УДК 517.946

Е. А. КАЛИТА, канд. физ.-мат. наук. (Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, Донецк)

Теорема Лиувилля для эллиптических систем типа Кордеса высокого порядка

В евклидовом пространстве рассматривается квазилинейная эллиптическая система, имеющая структуру Дуглиса — Ниренберга. Вводится условие кордесовости системы, при выполнении которого устанавливается теорема Лиувилля: если скорость роста обобщенного решения системы на бесконечности меньше предельной скорости, зависящей от показателей кордесовости, то это решение — полином определенной степени.

В евклідовому просторі розглядається квазілінійна еліптична система, яка має структуру Дугліса — Ніренберга. Введена умова кордесовості системи, при виконанні якої встановлюється теорема Ліувіля: якщо швидкість зростання узагальненого розв'язку системи на нескінченності меньше граничної швидкості, яка залежить від показників кордесовості, то цей розв'язок — поліном визначеного степеня.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, рассматривается эллиптическая система

$$L^i u \equiv \sum_{|\alpha|=t_i} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A^i_\alpha (x, \delta^s u) = 0, \qquad i = \overline{1, N}, \tag{1}$$

$\delta^s u = \{D^k u^i : k \leqslant s_i,\ i = \overline{1, N}\}$, $D^k u = \{D^\alpha u : |\alpha| = k\}$, $s_i + t_i = 2m_i$, $s_i \geqslant t_i$. Пусть коэффициенты системы измеримы и при некоторых $K_i < 1$, $\varkappa^i > 0$ удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|=t_i} \Big| \sum_{|\beta|=\frac{s_i-t_i}{2}} \xi^i_{\alpha+2\beta} - \varkappa^i A^i_\alpha (x, \xi) \Big|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{N} K_i |\xi^i_s|^2, \tag{2}$$

где

$$|\xi^i_s|^2 = \sum_{|\alpha|=s_i} |\xi^i_\alpha|^2.$$

Для простоты изложения (чтобы не вводить полиномиальные коэффициенты) мультииндексы считаем упорядоченными, т. е. $\alpha = (j_1, \ldots, j_{|\alpha|})$, $j_k \in \{1, \ldots, n\}$. При этом $\sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha u|^2$ следует понимать как $\sum_{j_1=1}^{n} \ldots \sum_{j_s=1}^{n} |D_{j_1} \ldots D_{j_s} u|^2$. Назовем (2) условием кордесовости, а константы K_i — показателями кордесовости. Это условие характеризует близость системы (1) к оператору Лапласа. А именно: для пробной финитной функции v

$$\sum_{i=1}^{N} ((-1)^{t_i} \Delta^{m_i} u^i - \varkappa^i L^i u, v^i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int \sum_{|\alpha|=t_i} (D^\alpha \Delta^{m_i - t_i} u^i - \varkappa^i A^i_\alpha (x, \delta^s u)) D^\alpha v^i dx,$$

и, далее, по неравенству Коши и условию (2)

$$\Big| \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|=t_i} (D^\alpha \Delta^{m_i - t_i} u^i - \varkappa^i A^i_\alpha) D^\alpha v^i \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|=t_i} \Big| \sum_{|\beta|=\frac{s_i-t_i}{2}} D^{\alpha+2\beta} u^i - \varkappa^i A^i_\alpha \Big|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|=t_i} |D^\alpha v^i|^2 \Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} K_i |D^{s_i} u^i|^2 \Big)^{1/2} |D^t v|.$$

Для дивергентных систем ($s_i = t_i = m_i$, $i = \overline{1, N}$) условие (2) эквивалентно условиям

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m_i} A^i_\alpha (x, \xi) \xi^i_\alpha \geqslant \mu \sum_{i=1}^{N} |\xi^i_m|^2,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m_i} |A^i_\alpha (x, \xi)|^2 \leqslant \nu^2 \sum_{i=1}^{N} |\xi^i_m|^2.$$

Действительно, при $s_i = t_i$ в (2) имеем (векторные индексы опускаем для краткости)

$$\sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha - \varkappa A_\alpha|^2 = \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^2 - 2\varkappa \sum_{|\alpha|=m} \xi_\alpha A_\alpha + \varkappa^2 \sum_{|\alpha|=m} |A_\alpha|^2 \leqslant$$

$$\leqslant (1 - 2\varkappa\mu + \varkappa^2 \nu^2) |\xi_m|^2,$$

и при $\varkappa^i = \mu/\nu^2$ получаем $K_i \leqslant 1 - \mu^2/\nu^2 < 1$. Обратно, из (2) следует

$$2\varkappa \sum_{|\alpha|=m} \xi_\alpha A_\alpha \geqslant (1-K)\,|\xi_m|^2 + \varkappa^2 \sum_{|\alpha|=m} |A_\alpha|^2,$$

откуда $\mu \geqslant \min_i (1-K_i)/2\max_i \varkappa^i$. Выполнение второго условия очевидно. Для «квазилинейного» уравнения

$$\sum_{|\alpha|=2m} A_\alpha (x, \delta^{2m} u)\, D^\alpha u = 0$$

с ограниченными коэффициентами наименьшее значение показателя кордесовости (при различных $\varkappa$)

$$K = n^m - \inf_{x,\xi} \frac{\left(\sum_{|\alpha|=m} A_{2\alpha}(x, \xi)\right)^2}{\sum_{|\alpha|=2m} A_\alpha (x, \xi)^2},$$

в частности, для уравнения второго порядка условие $K < 1$ соответствует условию Кордеса [1].

Классическая теорема Лиувилля для гармонических функций обобщалась в различных направлениях многими авторами (см., например, [2 — 4]). В данной статье устанавливается теорема Лиувилля для обобщенных решений системы (1) $u \in \prod_{i=1}^{N} W_{2,\mathrm{loc}}^{s_i}(\mathbb{R}^n)$, причем результат существенно зависит от показателей кордесовости. Используемая техника близка к применяемой в [4, 5].

Определим при $-n < a \leqslant 0$ функцию

$$M_n^{st}(a) = \begin{cases} M(a)^{s/2} M(-a)^{t/2}, & s,\ t \text{ четные}, \\ M_1(a)\, M(a)^{\frac{s-1}{2}} M(-a)^{\frac{t-1}{2}}, & s,\ t \text{ нечетные}, \end{cases}$$

$$M_1(a) = \begin{cases} 1 + \dfrac{4a^2}{n^2-a^2}, & 2-n \leqslant a \leqslant 0, \\ 1 + 16a^2 \dfrac{n-1}{(n^2-a^2)^2}, & -n < a \leqslant 2-n, \end{cases}$$

$$M(a) = \begin{cases} 1 + 4a \dfrac{n-1}{(n-a)^2}, & 0 \leqslant a < n, \\ 1, \ 3-n \leqslant a \leqslant 0, & \\ 1 + \max\limits_{k=2,3,\ldots} Q(\lambda_k), & -n < a \leqslant \min(3-n, 0), \end{cases}$$

$$Q(\lambda) = a \frac{\lambda (a+n-3) + (n-1)\left(\dfrac{a+n-4}{2}\right)^2}{\left(\lambda + \dfrac{(n-2)^2-(a-2)^2}{4}\right)^2}, \quad \lambda_k = k(k+n-2).$$

Отметим, что при $-n < a \leqslant 2-n$ максимум достигается при $k=2$. Функция M_n^{st} непрерывна и убывает на $(-n, 0)$, $M_n^{st}(0) = 1$, $M_n^{st}(-n) = \infty$. Поэтому уравнение $K_i M_n^{t_i t_i'}(a) = 1$ однозначно разрешимо на интервале $-n \leqslant a < 0$ (при $t_i = 0$, $n > 3$ — на интервале $-n \leqslant a < 3-n$). Обозначим его корень через a_i, $a_* = \max_i a_i$. Для произвольной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим $B_R = \{x : r < R\}$, $r = |x - x_0|$.

Теорема. *Пусть при некотором* $a > a_*$, $\sigma > 1$, *некотором полиноме* $P = (P^1, \dots, P^N)$, $\deg P^i < s_i$, *выполнено условие*

$$\varliminf_{R \to \infty} \sum_{i=1}^{N} R^{a-2s_i} \int_{B_{\sigma R} \setminus B_R} |u^i - P^i|^2 \, dx < \infty. \tag{3}$$

Тогда u — *полином*, $\deg u^i < s_i$.

Введем пространство $L_{2,a}(\Omega)$ с нормой

$$\| u \|_{a,\Omega} = \Big(\int_\Omega |u|^2 r^a dx \Big)^{1/2}.$$

При $a = 0$ или $\Omega = B_R$ соответствующий индекс опускаем. Через c будем обозначать различные несущественные константы. Обозначим $D^t u D^t v = \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha| = t_i} D^\alpha u^i D^\alpha v^i$, $|D^s u|^2 = D^s u D^s u$.

Лемма 1. *При* $a > a_*$ *справедливо неравенство*

$$\| D^s u \|_a \leqslant c R^{a/2} \| D^s u \|, \tag{4}$$

где c *не зависит от* u, R, x_0.

Доказательство. Утверждение леммы достаточно проверить для плотного в $\mathbb{R}^n$ множества точек x_0. Из теоремы Лебега о существовании производной по мере следует, что для почти всех x_0 $\|D^s u\|_a < \infty$ при всех $a > -n$. Выберем какую-нибудь из таких точек x_0. Интегральное тождество для системы (1) запишем в виде

$$\int_{B_R} D^t \Delta^{\frac{s-t}{2}} u D^t v dx = \int_{B_R} \Big(D^t \Delta^{\frac{s-t}{2}} u D^t v - \sum_{|\alpha| = t} \varkappa A_\alpha (x, \delta^s u) D^\alpha v \Big) dx,$$

где v — финитная в B_R функция такая, что $\| D^t v \|_{-a} < \infty$, векторные индексы для краткости опущены. По неравенству Коши и условию (2) находим

$$\int_{B_R} D^t \Delta^{\frac{s-t}{2}} u D^t v dx \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{N} K_i \| D^{s_i} u^i \|_a^2 \Big)^{1/2} \| D^t v \|_{-a}^2. \tag{5}$$

В это неравенство входят только производные u порядка s, поэтому можем считать

$$\int_{B_R \setminus B_{R/2}} D^\alpha u dx = 0, \quad |\alpha| < s,$$

поскольку вместо u можно подставить $u - P_u$, где полином P_u определен условиями

$$\int_{B_R \setminus B_{R/2}} D^\alpha (u - P_u) \, dx = 0, \ |\alpha| < s,$$

$$\deg P_u < s.$$

Тогда для u справедливо неравенство Пуанкаре

$$R^{-k} \| D^{s-k} u \|_{B_R \setminus B_{R/2}} \leqslant c \| D^s u \|_{B_R \setminus B_{R/2}}, \qquad 0 < k \leqslant s.$$

Вводя срезающую функцию $\varphi(x) = \psi\Big(2 \dfrac{r}{R} - 1\Big)$, $\psi(y) = \begin{cases} 1, & y < 0, \\ 0, & y > 1, \end{cases}$ $\psi \in C^\infty$, имеем

$$\| D^s u \|_a \leqslant \| D^s u \varphi \|_a + c \sum_{k=0}^{s} R^{a/2-k} \| D^{s-k} u \|_{B_R \setminus B_{R/2}} \leqslant$$
$$\leqslant \| D^s u \varphi \|_a + c R^{a/2} \| D^s u \|.$$

Обозначим

$$I_i = \begin{cases} \| \Delta^{s_i/2} u^i \varphi \|_a, & s_i \text{ четное}, \\ \| D\Delta^{\frac{s_i-1}{2}} u^i \varphi \|_a, & s_i \text{ нечетное}, \end{cases}$$

$$J_i = R^{a/2} \| D^{s_i} u^i \|.$$

Пусть s_i, t_i четные. Положим

$$v_0 = \Delta^{-t_i/2} (r^a \Delta^{s_i/2} (u^i \varphi)),$$

$$v^i = (v_0 - P_v) \varphi M^{-t_i/2} (-a),$$

где $\Delta^{-t/2}$ — интегральный оператор с символом $(-1)^{t/2} |\xi|^{-t}$, P_v — полином, определяемый условиями

$$\int\limits_{B_R \setminus B_{R/2}} D^\alpha (v_0 - P_v)\, dx = 0, \quad |\alpha| < t_i,$$

$$\deg P_v < t_i.$$

Имеем $\| D^{t_i} v^i \|_{-a} < \infty$, поскольку оператор $D^t \Delta^{-t/2}$ ограничен в $L_{2,a}$, $|a| < n$, как композиция проекторов Рисса [6]. Выбирая a' так, чтобы $-a < a' < n$, $2a + a' < 0$, получаем

$$R^{-a/2} \| D^{t_i} v_0 \|_{B_R \setminus B_{R/2}} \leqslant cR^{\frac{a+a'}{2}} \| D^{t_i} v_0 \|_{a'} \leqslant cR^{-\frac{a+a'}{2}} \| \Delta^{s_i/2} u^i \varphi \|_{2a+a'} \leqslant$$

$$\leqslant c I_i^{\frac{2a+a'}{a}} (R^{a/2} \| \Delta^{s_i/2} u^i \varphi \|)^{-\frac{a+a'}{a}} \leqslant \varepsilon I_i + c_\varepsilon J_i$$

с произвольно малым $\varepsilon > 0$. Поскольку

$$M(a) = \sup_{u \in \overset{\circ}{C}{}^\infty} \frac{\| D^2 u \|_a^2}{\| \Delta u \|_a^2}$$

(см. [1] при $-n < a < 0$, [5] при $0 < a < n$), в (3) имеем

$$\| D^{s_i} u^i \|_a^2 \leqslant (M^{s_i/2}(a) + \varepsilon) I_i^2 + c_\varepsilon J_i^2,$$

$$\| D^{t_i} v^i \|_{-a}^2 \leqslant M^{-t_i}(-a) (M^{t_i/4}(-a) I_i + cR^{-a/2} \| D^{t_i} v_0 \|_{B_R \setminus B_{R/2}})^2 \leqslant$$

$$\leqslant (M^{-t_i/2}(-a) + \varepsilon) I_i^2 + c_\varepsilon J_i^2, \tag{6}$$

$$\int\limits_{B_R} D^{t_i} \Delta^{\frac{s_i - t_i}{2}} u^i D^{t_i} v^i dx = \int\limits_{B_R} \Delta^{s_i/2} u^i \Delta^{t_i/2} v^i dx \geqslant (M^{-t_i/2}(-a) - \varepsilon) I_i^2 - c_\varepsilon J_i^2.$$

Пусть s_i, t_i нечетные. Разложим функцию $z = \Delta^{\frac{s_i-1}{2}} u^i \varphi$ по полной ортонормированной системе сферических функций $\{Y_j\}$:

$$z(x) = \sum_{j=0}^{\infty} z_j(r) Y_j(\theta)$$

и определим функцию w коэффициентами разложения

$$w_0(r) = \int\limits_R^r z_0'(\tau) \tau^a d\tau,$$

$$w_j(r) = r^a z_j(r), \qquad j \geqslant 1.$$

Тогда аналогично [4, с. 73; 7] имеем

$$\| Dz \|_a \| Dw \|_{-a} \leqslant M_1^{1/2}(a) \int\limits_{\dot B_R} DzDwdx,$$

$$\| Dz \|_{2a+a'} \leqslant \| Dw \|_{a'} \leqslant c \| Dz \|_{2a+a'}, \quad a' \geqslant -a.$$

Положим

$$v_0 = \Delta^{-\frac{t_i-1}{2}} w,$$

$$v^i = (v_0 - P_v)\, \varphi M^{-\frac{t_i-1}{2}}(-a)\, M_1^{-1/2}(a)\, I_i \| Dw \|_{-a},$$

где полином P_v определен условиями

$$\int\limits_{B_R \setminus B_{R/2}} D^\alpha (v_0 - P_v)\, dx = 0, \qquad |\alpha| < t_i - 1,$$

$$\deg P_v < t_i - 1.$$

Так же, как при четных s_i, t_i в (3) имеем

$$\| D^{s_i} u^i \|_a^2 \leqslant (M^{\frac{s_i-1}{2}}(a) + \varepsilon)\, I_i^2 + c_\varepsilon J_i^2,$$

$$\| D_i^t v^i \|_{-a}^2 \leqslant M^{\frac{t_i-1}{2}}(-a) \| D\Delta^{\frac{t_i-1}{2}} v^i \|_{-a}^2 \leqslant$$

$$\leqslant (M_1^{-1}(a)\, M^{-\frac{t_i-1}{2}}(-a) + \varepsilon)\, I_i^2 + c_\varepsilon I_i^2, \tag{7}$$

$$\int\limits_{\dot B_R} D^{t_i} \Delta^{\frac{s_i-t_i}{2}} u^i D^{t_i} v^i dx = \int\limits_{\dot B_R} D\Delta^{\frac{s_i-1}{2}} u^i D\Delta^{\frac{t_i-1}{2}} v^i dx \geqslant$$

$$\geqslant (M_1^{-1}(a)\, M^{-\frac{t_i-1}{2}}(-a) - \varepsilon)\, I_i^2 - c_\varepsilon J_i^2.$$

При $a > a_*$ $K_i M_n^{s_i t_i}(a) < 1$, поэтому при достаточно малом $\varepsilon > 0$ из (5)—(7) находим

$$\sum_{i=1}^N I_i^2 \leqslant c \sum_{i=1}^N J_i^2.$$

Учитывая первые из неравенств (6), (7), приходим к оценке (4).

Лемма 2. *Пусть* $\sigma > 1$, $P = (P^1, \ldots, P^N)$ — *полином*, $\deg P^i < s_i$. *Тогда*

$$\| D^s u \|_{B_R} \leqslant c \sum_{i=1}^N R^{-s_i} \| u^i - P^i \|_{B_{\sigma R} \setminus B_R}, \tag{8}$$

где c *не зависит от* u, P, R, x_0.

Доказательство. Для $q \in (0, 1)$ обозначим $R_0 = R$, $R_{j+1} = R_j + R(\sigma - 1)(1 - q)\, q^j$, $B_j = B_{R_j}$, $F_j = B_j \setminus B_{j-1}$, $I_j = \| D^s u \|_{B_j}$. Тогда $R_j \to R_\infty = \sigma R$ при $j \to \infty$. В неравенстве (5) положим $a = 0$, $v = \Delta^{\frac{s-t}{2}}(u - P)\varphi$, где $\varphi(x) = \psi\left(\frac{r - R_{j-1}}{R_j - R_{j-1}}\right)$. Интегрируя по частям, находим

$$\int\limits_{\dot B_j} D^s u D^s (u - P)\, \varphi dx \leqslant K I_j \| D^s (u - P)\, \varphi \|_{B_j},$$

где $K = \max_i K_i^{1/2} < 1$. По неравенству Коши получаем

$$I_{j-1}^2 \leqslant K I_j \Big(I_j + c \sum_{k=0}^{s} (R_j - R_{j-1})^{-k} \| D^{s-k} (u - P) \|_{F_j} \Big).$$

По интерполяционному неравенству Ниренберга — Гальярдо для нетолстого шарового слоя ($R_j/R_{j-1} \leqslant \mathrm{const}$)

$$(R_j - R_{j-1})^{-k} \| D^{s-k} (u - P) \|_{F_j} \leqslant c \| D^s u \|_{F_j} + c (R_j - R_{j-1})^{-s} \| u - P \|_{F_j}$$

и, следовательно,

$$I_{j-1}^2 \leqslant K I_j (I_j + c \| D^s u \|_{F_j} + c (R (1 - q) q^j)^{-s} \| u - P \|_{F_j}).$$

Поскольку $K < 1$, отсюда вытекает

$$I_{j-1} \leqslant K_0 I_j + c (R (1 - q) q^j)^{-s} \| u - P \|_{F_j}$$

с некоторым $K_0 < 1$. Выбирая q так, чтобы $q^{s_i} > K_0$, $i = \overline{1, N}$, находим

$$I_0 \leqslant \lim_{j \to \infty} K_0^j I_j + c R^{-s} \sum_{j=0}^{\infty} (K_0 q^{-s})^j \| u - P \|_{F_j} \leqslant$$

$$\leqslant c R^{-s} \| u - P \|_{B_\infty \setminus B_0}.$$

Доказательство теоремы. Выбирая a' так, чтобы $a_* < a' < a$, из (4), (8) имеем

$$\| D^s u \|_{a', B_R} \leqslant c R^{\frac{a' - a}{2}} \sum_{i=1}^{N} R^{\frac{a}{2} - s_i} \| u^i - P^i \|_{B_{\sigma R} \setminus B_R}.$$

Поскольку левая часть неравенства не убывает по R, $R^{\frac{a'-a}{2}} \to 0$ при $R \to \infty$, из (3) получаем $\| D^s u \|_{a', R^n} = 0$, т. е. $D^s u \equiv 0$.

Рассмотрим ограниченное решение системы (1). В этом случае условие (3) выполнено при $a < 2s - n$, $s = \min_i s_i$. Поэтому при $a_* < 2s - n$ получаем следствие.

Следствие. *Пусть или* $2s \geqslant n$, *или*

$$K_i M_n^{s_i t_i} (2s - n) < 1, \quad i = \overline{1, N}.$$

Тогда всякое ограниченное решение системы (1) — *константа.*

При $s_i = t_i = 1$, $i = \overline{1, N}$, этот результат получен в [4, с. 123].

1. *Cordes H. O.* Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen // Math. Ann.— 1956.— **131**.— N 3.— P. 278—312.
2. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов.— М. : Наука, 1971.— 288 с.
3. *Нечас И., Олейник О. А.* Теоремы Лиувилля для эллиптических систем // Докл. АН СССР.— 1980.— **252**, № 6.— С. 1312—1316.
4. *Кошелев А. И.* Регулярность решений эллиптических уравнений и систем.— М. : Наука, 1986.— 240 с.
5. *Челкак С. И.* Регулярность решений квазилинейных эллиптических систем высокого порядка // Изв. вузов. Математика.— 1984.— № 1.— С. 33—41.
6. *Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П.* Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Итоги науки и техники. Мат. анализ.— 1983.— **21**.— С. 42—129.
7. *Калита Е. А.* Регулярность решений эллиптических систем второго порядка // Изв. вузов. Математика.— 1989.— № 11.— С. 37—46.

Получено 30.01.90