eta_0)\cos 2l\varphi+\bar{\bar{\psi}}_{n,l}^k(\eta_0)\sin 2l\varphi\right]. \tag{12}$$

Далее, подставляя (11) в (9), для коэффициентов $a_{n,0}^k(\eta)$, $a_{n,l}^k(\eta)$, $b_{n,l}^k(\eta)$ получаем уравнение

$$W_{\eta\eta}+(m-1)\,W_\eta\operatorname{cth}\eta-\left[\mu^2+\frac{\lambda^2}{\operatorname{sh}^2\eta}-\frac{(m-1)^2}{4}\right]W=0,$$

$\mu=2l$, $l=0,1,\ldots,$ которое можно переписать в виде

$$(1-s^2)\,W_{ss}-2(k+1)\,sW_s+\left[\nu(\nu+1)-k(k+1)-\frac{\lambda^2}{1-s^2}\right]W=0, \tag{13}$$

где $s=\operatorname{ch}\eta$, $k=m-2=0,1,\ldots,$ $\nu=\mu-1/2$, $\mu=0,2,4,\ldots$.

Из уравнения (13), вводя новую неизвестную функцию $V(s)=(s^2-1)^{k/2}W(s)$, получаем уравнение Лежандра

$$(1-s^2)\,V_{ss}-2sV_s+\left[\nu(\nu+1)-\frac{(n+m)^2}{1-s^2}\right]V=0,$$

общее решение которого представимо по формуле [6]

$$V_{n,m,\nu}(s)=AP_\nu^{n+k}(s)+BQ_\nu^{n+k}(s), \tag{14}$$

где A,B — произвольные постоянные, а $P_\nu^\mu(s)$, $Q_\nu^\mu(s)$ — присоединенные функции Лежандра.

Так как решение задачи T ищем в классе $L(\Omega_\varepsilon)$, то отсюда следует, что при $\eta\to\infty$ функция $V_{n,m,\nu}(\operatorname{ch}\eta)$ асимптотически равна выражению $c\exp[-(\alpha+1-m/2)]\eta$ для всех значений n,m,ν, где $c=\mathrm{const}$.

С другой стороны известно, что для функций $P_{\mu-1/2}^m(\operatorname{ch}\eta)$, $Q_{\mu-1/2}^m \times$ $\times (\operatorname{ch}\eta)$ имеют место следующие разложения [5, 6]:

$$\Gamma(1+m)\Gamma(\mu-m+1/2)P_{\mu-1/2}^m(\operatorname{ch}\eta) = \Gamma(\mu+1/2+m)2^{-2m} \times$$
$$\times (1-\exp(-2\eta))^m [\exp(-(\mu+1/2)\eta)]\Gamma\Bigg(\frac{1}{2}+m,$$
$$\frac{1}{2}-\mu, 1+2m, 1-\exp(-2\eta)\Bigg), \tag{15}$$

$$\Gamma(1+\mu)Q_{\mu-1/2}^m(\operatorname{ch}\eta) = \sqrt{\pi}(\exp(im\pi))\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+m\right)\times$$
$$\times \frac{[1-\exp(-2\eta)]^m}{\exp(\mu+1/2)\eta}\Gamma\left(\frac{1}{2}+m, \frac{1}{2}+\mu+m, 1+\mu, \exp(-2\eta)\right),$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция, $\Gamma(a, b, c, z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Тогда, учитывая формулу $\Gamma(a, b, c, z) = (1-z)^{c-a-b}\Gamma(c-a, c-b, c, z)$, из (15) при $\eta\to\infty$ получаем, что $P_{\mu-1/2}^m(\operatorname{ch}\eta)$ асимптотически выражается в виде $c[\exp(-(\mu+1/2)\eta)]\exp(2\eta\mu)$ или $c\exp(\mu-1/2)\eta$. Следовательно, $|P_{\mu-1/2}^{n+k}(\operatorname{ch}\eta)|\to\infty$ при $\eta\to\infty$. Функция $Q_{\mu-1/2}^m(\operatorname{ch}\eta)$ пропорциональна функции $\exp(-(\mu+1/2)\eta)$ при $\eta\to\infty$, откуда следует, что $|Q_{\mu-1/2}^{n+k}\times$ $\times(\operatorname{ch}\eta)|\to 0$, $\eta\to\infty$.

Из изложенного выше нетрудно заключить, что в формуле (14) нужно положить $A=0$, а постоянную B можно найти из (10), (12). Действительно, из (11), (14), учитывая (10), (12), получаем

$$a_{n,l}^k(\eta) = \left(\frac{\operatorname{sh}\eta_0}{\operatorname{sh}\eta}\right)^{m/2-1}\frac{Q_{2l-1/2}^{n+m/2-1}(\operatorname{ch}\eta)}{Q_{2l-1/2}^{n+m/2-1}(\operatorname{ch}\eta_0)}\bar{\psi}_{n,l}^k(\eta_0),$$
$$b_{n,l}^k(\eta) = \left(\frac{\operatorname{sh}\eta_0}{\operatorname{sh}\eta}\right)^{m/2-1}\frac{Q_{2l-1/2}^{n+m/2-1}(\operatorname{ch}\eta)}{Q_{2l-1/2}^{n+m/2-1}(\operatorname{ch}\eta_0)}\bar{\bar{\psi}}_{n,l}^k(\eta_0). \tag{16}$$

Таким образом, решение уравнения (5) записывается в виде ряда

$$v(\eta, \theta, \varphi) = (\operatorname{ch}\eta-\cos\varphi)^{(m-1)/2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\omega_n^k(\eta, \varphi)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{17}$$

где $\omega_n^k(\eta, \varphi)$, $k=\overline{1, k_n}$, $n=0, 1, \ldots$, определяются из (11), в которых $a_{n,l}^k(\eta)$, $b_{n,l}^k(\eta)$ в свою очередь находятся из (16). Учитывая ограничения на заданную функцию $\varphi(\rho, \theta)$, а также (15), можно показать, что $v\in C\times$ $\times(\bar{G}_{\eta_0})\cap C^2(G_{\eta_0})$. Теперь из (17), (6) единственным образом можно найти $u(\rho, \theta, 0) = \tau(\rho, \theta)\in B_1^l(S^\varepsilon)$.

Следовательно, задача T сведена к задаче Дарбу для уравнения (1) в области Ω_ε^- с краевыми условиями

$$u|_{S^\varepsilon} = \tau(x), \quad u|_{S_\varepsilon} = \sigma_\varepsilon(x)$$

или

$$u|_{S^\varepsilon} = \tau(x), \quad u|_{S_1} = \sigma_1(x),$$

однозначная разрешимость которого установлена в [8]. Теорема доказана.

1. *Protter M. H.* New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type // J. Rational Mech. and Analysis.— 1954.— 3, N 4.— P. 435—446.
2. *Бицадзе А. В.* К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях // Докл. АН СССР.— 1956.— **110**, № 6.— С. 901—902.
3. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа.— М. : Изд-во АН СССР, 1959.— 164 с.

4. *Каратопраклиев Г. Д.* О единственности решения некоторых краевых задач для уравнений смешанного типа и гиперболических уравнений в пространстве // Дифференц. уравнения.— 1982.— **18**, № 1.— С. 59—63.
5. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций.— М. : Изд-во иностр. лит., 1952.— 476 с.
6. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. В 2-х т.— М. : Наука, 1973.— Т. 1.— 294 с.
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1976.— 543 с.
8. *Алдашев С. А.* О некоторых локальных и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения // Дифференц. уравнения.— 1983.— **9**, № 1.— С. 3—8.

Получено 26.06.90