УДК 519.21

С. А. СОЛНЦЕВ, канд. физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т)

Об эквивалентности скалярной и операторной нормировок в усиленном законе больших чисел

Показано, что сходимость к нулю почти наверное (п. н.) матрично-нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов с конечным вторым моментом норм эквивалентна сходимости к нулю п. н. указанных сумм, нормированных нормами этих матриц. Как следствие выводится критерий интегрального типа для усиленного закона больших чисел.

Показано, що збіжність до нуля майже напевно (м. н.) матрично-нормованих сум незалежних однаково розподілених випадкових векторів з фінітним другим моментом еквівалентна збіжності м. н. вказаних сум, нормованих нормами цих матриць. Як наслідок виводиться критерій інтегрального типу для посиленного закону великих чисел.

При изучении условий сходимости к нулю почти наверное (п. н.) сумм независимых случайных векторов, нормированных линейными операторами, возникает вопрос о возможности такой замены операторных нормировок на скалярные, в частности, на нормы этих операторов, которая сохраняла бы сходимость. Для такого рода исследований существуют эффективные критерии в случае скалярных нормировок (см. библиографические примечания к гл. 6 в [1]). В общем случае указанная замена нарушает сходимость к нулю п. н., но для специальных классов случайных векторов и нормирующих операторов она оказывается допустимой [2, 3, с. 115]. В настоящей статье с этой точки зрения изучается усиленный закон больших чисел (УЗБЧ) для сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов. В теореме 1 и следствии 1 доказывается возможность замены нормирующих операторов (матриц) на их норму в случае конечности второго момента нормы слагаемых. Получен критерий интегрального типа для УЗБЧ с матричными нормировками (теорема 2). Приводимый в заключительной части пример показывает, что требование конечности второго момента нормы случайных слагаемых принципиально и не может быть опущено.

Пусть $(X,\ X_k,\ k \geqslant 1)$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов в m-мерном евклидовом пространстве вектор-столбцов $\mathbf{R}^m$ $(m \geqslant 1)$ с естественным скалярным произведением; $S_n = X_1 + \ldots + X_n,\ n \geqslant 1$; $M_{d\times m}$ — класс $d\times m$-матриц; $(A_n,\ n \geqslant 1) \in M_{d\times m}$. Если $A \in M_{d\times m}$, то $\| A \|$ — операторная норма матрицы A, подчиненная евклидовым нормам пространств $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^d$ (спектральная норма); A^T — матрица, транспонированная к A; I_m — единичная матрица порядка m. Норму и скалярное произведение в соответствующем пространстве, вид которого определяется из контекста, будем обозначать $\|\cdot\|$ и $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$; $S_1(0) = \{x \in \mathbf{R}^m\colon \|x\| = 1\}$ — единичная сфера; $\mathfrak{N}_\infty$ — класс всех последовательностей натуральных чисел монотонно (но не обязательно строго) возрастающих к бесконечности: $R(Y) = \mathbf{E}(Y - \mathbf{E}Y)(Y - \mathbf{E}Y)^T$ — ковариационная матрица случайного вектора Y. Случайный вектор Y является симметричным вектором в $\mathbf{R}^m$, если он равнораспределен с вектором $(-Y)$; $I\{\cdot\}$ — индикатор соответствующего события.

Будем говорить, что последовательность случайных векторов $(V_n,\ n \geqslant 1)$ стохастически устойчива, если найдется такая последовательность неслучайных векторов $(b_n,\ n \geqslant 1)$, что $(V_n - b_n,\ n \geqslant 1)$ сходится к нулю по вероятности.

Предпошлем основным утверждениям несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть* $\det R(X) \neq 0$. *Тогда если последовательность* $(A_n S_n,\ n \geqslant 1)$ *стохастически устойчива, то*

$$\sqrt{n}\, \| A_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Доказательство. Пусть $(X_k',\ k \geqslant 1)$ — независимая копия последовательности $(X_k,\ k \geqslant 1)$. Положим $\hat{S}_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k - X_k'),\ n \geqslant 1$, и заметим, что $\det R(X_1 - X_1') \neq 0$ и последовательность $(A_n \hat{S}_n,\ n \geqslant 1)$ сходится по вероятности к нулю. Поэтому, не умаляя общности, будем считать, что $(X,\ X_k,\ k \geqslant 1)$ есть последовательность независимых симметричных случайных векторов, а $(A_n S_n,\ n \geqslant 1)$ сходится к нулю по вероятности.

Из условия леммы и неравенства Леви вытекает, что последовательность $(A_n X,\ n \geqslant 1)$ сходится к нулю по вероятности. В силу леммы 3.2.5 [3] эта последовательность сходится к нулю и п. н.:

$$\| A_n X \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ п. н.} \tag{1}$$

Пусть $L(X)$ обозначает минимальное (по размерности) подпространство в $\mathbf{R}^m$, на котором сосредоточен случайный вектор X п. н. Тогда из (1) (см. доказательство леммы 3.4.1 [3]) для всех $x \in L(X)$ получаем

$$\| A_n x \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{2}$$

По условию леммы $L(X) = \mathbf{R}^m$, откуда (2) имеет место для всех $x \in \mathbf{R}^m$. Так как в конечномерных пространствах сильная сходимость последовательности операторов и сходимость этой последовательности по норме эквивалентны, то

$$\| A_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3}$$

Далее, выберем последовательность неслучайных векторв $(e_n,\ n \geqslant 1)$ так, чтобы

$$\| A_n^T e_n \| = \| A_n^T \|.$$

Положим

$$a_n = \| A_n \|; \quad \hat{e}_n = A_n^T e_n / a_n, \quad n \geqslant 1.$$

Поскольку $\| A_n^T \| = \| A_n \|$, то $(\hat{e}_n,\ n \geqslant 1)$ является последовательностью векторов единичной длины и

$$\langle e_n, A_n S_n \rangle = a_n \langle \hat{e}_n, S_n \rangle, \quad n \geqslant 1.$$

По условию леммы последовательность $(a_n \langle \hat{e}_n, S_n \rangle,\ n \geqslant 1)$ сходится к нулю по вероятности. В силу критерия вырожденной сходимости (см., например, [1, с. 208])

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{|t| \leqslant 1} t^2 d\mathbf{P} (a_n \langle \hat{e}_n, X_k \rangle < t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Отсюда

$$n \int_{|t| \leqslant 1} t^2 d\mathbf{P} (\langle \hat{e}_n, X \rangle < t/a_n) = n a_n^2 \mathbf{E} (\langle \hat{e}_n, X \rangle)^2 I \{ | \langle \hat{e}_n, X \rangle | \leqslant 1/a_n \} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Теперь для доказательства утверждения леммы достаточно показать, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathbf{E} (\langle \hat{e}_n, X \rangle)^2 I \{ | \langle \hat{e}_n, X \rangle | \leqslant 1/a_n \} > 0. \tag{4}$$

Действительно,

$$\mathbf{E} (\langle \hat{e}_n, X \rangle)^2 I \{ | \langle \hat{e}_n, X \rangle | \leqslant 1/a_n \} \geqslant \langle \hat{e}_n, R(X) \hat{e}_n \rangle - \mathbf{E} \| X \|^2 I \{ \| X \| > 1/a_n \} \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{e \in S_1(0)} \langle e, R(X) e \rangle - \mathbf{E} \| X \|^2 I \{ \| X \| > 1/a_n \}.$$

В силу (3)

$$\mathbf{E} \| X \|^2 I \{ \| X \| > 1/a_n \} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Поскольку матрица $R(X)$ невырождена, то квадратичная форма $\langle h, R(X) h \rangle$ равна нулю только при $h = 0$. Непрерывность квадратичной формы по h и компактность сферы в $\mathbf{R}^m$ позволяют заключить следующее:

$$\inf_{e \in S_1(0)} \langle e, R(X) e \rangle > 0.$$

Следовательно, соотношение (4) имеет место, что и завершает доказательство леммы.

Отметим, что если $(A_n S_n,\ n \geqslant 1)$ стохастически устойчива и $\det R(X) \neq 0$, то в качестве центрирующей последовательности $(b_n,\ n \geqslant 1)$ можно взять $b_n = n A_n \mathbf{E} X$, $n \geqslant 1$. Действительно, для любого единичного вектора e справедливо

$$\mathbf{E} (\langle e, A_n (S_n - n\mathbf{E}X) \rangle)^2 \leqslant n \| A_n \|^2 \| R(X) \|$$

и сходимость последовательности $(\langle e, A_n (S_n - n\mathbf{E}X) \rangle,\ n \geqslant 1)$ к нулю по вероятности вытекает из леммы 1. Поэтому при исследовании УЗБЧ для нормированных сумм $(A_n S_n,\ n \geqslant 1)$ условие $\mathbf{E}X = 0$ не является ограничительным. Везде далее предполагаем его выполненным.

Следующая лемма формулируется шире, чем это необходимо для доказательства основных утверждений настоящей работы, и представляет самостоятельный интерес.

Лемма 2. *Пусть $(Y, Y_n, n \geqslant 1)$ — последовательность независимых одинаково распределенных гауссовских случайных векторов в $\mathbf{R}^m$, $\mathbf{E}Y = 0$, $R(Y) = R(X)$. Тогда*

$$\| A_n S_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ п. н.} \tag{5}$$

в том и только в том случае, когда

$$\| A_n T_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ п. н.}, \tag{6}$$

где $T_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$, $n \geqslant 1$.

Доказательство. Пусть $(X'_k, k \geqslant 1)$ — независимая копия последовательности $(X_k, k \geqslant 1)$. Положим

$$\hat{X}_k = (X_k - X'_k)/\sqrt{2},\ \hat{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \hat{X}_k,\ n \geqslant 1.$$

Покажем, что (5) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\| A_n \hat{S}_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ п. н.} \tag{7}$$

Действительно, импликация (5) $\Rightarrow$ (7) тривиальна. Обратно, пусть выполнено (7). Тогда найдется такая последовательность неслучайных векторов $(b_n, n \geqslant 1)$, что

$$\| A_n S_n - b_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ п. н.},$$

а значит, последовательность $(A_n S_n, n \geqslant 1)$ стохастически устойчива. Как отмечалось выше, в качестве b_n можно взять $b_n = n A_n \mathbf{E} X_n$, $n \geqslant 1$. Равенство $\mathbf{E}X = 0$ показывает, что верна и обратная импликация: (7) $\Rightarrow$ (5). Следовательно, последовательности $(A_n S_n, n \geqslant 1)$ и $(A_n \hat{S}_n, n \geqslant 1)$ равносходящиеся к нулю п. н. Поскольку $(\hat{X}_k, k \geqslant 1)$ представляет из себя последовательность независимых симметричных одинаково распределенных случайных векторов в $\mathbf{R}^m$ таких, что $R(\hat{X}_k) = R(X)$, то, не ограничивая общности, будем считать, что X является симметричным вектором в $\mathbf{R}^m$.

Согласно УЗБЧ для сумм независимых симметричных случайных векторов с операторными нормировками в форме Прохорова — Лоэва [3] (см. также [4]) для того, чтобы

$$\| A_n S_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ п. н.},$$

необходимо и достаточно выполнение двух условий: 1) для всех $k \geqslant 1$

$$\| A_n X_k \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ п. н.};$$

2) для любой последовательности $(n_j, j \geqslant 1) \in \mathfrak{N}_\infty$

$$\| A_{n_{j+1}} (S_{n_{j+1}} - S_{n_j}) \| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \text{ п. н.}$$

Докажем вначале утверждение леммы в предположении, что $R(X) = I_m$. В силу леммы 1 условие 1 выполняется одновременно для $(X_k, k \geqslant 1)$ и $(Y_k, k \geqslant 1)$. Следовательно, утверждение леммы будет доказано, если показать, что для любого фиксированного вектора $e \in S_1(0)$ и любой последовательности $(n_j, j \geqslant 1) \in \mathfrak{N}_\infty$

$$\langle e, A_{n_{j+1}} (S_{n_{j+1}} - S_{n_j}) \rangle \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \text{ п. н.} \tag{8}$$

тогда и только тогда, когда

$$\langle e, A_{n_{j+1}} (T_{n_{j+1}} - T_{n_j}) \rangle \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \text{ п. н.} \tag{9}$$

Зафиксируем произвольную последовательность $(n_j,\ j\geqslant 1)\in\mathfrak{N}_\infty$ и вектор $e\in S_1(0)$. Положим

$$\widetilde{X}_k = X_k I\{\|X_k\|\leqslant\sqrt{k}\},\ k\geqslant 1;$$

$$\widetilde{S}_n = \widetilde{X}_1+\widetilde{X}_2+\ldots+\widetilde{X}_n,\ n\geqslant 1.$$

Заметим, что

$$\mathbf{P}(A_{n_{j+1}}(S_{n_{j+1}}-S_{n_j})\neq A_{n_{j+1}}(\widetilde{S}_{n_{j+1}}-\widetilde{S}_{n_j}))\leqslant\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}\mathbf{P}(\|X\|>\sqrt{k}).$$

В силу конечности $\mathbf{E}\|X\|^2$ ряд $\sum\limits_k\mathbf{P}(\|X\|>\sqrt{k})$ сходится. Тогда из леммы Бореля — Кантелли вытекает

$$\|A_{n_{j+1}}(S_{n_{j+1}}-S_{n_j})-A_{n_{j+1}}(\widetilde{S}_{n_{j+1}}-\widetilde{S}_{n_j})\|\xrightarrow[j\to\infty]{}0\ \text{п. н.},$$

отсюда (8) эквивалентно соотношению

$$\theta_j\equiv\langle e,\ A_{n_{j+1}}(\widetilde{S}_{n_{j+1}}-\widetilde{S}_{n_j})\rangle\xrightarrow[j\to\infty]{}0\ \text{п. н.}\tag{10}$$

Для дальнейших рассуждений последовательность $(\theta_j,\ j\geqslant 1)$ удобно представить следующим образом:

$$\theta_j = a_j\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}\eta_k,\ j\geqslant 1,$$

где

$$a_j=\|A^T_{n_{j+1}}e\|,\ e_j=A^T_{n_{j+1}}e/a_j;$$

$$\eta_k=\langle e_j,\ \widetilde{X}_k\rangle,\ n_j<k\leqslant n_{j+1},\ j\geqslant 1$$

(если $a_j=0$, то для корректности в качестве e_j берем любой вектор $e'\in\in S_1(0)$). Отметим, что $(\eta_n,\ n\geqslant 1)$ — последовательность независимых симметричных случайных величин, $\mathbf{E}\eta_n=0$ и

$$\mathbf{E}\eta_n^2=\mathbf{E}\langle e_j,\ \widetilde{X}_n\rangle^2\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathbf{E}\langle e_j,\ X\rangle^2.\tag{11}$$

Далее, пусть $(\xi_n,\ n\geqslant 1)$ — последовательность независимых центрированных гауссовских случайных величин, $\mathbf{E}\xi_n^2=\mathbf{E}\eta_n^2,\ n\geqslant 1$. Покажем, что (10) эквивалентно соотношению

$$\Theta_j\equiv a_j\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}\xi_k\xrightarrow[j\to\infty]{}0\ \text{п. н.}\tag{12}$$

Используя неравномерные оценки в центриальной предельной теореме, введенные А. Бикялисом [5], имеем

$$|\mathbf{P}(|\theta_j|>\varepsilon)-\mathbf{P}(|\Theta_j|>\varepsilon)|\leqslant Ca_j^3\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}\mathbf{E}|\eta_k|^3\leqslant$$

$$\leqslant C\|A_{n_{j+1}}\|^3\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}\mathbf{E}\|\widetilde{X}_k\|^3\tag{13}$$

(Здесь $C,\ \varepsilon>0$ — некоторые константы). Положим

$$f_k=\|A_{n_{j+1}}\|\ \text{при}\ n_j<k\leqslant n_{j+1};$$

$$F(t)=\mathbf{P}(\|X\|<t).$$

Тогда, изменяя порядок суммирования, получаем

$$\sum_j \| A_{n_{j+1}} \|^3 \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} \mathbf{E} \| \widetilde{X}_k \|^3 = \sum_n f_n^3 \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\sqrt{k-1} \leqslant |t| < \sqrt{k}} |t|^3 dF(t) =$$

$$= \sum_n \int\limits_{\sqrt{n-1} \leqslant |t| < \sqrt{n}} |t|^3 dF(t) \sum_{k=n}^{\infty} f_k^3 \leqslant \sum_n \int\limits_{\sqrt{n-1} \leqslant |t| < \sqrt{k}} t^2 dF(t) \sqrt{n} \sum_{k=n}^{\infty} f_k^3. \quad (14)$$

Согласно лемме 1

$$f_{n_{j+1}} \sqrt{n_{j+1}} \xrightarrow[j \to \infty]{} 0,$$

откуда, учитывая конструкцию последовательности $(f_n,\ n \geqslant 1)$, имеем

$$f_n \sqrt{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Следовательно,

$$\sup_n \sqrt{n} \sum_{k=n}^{\infty} f_k^3 < \infty,$$

что совместно с конечностью $\mathbf{E}\|X\|^2$ обеспечивает сходимость ряда в (14). Неравенство (13) и лемма Бореля — Кантелли завершают доказательство эквивалентности (10) и (12).

Пусть $(\gamma_n,\ n \geqslant 1)$— последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин. Образуем последовательность $(\zeta_j,\ j \geqslant 1)$, положив

$$\zeta_j = a_j \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} \gamma_k,\ j \geqslant 1.$$

В силу соотношения (11)

$$\mathbf{E}\Theta_j^2 = a_j^2 \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} \mathbf{E}\xi_k^2 \sim a_j^2 (n_{j+1} - n_j) = \mathbf{E}\zeta_j^2,\ j \to \infty.$$

Теперь, поскольку $(\Theta_j,\ j \geqslant 1)$ и $(\xi_j,\ j \geqslant 1)$ являются последовательностями независимых центрированных гауссовских случайных величин, у которых дисперсии имеют один порядок малости, то (12) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\zeta_j \xrightarrow[j \to \infty]{} 0 \text{ п. н.}$$

В предположении $R(X) = R(Y) = I_m$ случайные величины ζ_j и $\langle e, A_{n_{j+1}} \times (T_{n_{j+1}} - T_{n_j})\rangle$ одинаково распределены. Следовательно, $(12) \Leftrightarrow (9)$, и утверждение леммы в случае $R(X) = I_m$ доказано.

Перейдем к рассмотрению случая произвольной матрицы $R(X)$. Если $\det R(X) \neq 0$, то утверждение леммы немедленно вытекает из доказанного выше и равенства

$$A_n S_n = A_n R^{1/2}(X) \left(\sum_{k=1}^{n} R^{-1/2}(X) X_k \right),$$

поскольку у вектора $R^{-1/2}(X) X$ единичная ковариационная матрица. Предположим теперь, что $\det R(X) = 0$, т. е. $\dim L(X) = l < m$, где, как и раньше, $L(X)$ — минимальный линейный носитель распределения X. Зафиксировав некоторый ортонормированный базис в $L(X)$, для каждого $k \geqslant 1$ рассмотрим случайный вектор $\widehat{X}_k$ в $\mathbf{R}^l$, координаты которого являются координатами вектора X_k в выбранном базисе $L(X)$. Далее, для каждого $n \geqslant 1$ пусть $\widehat{A}_n \in M_{d \times l}$ — матрица линейного оператора, полученного из A_n сужением его на $L(X)$. Тогда $\| A_n S_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ п. н. эквивалентно сходимости $\| \hat{A}_n \hat{S}_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ п. н., где $\hat{S}_n = \hat{X}_1 + \ldots + \hat{X}_n$. Для завершения доказательства осталось отметить, что $(\hat{X}_k,\ k \geqslant 1)$ — последовательность независимых симметричных одинаково распределенных случайных векторов и $\det R(\hat{X}_1) \neq 0$. Лемма 2 доказана.

Следующее утверждение устанавливает эквивалентность операторного и скалярного нормирования в УЗБЧ для сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов с конечным вторым моментом нормы.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E}\| X \|^2 < \infty$. *Для того чтобы*

$$\| A_n S_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \text{п. н.}, \tag{15}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\| A_n R^{1/2}(X) \| \| S_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \text{п. н.} \tag{16}$$

В случае, когда ковариационная матрица слагаемых не вырождена, теорема 1 принимает более простой вид.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $\det R(X) \neq 0$. *Для того чтобы выполнялось* (15), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\| A_n \| \| S_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \text{п. н.} \tag{17}$$

Утверждение следствия 1 непосредственно вытекает из теоремы 1, если воспользоваться простыми неравенствами

$$\| A_n \| / \| R^{-1/2}(X) \| \leqslant \| A_n R^{1/2}(X) \| \leqslant \| A_n \| \| R^{1/2}(X) \|.$$

Следующие необходимые и достаточное условия УЗБЧ с операторными нормировками подобны интегральному критерию Колмогорова — Петровского — Эрдеша — Феллера для скалярных нормировок (см. также [6]).

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{E}\| X \|^2 < \infty$. *Для того чтобы выполнялось* (15), *необходимо, чтобы для каждого* $c > 1$, *и достаточно, чтобы для некоторого* $c > 1$

$$\sum_k \exp\{-\varepsilon/(c^k \max_{c^k \leqslant j < c^{k+1}} \| A_j R^{1/2}(X) \|)^2\} < \infty \tag{18}$$

для всех $\varepsilon > 0$.

Доказательство теорем. Чтобы показать справедливость теорем 1 и 2, докажем последовательно импликации: (15) $\Rightarrow$ (18) $\Rightarrow$ (16) $\Rightarrow$ (15).

Предположим, что выполнено (15). Пусть $(\Gamma_n,\ n \geqslant 1)$ — последовательность независимых центрированных гауссовских случайных векторов в $\mathbf{R}^m$ с единичной ковариационной матрицей. В силу леммы 2

$$\left\| A_n R^{1/2}(X) \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \text{п. н.}$$

Напомним, что случайный вектор Z называется сферически симметричным в $\mathbf{R}^m$, если его распределение инвариантно относительно группы вращений в $\mathbf{R}^m$. В работе [3] показано, что для последовательности независимых сферически симметричных векторов $(Z_k,\ k \geqslant 1)$ сходимость $\| A_n (Z_1 + \ldots + Z_n) \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ п. н. эквивалентна сходимости $\| A_n \| \| Z_1 + \ldots + Z_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ п. н. Поскольку $(\Gamma_n,\ n \geqslant 1)$ является последовательностью независимых сферически симметричных векторов в R^m, то

$$\| A_n R^{1/2}(X) \| \left\| \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \text{п. н.}$$

Пусть $(\tau, \tau_k, k \geqslant 1)$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbf{E}\tau = 0$, $0 < \mathbf{E}\tau^2 < +\infty$, а $(a_n, n \geqslant 1)$ — последовательность неслучайных констант. Теорема 3 [7] утверждает, что для сходимости

$$a_n(\tau_1 + \ldots + \tau_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ п. н.}$$

необходимо, чтобы для каждого $c > 1$, и достаточно, чтобы для некоторого $c > 1$

$$\sum_k \exp\{-\varepsilon/c^{2k} \max_{c^k \leqslant j < c^{k+1}} a_j^2\} < \infty$$

для всех $\varepsilon > 0$. Отсюда соотношение (18) выполняется.

Далее, возьмем произвольный вектор $e \in S_1(0)$. Последовательность $(\langle e, X_k\rangle, k \geqslant 1)$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией. Опять воспользовавшись теоремой 3 [7], приходим к (16).

Пусть $A^{\oplus}$ обозначает матрицу, псевдообратную к A. Напомним, что для любой матрицы A имеет место равенство $AA^{\oplus}A = A$. Если выполнено (16), то в силу теоремы 3 [7]

$$\| A_n R^{1/2}(X) \| \| [R^{1/2}(X)]^{\oplus} S_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ п. н.},$$

откуда

$$\| A_n R^{1/2}(X) [R^{1/2}(X)]^{\oplus} S_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ п. н.}$$

Из леммы 2 следует, что сходимость к нулю п. н. операторно-нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов полностью определяется ковариационными матрицами слагаемых. Поскольку у векторов X_1 и $R^{1/2}(X)[R^{1/2}(X)]^{\oplus}X_1$ одинаковые ковариационные матрицы, то в силу леммы 2 получаем (15). Теоремы доказаны.

Приведем пример, показывающий, что условие $\mathbf{E}\|X\|^2 < \infty$ нельзя сколь-нибудь существенно ослабить, например, до $\mathbf{E}\dfrac{\|X\|^2}{\ln\ln\|X\|} < \infty$.

Пример. Положим $X_k^T = (\gamma_k, \eta_k)$, где $(\gamma_k, k \geqslant 1)$ — последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин, а $(\eta_k, k \geqslant 1)$ — последовательность независимых случайных величин с плотностью $f(x)$ такой, что $f(x) = C/|x|^3 \ln|x|$ при $|x| > 3$ и $f(x) = 0$ при $|x| \leqslant 3$. Здесь C — константа, подобранная из условия нормировки. Пусть $A_n = \operatorname{diag}(1/\sqrt{n\ln n}, 1/n)$ — диагональные матрицы. В силу закона повторного логарифма и УЗБЧ $\|A_n S_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ п. н. Покажем от противного, что $\|A_n\|\|S_n\| \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ п. н. Для этого предположим обратное: $\|A_n\|\|S_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ п. н. Тогда $(\eta_1 + \ldots + \eta_n)(n\ln n)^{-1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ п. н. Отсюда в силу необходимых условий УЗБЧ (лемма 10 [1, с. 222])

$$\sum_n \mathbf{P}(|\eta_1| > \sqrt{n\ln n}) < \infty. \tag{19}$$

В то же время

$$\sum_n \int_{|x| > \sqrt{n\ln n}} \frac{C dx}{|x|^3 \ln|x|} = \infty$$

и ряд в (19) расходится. Противоречие. Следовательно,

$$\|A_n\|\|S_n\| \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \text{ п. н.}$$

В заключение отметим, что

$$\mathbf{E}\|X_1\|^2 = \infty \text{ и } \mathbf{E}\frac{\|X_1\|^2}{\ln\ln\|X_1\|} < \infty.$$

1. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.— М. : Наука, 1987.— 317 с.
2. *Ядренко О. М.* Об усиленном законе больших чисел с матричными нормировками и условиях сходимости к нулю одного класса гауссовских последовательностей // Некоторые вопросы теории случайных процессов.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982.— С. 117—133.
3. *Булдыгин В. В., Солнцев С. А.* Функциональные методы в задачах суммирования случайных величин.— Киев : Наук. думка, 1989.— 187 с.
4. *Булдыгин В. В., Солнцев С. А.* УЗБЧ для сумм независимых случайных векторов и сходимость к нулю гауссовских последовательностей // Теория вероятностей и ее применения.— 1987.— **32**, № 2.— С. 266—281.
5. *Бикялис А.* Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме // Лит. мат. сб.— 1966.— **6**, № 3.— С. 323—346.
6. *Мартикайнен А. И.* Критерий сильной сходимости нормированных сумм независимых случайных величин и их приложения // Теория вероятностей и ее применения.— 1984.— **29**, № 3.— С. 502—516.
7. *Солнцев С. А.* Об осцилляции сумм независимых случайных величин // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 6.— С. 775—781.

Получено 12.06.90