УДК 517.9

А. М. САМОЙЛЕНКО, чл.-корр. АН УССР (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Исследование динамической системы в окрестности инвариантного тороидального многообразия

Исследована динамическая система в окрестности инвариантного тороидального многообразия, в случае, когда инвариантное тороидальное многообразие системы заполнено траекториями общего вида.

Досліджена динамічна система в околі інваріантного тороїдального многовиду у випадку, коли інваріантний тороїдальний многовид системи заповнений траєкторіями загального вигляду.

В работе [1] исследована динамическая система в окрестности инвариантного тороидального многообразия, «заметаемого» квазипериодической траекторией системы. В настоящей статье результаты [1] получают естественное распространение на случай, когда инвариантное тороидальное многообразие системы заполнено траекториями общего вида. В п. 1 дана теорема о приводимости динамической системы в окрестности инвариантного тороидального многообразия M и утверждение об экспоненциальном притяжении решений из окрестности многообразия M к решениям на M, в п. 2 устанавливаются условия сохранения при малом возмущении поведения траекторий динамической системы в окрестности многообразия M.

1. Теорема о приводимости. Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = X(x), \tag{1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка n-мерного евклидова пространства E^n, $X = X(x)$ — функция пространства r раз непрерывно дифференцируемых в E^n функций $C^r(E^n)$ со значениями в E^n, $r \geqslant 1$.

Пусть $f = f(\varphi)$ является функцией пространства $C^s(\mathcal{T}_m)$, $r \geqslant s$, 2π-периодических функций переменного $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ гладкости $s \geqslant 2$ со значениями в E^n. Будем предполагать, что множество

$$M: x = f(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{T}_m, \tag{2}$$

есть инвариантное множество системы (1) и

$$\operatorname{rank} \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} = m, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{3}$$

Согласно [2] первое из предположений относительно множества M выполняется, когда

$$\left[\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} \Gamma^{-1}(\varphi) \left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}\right)^* - E\right] X(f(\varphi)) = 0, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m,$$

где $\Gamma(\varphi) = \left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}\right)^* \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}$, второе из предположений означает, что M — тороидальное многообразие.

Система уравнений (1) на M сводится к динамической системе на торе $\mathcal{T}_m$ вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \tag{4}$$

где согласно [2] функция $a(\varphi)$ имеет вид

$$a(\varphi) = \Gamma^{-1}(\varphi) \left(\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}\right)^* X(f(\varphi)), \quad \varphi \in \mathcal{T}_m.$$

Как и в [1], будем предполагать, что m-репер $\partial f(\varphi)/\partial\varphi$ дополняем до 2π-периодического базиса в E^n и $B(\varphi)$ является дополняющей матрицей из $C^s(\mathscr{T}_m)$. В окрестности многообразия M можно ввести локальные координаты φ, h, положив

$$x = f(\varphi) + B(\varphi) h. \tag{5}$$

Простые выкладки с учетом инвариантности M и уравнения (4) потока траекторий на M позволяют записать систему уравнений (1) в окрестности M в локальных координатах φ, h в виде системы

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi) + L_1(\varphi, h)\left[X(f(\varphi) + B(\varphi) h) - X(f(\varphi)) - \frac{\partial B(\varphi)}{\partial\varphi} a(\varphi) h\right],\\ \frac{dh}{dt} &= L_2(\varphi, h)\left[X(f(\varphi) + B(\varphi) h) - X(f(\varphi)) - \frac{\partial B(\varphi)}{\partial\varphi} a(\varphi) h\right],\end{aligned} \tag{6}$$

где $L_1(\varphi, h)$ и $L_2(\varphi, h)$ — блоки матрицы, обратной к матрице

$$\left[\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial B(\varphi)}{\partial\varphi} h, B(\varphi)\right], \quad \frac{\partial B(\varphi)}{\partial\varphi} a(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial B(\varphi)}{\partial\varphi_\nu} a_\nu(\varphi),$$

(φ, h) — точки области

$$\varphi \in \mathscr{T}_m, \quad \|h\| \leqslant \delta \tag{7}$$

с достаточно малым положительным δ.

Запишем уравнения в вариациях многообразия M

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dh}{dt} = P(\varphi) h, \tag{8}$$

где согласно определению [2]

$$P(\varphi) = L_2(\varphi, 0)\left[\frac{\partial X(f(\varphi))}{\partial x} - \frac{\partial B(\varphi)}{\partial\varphi} a(\varphi)\right]. \tag{9}$$

Пусть

$$\varphi = \psi_t(\varphi), \quad \psi_0(\varphi) = \varphi \in \mathscr{T}_m \tag{10}$$

является решением первого из уравнений системы (8), а $\Omega_0^t(P)$ является фундаментальной матрицей решений второго из уравнений системы (8), взятого при $\varphi = \psi_t(\varphi)$. По матрице $P(\varphi)$ определим функцию $\beta(\varphi)$, положив

$$\inf_{S\in\mathfrak{N}} \max_{\|h\|=1} \frac{\left\langle\left[S(\varphi) P(\varphi) + (1/2) \frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi} a(\varphi)\right] h, h\right\rangle}{\langle S(\varphi) h, h\rangle} \leqslant -\beta(\varphi), \tag{11}$$

где $\mathfrak{N}$ — множество $(n-m)\times(n-m)$-мерных положительно определенных симметрических матриц $S = S(\varphi)$, принадлежащих пространству $C^1(\mathscr{T}_m)$, $\langle\cdot, \cdot\rangle$ — скалярное произведение в E^n.

Будем предполагать, что

$$\beta_0 = \inf_{\varphi\in\mathscr{T}_m} \beta(\varphi) > 0. \tag{12}$$

Условия (12) достаточно [2] для выполнения неравенства

$$\|\Omega_0^t(P)\| \leqslant \mathscr{L} e^{-\gamma t}, \quad t \in R^+ \tag{13}$$

для всех $\varphi \in \mathscr{T}_m$, где γ — произвольное положительное число, удовлетворяющее неравенству $\beta_0 > \gamma$, $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\gamma)$ — некоторая положительная постоянная, $R^+ = [0, +\infty)$.

Определим функцию $\alpha_1(\varphi)$, положив

$$\inf_{S_1\in\mathfrak{N}_n} \max_{\|\psi\|=1} \frac{\left\langle\left[S_1(\varphi) \frac{\partial a(\varphi)}{\partial\varphi} + (1/2) \frac{\partial S_1(\varphi)}{\partial\varphi} a(\varphi)\right]\psi, \psi\right\rangle}{\langle S_1(\varphi)\psi, \psi\rangle} \leqslant \alpha_1(\varphi), \tag{14}$$

где $\mathfrak{N}_1$ — множество $m \times m$-мерных положительно определенных симметрических матриц $S_1 = S_1(\varphi)$, принадлежащих пространству $C^1(\mathcal{T}_m)$.

С помощью $\alpha_1(\varphi)$ можно выразить оценку произвольных функции $\psi_t(\varphi)$ по переменной φ. Стандартные рассуждения [2] приводят для производной $D^l_\varphi \psi_t(\varphi) = \dfrac{\partial^l \psi_t(\varphi)}{\partial\varphi_1^{l_1}\ldots\partial\varphi_m^{l_m}}$, $l_1 + \ldots + l_m = l$ порядка $l \leqslant s-1$ к оценке

$$\| D^l_\varphi \psi_t(\varphi) \| \leqslant \mathcal{L}_1 \exp\left\{\int_0^t l\alpha(\psi_\tau(\varphi))\, d\tau + \mu t\right\}, \quad t \in R^+, \tag{15}$$

где μ — сколь угодно малое положительное число, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(l, \mu)$ — некоторая положительная постоянная.

Будем предполагать, что

$$\inf_{\varphi\in\mathcal{T}_m} [\beta(\varphi) - l\alpha_1(\varphi)] > 0 \tag{16}$$

для некоторого $s - 1 \geqslant l \geqslant 1$.

Обозначения $C^\rho_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m \times \mathcal{H}_\mu)$ и $C^\rho(\mathcal{T}_m \times \mathcal{H}_\mu)$, где $\mathcal{H}_\mu = \{h : \|h\| \leqslant \mu\}$, имеют естественное значение [1].

Имеет место аналогичное теореме 2 [1] утверждение относительно системы уравнений (6).

Теорема 1. *Пусть правая часть системы* (6) *удовлетворяет условиям гладкости, приведенным выше, и выполняются неравенства* (12) *и* (16). *Тогда можно указать* $\mu > 0$ *и матрицу* $\Psi(\psi, h)$, *принадлежащую пространству* $C^{l-1}_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m \times \mathcal{H}_\mu)$ *такие, что замена переменных*

$$\varphi = \psi + \Psi(\psi, h)\, h \tag{17}$$

приводит систему уравнений (6) *к виду*

$$\frac{d\psi}{dt} = a(\psi), \quad \frac{dh}{dt} = P(\psi, h)\, h, \tag{18}$$

где $P(\psi, h)$ — *матрица, принадлежащая* $C^{\rho-1}_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m \times \mathcal{H}_\mu)$ *и совпадающая с* $P(\psi)$ *при* $h = 0$.

Доказательство теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 2 [1] с тем изменением, что в соответствующих рассуждениях следует учитывать оценку (15) для производных функции $\psi_t(\varphi)$ и возникающие из-за нее трудности преодолевать, используя неравенство (16).

Проверка условий (12), (16) сопряжена с определенного рода трудностями. Избежать их удается в случае, когда нам известны оценки фундаментальных матриц решений $\Omega^t_0(P)$ и $\Omega^t_0\left(\dfrac{\partial a}{\partial\varphi}\right)$ соответственно систем

$$\frac{dh}{dt} = P(\psi_t(\varphi))\, h, \quad \frac{dg}{dt} = \frac{\partial a(\psi_t(\varphi))}{\partial\varphi}\, g \tag{19}$$

вида

$$\begin{gathered} \|\Omega^t_0(P)\| \leqslant \mathcal{L} e^{-\beta_0 t}, \quad t \in R^+, \\ \left\|\Omega^t_\tau\left(\frac{\partial a}{\partial\varphi}\right)\right\| \leqslant \mathcal{L}_1 e^{\alpha_1 t}, \quad t \in R^+, \end{gathered} \tag{20}$$

где β_0 и α_1 — положительные постоянные. В этом случае для выполнения условия (16), а следовательно, для справедливости утверждений теоремы 1 достаточно, чтобы

$$\beta_0/\alpha_1 > l, \tag{21}$$

где $s - 1 \geqslant l \geqslant 1$.

З а м е ч а н и е. Условие (16) может иметь место при $a(\varphi) \not\equiv \mathrm{const}$ лишь для конечного значения l. В этом случае замена переменных (17) имеет лишь конечную гладкость.

В случае, когда

$$a(\varphi) \equiv \mathrm{const}, \tag{22}$$

величина $l = s - 1$ и при $s = \infty$ замена переменных (17) бесконечно дифференцируема. При выполнении условия (22) теорема 1 совпадает с теоремой 2 [1].

Теорема 1 позволяет определить характер поведения решений системы (1), начинающихся в окрестности M, охарактеризовав его следующим образом.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполняются приведенные условия гладкости функции $X(x)$ и система уравнений* (1) *имеет инвариантное тороидальное многообразие* (2), *s раз непрерывно дифференцируемое при $r \geqslant s \geqslant 2$.*

Предположим, что

1) *матрица $\partial f(\varphi)/\partial\varphi$ дополняема до 2π-периодического базиса в E^n;*
2) *уравнение в вариациях многообразия M удовлетворяет условию экспоненциальной устойчивости* (12);
3) *выполняется неравенство* (16).

Тогда можно указать достаточно малое $\delta > 0$ такое, что для каждого y_0, удовлетворяющего неравенству $\rho(y_0, M) = \inf\limits_{x \in M} \| y_0 - x \| \leqslant \delta$, найдутся значения $\psi_0 \in \mathcal{T}_m$ и $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$ такие, что

$$\| x(t, y_0) - f(\psi_t(\psi_0)) \| \leqslant \mathcal{L}_2 e^{-\gamma_1 t} \| y_0 - f(\varphi_0) \| \tag{23}$$

для всех $t \in R^+$ и некоторых $\mathcal{L}_2 > 0$, $\gamma_1 > 0$, где $\gamma_1 = \gamma_1(\delta) \to \gamma$ при $\delta \to 0$, $\| \psi_0 - \varphi_0 \| \to 0$ при $\delta \to 0$, $x(t, y_0)$ — решение системы (1), *принимающее при $t = 0$ значение y_0.*

Неравенство (23) доказывает, что решение системы (1), начинающееся в малой окрестности многообразия M, притягивается при $t \to +\infty$ к соответствующему решению этой системы, начинающемуся на M, по экспоненциальному закону.

Доказательство теоремы 2 повторяет дословно доказательство теоремы 4 [1].

2. О с о х р а н е н и и п р и м а л о м в о з м у щ е н и и п о в е д е н и я т р а е к т о р и й д и н а м и ч е с к о й с и с т е м ы в о к р е с т н о с т и м н о г о о б р а з и я M.

Наряду с системой уравнений (1) рассмотрим возмущенную систему уравнений

$$\frac{dy}{dt} = X(y) + \varepsilon Y(y), \tag{24}$$

в которой $Y \in C^r(E^n)$, ε — малый положительный параметр.

Выясним поведение решений этой системы, начинающихся в малой окрестности многообразия M. Будем предполагать выполненными условия предыдущего пункта. Это позволяет нам записать систему (24) в окрестности M в локальной системе координат (φ, h) в виде системы

$$\begin{gathered}\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) + A(\varphi, h)\, h + \varepsilon L_1(\varphi, h)\, Y(f(\varphi) + B(\varphi)\, h),\\ \frac{dh}{dt} = P(\varphi, h)\, h + \varepsilon L_2(\varphi, h)\, Y(f(\varphi) + B(\varphi)\, h),\end{gathered} \tag{25}$$

совпадающей с (6) при $\varepsilon = 0$.

Определим функцию $\alpha(\varphi)$, положив

$$\sup_{S_1 \in \mathfrak{N}_1} \min_{\|\psi\| = 1} \frac{\left\langle \left[S_1(\varphi) \dfrac{\partial a(\varphi)}{\partial\varphi} + (1/2) \dfrac{\partial S_1(\varphi)}{\partial\varphi} a(\varphi) \right] \psi, \psi \right\rangle}{\langle S_1(\varphi)\psi, \psi \rangle} \geqslant \alpha(\varphi), \tag{26}$$

и потребуем выполнения неравенс

$$\inf_{\varphi\in\mathcal{T}_m} [\beta(\varphi) + p\alpha(\varphi)] > 0 \tag{27}$$

для некоторого целого $s - 1 \geqslant p \geqslant 1$.

Согласно теории возмущения инвариантных тороидальных многообразий неравенств (12) и (27) достаточно (см., например, [2], теорема 1, § 3, гл. IV) для того, чтобы система уравнений (25) имела инвариантный тор

$$h = u(\varphi, \varepsilon), \quad \varphi \in \mathcal{T}_m \tag{28}$$

для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ с достаточно малым $\varepsilon_0 > 0$ такой, что $u \in C^{p-1}_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$ и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \| u \|_{p-1,\mathrm{Lip}} = 0. \tag{29}$$

Здесь $\|\cdot\|_{p-1,\mathrm{Lip}} = \|\cdot\|_{p-1} + \mathcal{K}_{p-1}$, где $\mathcal{K}_{p-1}$ — постоянная Липшица $(p-1)$-х производных функции u. Пусть $p \geqslant 2$. Тогда замена переменных

$$h = u(\varphi, \varepsilon) + z,$$

где u — функция (28), приводит систему уравнений (25) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi) + \mathcal{F}(\varphi, \varepsilon) + A(\varphi, z, \varepsilon) z, \\ \frac{dz}{dt} &= P(\varphi, z, \varepsilon) z, \end{aligned} \tag{30}$$

где $\mathcal{F} \in C^{p-1}_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$, $(A, P) \in C^{p-2}_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_{\delta_0})$ для каждого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon_0) \to 0$ при $\varepsilon_0 \to 0$,

$$\begin{gathered} \lim_{\varepsilon\to 0} \| \mathcal{F} \|_{p-1,\mathrm{Lip}} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \| A(\varphi, z, \varepsilon) - A(\varphi, z) \|_{p-1,\mathrm{Lip}} = 0, \\ \lim_{\varepsilon\to 0} \| P(\varphi, z, \varepsilon) - P(\varphi, z) \|_{p-2,\mathrm{Lip}} = 0. \end{gathered} \tag{31}$$

Система уравнений (30) для каждого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ имеет вид системы (25). Неравенства (11) и (14), определяющие функции $\beta(\varphi)$ и $\alpha_1(\varphi)$, носят «грубый» характер: при малых изменениях величин a, P и $\partial a/\partial\varphi$ мало меняются значения β и α_1. Поэтому из предельных соотношений (31) следует, что определяемые по $a(\varphi) + \mathcal{T}(\varphi, \varepsilon)$ и $P(\varphi, 0, \varepsilon)$ согласно формулам (11) и (14) функции $\beta(\varphi, \varepsilon)$ и $\alpha_1(\varphi, \varepsilon)$ удовлетворяют предельным соотношениям

$$\lim_{\varepsilon\to 0} [\beta(\varphi, \varepsilon) - \beta(\varphi)] = \lim_{\varepsilon\to 0} [\alpha_1(\varphi, \varepsilon) - \alpha_1(\varphi)] = 0 \tag{32}$$

равномерно по $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Но тогда можно указать такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(l) > 0$, чтобы из неравенств (12), (16) следовали соотношения

$$\inf_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]} \inf_{\varphi\in\mathcal{T}_m} \beta(\varphi, \varepsilon) > 0, \tag{33}$$

$$\inf_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]} \inf_{\varphi\in\mathcal{T}_m} [\beta(\varphi, \varepsilon) - l\alpha_1(\varphi, \varepsilon)] > 0 \tag{34}$$

для $s - 1 \geqslant l \geqslant 1$.

Так как правая часть системы уравнений (30) принадлежит пространству $C^{p-2}(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_{\delta_0})$ для каждого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, то при $p \geqslant 3$ из (34) следует неравенство

$$\inf_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]} \inf_{\varphi\in\mathcal{T}_m} [\beta(\varphi, \varepsilon) - l_1\alpha_1(\varphi, \varepsilon)] > 0 \tag{35}$$

для

$$l_1 = \min(l, p-2) \geqslant 1. \tag{36}$$

Это позволяет при $p \geqslant 3$ применить к системе уравнений (30) теорему 1 и получить из нее следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и неравенство* (27) *с* $p \geqslant 3$. *Тогда можно указать положительные* μ, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(p)$ *и матрицу* $\Psi(\varphi, z, \varepsilon)$, *принадлежащую пространству* $C_{\mathrm{Lip}}^{l_1-1}(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu)$ *для любого* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ *и удовлетворяющую соотношению*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \Psi(\varphi, z, \varepsilon) - \Psi(\varphi, z, 0) \|_{l_1-1, \mathrm{Lip}} = 0, \tag{37}$$

такие, что замена переменных

$$\varphi = \psi + \Psi(\psi, z, \varepsilon) z \tag{38}$$

приводит систему уравнений (30) *к виду*

$$\frac{d\psi}{dt} = a(\psi) + \mathcal{F}(\psi, \varepsilon), \quad \frac{dz}{dt} = P(\psi + \Psi(\psi, z, \varepsilon) z, z, \varepsilon) z. \tag{39}$$

Условие (12) обеспечивает оценку

$$\| z(t, \varepsilon) \| \leqslant \mathcal{L}_3 e^{-\beta t} \| z(0, \varepsilon) \|, \quad t \in R^+, \tag{40}$$

для решений ψ_t, $z(t, \varepsilon)$ системы (39), у которых $\| z(0, \varepsilon) \| \leqslant \mu$ *при* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Здесь $\mathcal{L}_3 = \mathrm{const}$ и $\beta = \beta(\mu, \varepsilon)$ — некоторые положительные величины $\beta(\mu, \varepsilon) \to \beta_0$ при $(\mu, \varepsilon) \to 0$.

Как отмечалось выше, проверка неравенств (11), (14), (26) сопряжена с определенного рода трудностями. Поэтому естественно условия теоремы 3 выразить неравенствами вида (21). Для этого будем предполагать, что фундаментальные матрицы решений $\Omega_0^t(P)$ и $\Omega_0^t(\partial a/\partial\varphi)$ соответствующих систем уравнений (19) удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered} \| \Omega_0^t(P) \| \leqslant \mathcal{L} e^{-\beta_0 t}, \quad t \in R^+ \\ \left\| \Omega_0^t \left(\frac{\partial a}{\partial \varphi} \right) \right\| \leqslant \mathcal{L}_1 e^{\alpha_0 |t|}, \quad t \in R = (-\infty, +\infty), \end{gathered} \tag{41}$$

где β_0 и α_0 — положительные постоянные.

Для выражения условий, обеспечивающих приводимость системы (30) к виду (39), через параметры β_0, α_0 воспользуемся следующим утверждением.

Лемма. *Пусть* $a \in C^1(\mathcal{T}_m)$ *и* $P \in C^1(\mathcal{T}_m)$ *и выполняются неравенства* (41). *Тогда*

$$\inf_{S \in \mathfrak{N}} \max_{\|h\|=1} \frac{\left\langle \left[S(\varphi) P(\varphi) + (1/2) \dfrac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} a(\varphi) \right] h, h \right\rangle}{\langle S(\varphi) h, h \rangle} \leqslant - \left[\beta_0 - \frac{\alpha_0}{2} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{L}^2} \right) \right].$$

Для доказательства леммы рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = [P(\psi_t(\varphi)) + (\beta_0 - \mu) E] x,$$

где $\mu > 0$. Его фундаментальная матрица решений $\Omega_0^t[P + (\beta_0 - \mu) E]$ удовлетворяет неравенству

$$\| \Omega_0^t [P + (\beta_0 - \mu) E] \| \leqslant \mathcal{L} e^{-\beta_0 t} e^{(\beta_0 - \mu) t} = \mathcal{L} e^{-\mu t}, \quad t \in R^+.$$

Пусть

$$S(\varphi) = \int_0^\infty (\Omega_0^\tau [P + (\beta_0 - \mu) E])^* \, \Omega_0^\tau [P + (\beta_0 - \mu) E] \, d\tau. \tag{42}$$

Тогда, как следует из подсчетов § 5 гл. III [2],

$$\dot{S}(\varphi) = -P^*(\varphi) S(\varphi) - S(\varphi) P(\varphi) - 2(\beta_0 - \mu) S(\varphi) - E,$$

где обозначено $\left.\frac{dS(\psi_t(\varphi))}{dt}\right|_{t=0} = \dot{S}(\varphi)$. Для матрицы $Y_\nu(t) = \partial\Omega_0^t(P)/\partial\varphi_\nu$ имеем оценку

$$\|Y_\nu(t)\| = \left\| \int_0^t \Omega_\tau^t(P) \frac{\partial P(\psi_\tau(\varphi))}{\partial\psi} \frac{\partial\psi_\tau(\varphi)}{\partial\varphi_\nu} \Omega_0^\tau(P) d\tau \right\| \leqslant (\mathscr{L}^2\mathscr{L}_1 K_1 m/\alpha_0) e^{-(\beta_0-\alpha_0)t}, \ t \in R^+,$$

в которой $\max\limits_{\varphi\in\mathscr{T}_m} \left\| \frac{\partial P(\varphi)}{\partial\varphi_j} \right\| \leqslant \mathscr{K}_1$. С учетом этой оценки получаем, что

$$\left\| \frac{\partial}{\partial\varphi_\nu} \{(\Omega_0^t(P + (\beta_0 - \mu)E))^* \Omega_0^t[P + (\beta_0 - \mu)E]\} \right\| \leqslant (2\mathscr{L}^3\mathscr{L}_1 k_1 m/\alpha_0) \times \times \exp(\alpha_0 - 2\mu)t, \quad t \in R^+. \tag{43}$$

Выбирая μ из условия выполнения неравенства

$$\alpha_0 < 2\mu, \tag{44}$$

убеждаемся, что интеграл

$$I_\nu = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\varphi_\nu} \{(\Omega_0^\tau[P + (\beta_0 - \mu)E])^* \Omega_0^\tau(P + (\beta_0 - \mu)E)\} d\tau$$

мажорируется сходящимся

$$\|I_\nu\| \leqslant 2\mathscr{L}^3\mathscr{L}_1 k_1 m/\alpha_0(2\mu - \alpha_0).$$

Этого достаточно для принадлежности матрицы $S(\varphi)$ пространству $C^1(\mathscr{T}_m)$.

Тогда

$$\dot{S}(\varphi) = \frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi} a(\varphi),$$

следовательно,

$$\max_{\|h\|=1} \frac{\left\langle \left[S(\varphi)P(\varphi) + (1/2)\frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi} a(\varphi)\right] h, h \right\rangle}{\langle S(\varphi)h, h\rangle} = -\left[\beta_0 - \mu + \frac{1}{2\max\limits_{\|h\|=1}\langle S(\varphi)h, h\rangle}\right]. \tag{45}$$

Имеем далее

$$\max_{\|h\|=1} \langle S(\varphi)h, h\rangle = \int_0^\infty \max_{\|h\|=1} \langle \Omega_0^\tau(P + (\beta_0 - \mu)E)h, \Omega_0^\tau(P + (\beta_0 - \mu)E) d\tau \leqslant \leqslant \mathscr{L}^2 \int_0^\infty e^{-2\mu\tau} d\tau = \frac{\mathscr{L}^2}{2\mu},$$

откуда ввиду соотношения (45) получаем оценку

$$\max_{\|h\|=1} \frac{\left\langle \left[S(\varphi)P(\varphi) + (1/2)\frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi} a(\varphi)\right] h, h \right\rangle}{\langle S(\varphi)h, h\rangle} \leqslant -\left[\beta_0 - \mu\left(1 - \frac{1}{\mathscr{L}^2}\right)\right].$$

Устремив в последнем неравенстве μ к $\alpha_0/2$ получаем

$$\inf_{S\in\mathfrak{N}} \max_{\|h\|=1} \frac{\left\langle \left[\dot{S}(\varphi)P(\varphi) + (1/2)\frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi} a(\varphi)\right] h, h \right\rangle}{\langle S(\varphi)h, h\rangle} \leqslant -\left[\beta_0 - \frac{\alpha_0}{2}\left(1 - \frac{1}{\mathscr{L}^2}\right)\right].$$

Положительная определенность матрицы (42) доказана в § 5 гл. III [2].

Согласно приведенной выше лемме роль функции $\beta(\varphi)$ в неравенствах (27) и (34) может играть постоянная $\beta_0 - \frac{\alpha_0}{2}\left(1 - \frac{1}{\mathscr{L}^2}\right)$. Очевидно также, что величины $\alpha_1(\varphi)$ и $\alpha(\varphi)$ в этих неравенствах можно заменить постоянной α_0. Таким образом, для справедливости утверждений теоремы 3 следует потребовать выполнения неравенств

$$\beta_0 - \frac{\alpha_0}{2}(1 - 1/\mathscr{L}^2) - l\alpha_0 > 0 \text{ при } s - 1 \geqslant l \geqslant 1,$$

$$\beta_0 - \frac{\alpha_0}{2}(1 - 1/\mathscr{L}^2) - p\alpha_0 > 0 \text{ при } s - 1 \geqslant p \geqslant 3.$$

Для выполнения обоих неравенств достаточно положить $l = p$ и потребовать, чтобы

$$(\beta_0/\alpha_0) > p + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\mathscr{L}^2}\right) \tag{46}$$

для целого $s - 1 > p \geqslant 3$.

Следствие. *Пусть выполняются условия гладкости, приведенные в теореме 3. Тогда если выполняются неравенства* (41) *с постоянными, удовлетворяющими условию* (46), *то замена переменных* (38) *с матрицей* $\Psi(t, z, \varepsilon) \in C^{p-3}_{\mathrm{Lip}}(\mathscr{T}_m \times \mathcal{K}_p)$ *для любого* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ *приводит систему уравнений* (30) *к виду* (39).

Как и в случае теоремы 1, теорему 3 можно перефразировать в виде утверждения, относящегося к системе уравнений (2.1) и ее инвариантности тора $M(\varepsilon)$:

$$x = f(\varphi) + u(\varphi, \varepsilon), \quad \varphi \in \mathscr{T}_m, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Отсюда без труда выводится «принцип сведения» в вопросе устойчивости решений системы (4), начинающихся на $M(\varepsilon)$, состоящий в том, что устойчивость или асимптотическая устойчивость этих решений определяется их устойчивостью или асимптотической устойчивостью на $M(\varepsilon)$.

1. *Самойленко А. М.* Исследование динамической системы в окрестности квазипериодической траектории.— Киев, 1990.— 43 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.35).
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний.— М. : Наука, 1987.— 303 с.

Получено 21.11.90

УДК 519.21

С. А. СОЛНЦЕВ, канд. физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т)

Об эквивалентности скалярной и операторной нормировок в усиленном законе больших чисел

Показано, что сходимость к нулю почти наверное (п. н.) матрично-нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов с конечным вторым моментом норм эквивалентна сходимости к нулю п. н. указанных сумм, нормированных нормами этих матриц. Как следствие выводится критерий интегрального типа для усиленного закона больших чисел.

Показано, що збіжність до нуля майже напевно (м. н.) матрично-нормованих сум незалежних однаково розподіленних випадкових векторів з фінітним другим моментом еквівалентна збіжності м. н. вказаних сум, нормованих нормами цих матриць. Як наслідок виводиться критерій інтегрального типу для посиленного закону великих чисел.