УДК 519.21

В. В. БУЛДЫГИН, д-р физ.-мат. наук (Киев, политехн. ин-т),
В. В. ЗАЯЦ, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Асимптотические свойства корреляционных оценок в функциональных пространствах. I

Построена оценка корреляционной функции однородного гауссовского случайного поля в схеме серий по многим выборкам. Установлены точечные свойства рассматриваемой оценки. Доказана сильная состоятельность и асимптотическая нормальность оценки в гильбертовых пространствах функций, интегрируемых с квадратом на R^m с некоторым весом.

Побудовано оцінку кореляційної функції однорідного гауссівського випадкового поля в схемі серій за багатьма вибірками. Встановлені точкові властивості розглядуваної оцінки. Доведено сильну обгрунтованість та асимптотичну нормальність оцінки в гільбертових просторах функцій, інтегровних з квадратом на R^m з деякою вагою.

Введение. Пусть $y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m)})$ - точка действительного евклидова пространства R^m размерности $m \geqslant 1$,

$$\langle y, z\rangle = \sum_{k=1}^{m} y^{(k)} z^{(k)}, \qquad \| y \| = \langle y, y\rangle^{1/2},$$

$\mathscr{B}^m$ — σ-алгебра борелевских подмножеств R^m, $\mathscr{B}_b^m$ — алгебра ограниченных борелевских подмножеств R^m. Пусть на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ задано непрерывное в среднем квадратическом (с. к.) однородное гауссовское случайное поле $X = (X(t), t \in R^m)$ такое, что $EX(t) \equiv 0$, $EX^2(t) \equiv \sigma^2 > 0$, $t \in R^m$. Поле X в дальнейшем считаем измеримым и сепарабельным. Обозначим $B(h) = EX(t)X(t+h)$, $h \in R^m$, неизвестную корреляционную функцию (к. ф.) поля и поставим задачу: оценить функцию B по набору $\{X_k(t), t \in R^m\}$, $k = 1, 2, \dots$, независимых копий поля X. Для этого рассмотрим оценку

$$\widehat{B}_n(h) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\operatorname{mes}(\Delta_n)} \int_{\Delta_n} X_k(t) X_k(t+h)\, dt, \quad h \in R^m, \tag{1}$$

где $\operatorname{mes}(\Delta)$ обозначает лебегову меру множества Δ, $\Delta_n \supseteq \Delta_1$, $n = 1, 2, \dots$, $\operatorname{mes}(\Delta_1) > 0$. Поля $\widehat{B}_n(h)$, $h \in R^m$, $n = 1, 2, \dots$, являются с. к.-непрерывными. В случае, когда множества Δ_n расширяются с ростом n, оценку (1) будем называть оценкой к. ф. в схеме серий по многим выборкам. До настоящего времени свойства оценок к. ф. исследовались, как правило, лишь в пространствах функций на компактных подмножествах R^m (см., например, [1–5]). Нашей целью будет исследование асимптотических свойств статистики $\widehat{B}_n$ в пространствах функций, заданных на всем параметрическом множестве R^m.

В настоящей статье даны доказательства теорем, анонсированных в [6]. Результаты работы [6] расширены и дополнены.

Вспомогательные определения. Обозначим $R_+^m = \{y \in R^m : y^{(k)} \geqslant 0, \quad k = \overline{1, m}\}$. Для любого $\Delta \subseteq R^m$ положим $r(y, \Delta) = \inf\{\| y - z\| : z \in \Delta\}$, $y \in R^m$, $\Delta_\varepsilon = \{y \in R^m : r(y, \Delta) < \varepsilon\}$, $\Delta_{-\varepsilon} = R^m \setminus (R^m \setminus \Delta)_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Кроме того, для $z \in R^m$, $A, B \subseteq R^m$ введем обозначения

$$A - z = \{y - z : y \in A\}, \quad A - B = \{y - z : y \in A, \ z \in B\}.$$

Пусть в R^m выделена частично упорядоченная направленная вверх система ограниченных измеримых множеств $\mathfrak{M} = \{\Delta\}$ с некоторым отношением порядка $\leqslant$.

Определение. *Множества $\Lambda \in \mathfrak{M}$ стремятся к бесконечности по Ван Хову* ($\Lambda \xrightarrow{\text{v.H.}} \infty$), *если* 1) *для любого натурального M найдется $\Lambda(M) \in \mathfrak{M}$ такое, что для всех* $\Lambda \geqslant \Lambda(\mu) : \mathrm{mes}(\Lambda) \geqslant M$; 2) *для всякого $\mu > 0$ найдется $\Delta(\mu) \in \mathfrak{M}$ такое, что для всех* $\Delta \geqslant \Delta(\mu) : \mathrm{mes}(\Delta_\varepsilon \setminus \Delta_{-\varepsilon})/\mathrm{mes}(\Delta) \leqslant \mu$.

Условие $\Lambda \xrightarrow{\text{v.H.}} \infty$ означает, что множества Λ расширяются одновременно во всех направлениях. Так, для системы параллелепипедов $\Pi(b) = \{y \in R^m : 0 \leqslant y^{(k)} \leqslant b^{(k)},\ k = \overline{1, m}\}$, где $b = (b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(m)}) \in R^m_+$, условие $\Pi(b) \xrightarrow{\text{v.H.}} \infty$ выполнено, если $\min\{b^{(k)},\ k = \overline{1, m}\} \to +\infty$.

Обозначим через $Q(R^m)$ множество функций $q : R^m \to [0, +\infty)$, удовлетворяющих таким условиям: функция q почти везде непрерывна на R^m относительно меры Лебега, $\mathrm{mes}\{u \in R^m : q(u) = 0\} = 0$, $\int_{R^m} q(u)\, du < +\infty$. Для $q \in Q(R^m)$ обозначим через $H(q)$ множество функций $\varphi : R^m \to R$, суммируемых с квадратом на R^m с весом $q : \int_{R^m} \varphi^2(u)\, q(u)\, du < +\infty$. Множество $H(q)$ относительно скалярного произведения

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{H(q)} = \int_{R^m} \varphi_1(u)\, \varphi_2(u)\, q(u)\, du$$

является сепарабельным гильбертовым пространством с нормой $\|\varphi\|_{H(q)} = \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2}_{H(q)}$. Пусть $q : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция. Обозначим $C_0(q; [0, +\infty))$ класс функций $\varphi : [0, +\infty) \to R$, удовлетворяющих условиям 1) φ непрерывна на $[0, +\infty)$; 2) $\lim_{u \to +\infty} q(u)\, \varphi(u) = 0$. Множество $C_0(q; [0, +\infty))$ с нормой $\|\varphi\|_{C_0(q)} = \sup_{u \geqslant 0} q(u) |\varphi(u)|$ является сепарабельным банаховым пространством.

Сформулируем теперь два необходимых в дальнейшем технических результата. Пусть $X(t)$, $t \in R^m$, — однородное гауссовское центрированное случайное поле с к. ф. $B(h)$, $h \in R^m$. Для любого набора $\{t_1, t_2, t_3, t_4, h_1, h_2, h_3, h_4\} \subseteq R^m$ положим $u_{2j-1} = t_j$, $u_{2j} = t_j + h_j$, $j = 1, 2, 3, 4$. Тогда [7]

$$E\left\{\prod_{j=1}^{4} [X(t_j)\, X(t_j + h_j) - B(h_j)]\right\} = \sum_{J} \prod_{\nu=1}^{4} B(u_{j_\nu} - u_{i_\nu}), \tag{2}$$

где сумма в правой части берется по множеству J всевозможных упорядоченных наборов чисел $(i_1, j_1, i_2, j_2, i_3, j_3, i_4, j_4)$, удовлетворяющих условиям 1) набор $(i_1, j_1, i_2, j_2, i_3, j_3, i_4, j_4)$ представляет собой перестановку чисел $1, 2, \ldots, 8$; 2) $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$, $i_\nu < j_\nu$, $\nu = 1, 2, 3, 4$; 3) если при некотором ν i_ν нечетно, то $j_\nu > i_\nu + 1$.

С помощью равенства (2) в случае $m = 1$ доказывается следующее соотношение. Пусть $X(t)$, $t \geqslant 0$, — стационарный гауссовский случайный процесс (с. п.), дифференцируемый в среднем квадратическом. Тогда для любого набора $\{t_1, t_2, t_3, t_4, h_1, h_2, h_3, h_4\} \subseteq R_+$ справедливо равенство

$$E\left\{\prod_{j=1}^{4} [X(t_j)\, X'(t_j + h_j) - B'(h_j)]\right\} = \sum_{J} \prod_{\nu=1}^{4} \alpha_\nu \widetilde{B}(u_{j_\nu} - u_{i_\nu}), \tag{3}$$

где u_j, $j = \overline{1, 8}$, и множество J такие же, как и раньше, $\widetilde{B}$ обозначает B'', B' или B. При этом порядок производной равен 2, 1, 0, если аргумент к. ф. содержит соответственно 2, 1, 0 переменных h_j, $j = \overline{1, 4}$, а сумма порядков производных в каждом слагаемом правой части соотношения (3) равна 4. Коэффициент α_ν равен -1, если j_ν нечетно, а i_ν четно, и $+1$ во всех остальных случаях.

Точечные свойства оценки $\hat{B}_n$.

Теорема 1. 1) *Оценка является несмещенной:* $E\hat{B}_n(h) = B(h)$, $h \in R^m$, $n = 1, 2, \ldots$. 2) *Дисперсия оценки* $\hat{B}_n$ *задается соотношением*

$$D\hat{B}_n(h) = \frac{1}{n \operatorname{mes}(\Delta_n)} \int_{R^m} [B^2(u) + B(u+h) B(u-h)] A_{\Delta_n}(u)\, du, \qquad (4)$$

где

$$A_\Lambda(u) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{mes}((\Lambda - u) \cap \Delta)}{\operatorname{mes}(\Delta)}, & u \in \Lambda - \Delta, \\ 0, & u \in R^m \setminus (\Lambda - \Lambda). \end{cases} \qquad (5)$$

При этом $\sup\limits_{n=1,2,\ldots} D\hat{B}_n(h) \leqslant 2\sigma^4/n$. 3) *Для любого* $h \in R^m$ $P\{\lim\limits_{n\to\infty} |\hat{B}_n(h) - B(h)| = 0\} = 1$, *т. е. оценка* $\hat{B}_n(h)$ *сильно состоятельна.*

Доказательство. 1) Несмещенность оценки $\hat{B}_n$ немедленно вытекает из соотношения (1) и теоремы Фубини — Тонелли. 2) Из определения оценки $\hat{B}_n$ имеем

$$D\hat{B}_n(h) = \frac{1}{n \operatorname{mes}^2(\Delta_n)} \int_{\Delta_n} \int_{\Delta_n} [B^2(s-t) + B(s-t+h) B(s-t-h)]\, dt ds.$$

Учитывая, что для любого $h \in R^m$

$$|B(h)| \leqslant B(0) = \sigma^2, \qquad (6)$$

получаем отсюда, что $D\hat{B}_n(h) \leqslant 2\sigma^4/n$, $n = 1, 2, \ldots$. Произведя в правой части соотношения (6) замену переменных, приходим к выражению (4). 3) В силу неравенства Чебышева — Маркова для любого $\varepsilon > 0$

$$P\{|\hat{B}_n(h) - B(h)| > \varepsilon\} \leqslant \varepsilon^{-4} E|\hat{B}_n(h) - B(h)|^4. \qquad (7)$$

Далее, из соотношения (2) получаем

$$E|\hat{B}_n(h) - B(h)|^4 = \frac{1}{n^4 \operatorname{mes}^4(\Delta_n)} \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=1}^{n} \int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n} E\left\{\prod_{j=1}^{4} [X_{k_j}(t_j) \times \right.$$

$$\left. \times X_{k_j}(t_j + h) - B(h)]\right\} dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 = A_1 + A_2,$$

где

$$A_1 = \frac{1}{n^4 \operatorname{mes}^4(\Delta_n)} \sum_{k=1}^{n} \int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n} E\left\{\prod_{j=1}^{4} (X_k(t_j) X_k(t_j + h) - B(h))\right\} \times$$

$$\times\, dt_1 dt_2 dt_3 dt_4,$$

$$A_2 = \frac{C_n^2}{n^4 \operatorname{mes}^4(\Delta_n)} \sum_{\substack{k_1,k_2=1 \\ k_1 \neq k_2}}^{n} \int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n} E\{[X_{k_1}(t_1) X_{k_1}(t_1 + h) - B(h)] \times$$

$$\times [X_{k_1}(t_2) X_{k_1}(t_2 + h) - B(h)]\} E\{[X_{k_2}(t_3) X_{k_2}(t_3 + h) - B(h)] \times$$

$$\times [X_{k_2}(t_4) X_{k_2}(t_4 + h) - B(h)]\}\, dt_1 dt_2 dt_3 dt_4.$$

Слагаемое A_1 с учетом соотношений (2) и (6) допускает оценку $|A_1| \leqslant 60\sigma^8/n^3$. В силу независимости копий $\{X_k(t),\ t \in R^m\}$, $k = \overline{1, n}$, и неравенства (6) для слагаемого A_2 получаем оценку $A_2 \leqslant 12\sigma^8/n^2$. Таким образом,

$$\sup_{h \in R^m} E|\hat{B}_n(h) - B(h)| \leqslant \frac{12\sigma^8}{n^2} + \frac{60\sigma^8}{n^3}, \qquad (8)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\{|\hat{B}_n(h) - B(h)| > \varepsilon\} \leqslant \frac{12\sigma^8}{\varepsilon^4} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3}\right) < +\infty.$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы.

Замечание. Отметим, что функция $A_\Delta(u)$, определенная соотношением (5), обладает следующими свойствами: 1) $0 \leqslant A_\Delta(u) \leqslant 1$; $u \in R^m$; 2) для любого $u \in R^m$: $A_\Delta(u) \to 1$ при $\Delta \xrightarrow{\text{v.H.}} \infty$.

Рассмотрим центрированные и нормированные поля

$$Y_n(h) = (n \operatorname{mes}(\Delta_n))^{1/2} (\hat{B}_n(h) - B(h)), \quad h \in R^m. \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть к. ф. B поля X интегрируема с квадратом по мере Лебега в R^m ($B \in L_2(R^m)$). Если множества Δ_n стремятся при $n \to +\infty$ к бесконечности по Ван Хову, то конечномерные распределения случайных полей $Y_n(h)$, $h \in R^m$, сходятся при $n \to +\infty$ к конечномерным распределениям центрированного гауссовского поля $Y(h)$, $h \in R^m$, с к. ф.*

$$\rho(h_1, h_2) = \int_{R^m} [B(u) B(u + h_2 - h_1) + B(u + h_2) B(u - h_1)]\, du =$$

$$= 2(2\pi)^m \int_{R^m} f^2(\lambda) \cos < \lambda, h_1 > \cos < \lambda, h_2 > d\lambda, \tag{10}$$

где $f(\lambda)$, $\lambda \in R^m$, — спектральная плотность поля X.

Доказательство. Зафиксируем произвольное натуральное p и выберем p попарно несовпадающих векторов $h_j \in R^m$, $j = \overline{1, p}$. Пусть $W_n = (Y_n(h_1), \ldots, Y_n(h_p))$ и $\alpha = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(p)}) \in R^p$ — произвольный ненулевой фиксированный вектор. Положим $\tilde{V}_n = \sum_{j=1}^{p} \alpha^{(j)} Y_n(h_j) = \langle \alpha, W_n \rangle$. Если обозначить

$$z_{nk}(h) = \int_{\Delta_n} (X_k(t) X_k(t + h) - B(h))\, dt, \quad k = \overline{1, n}, \; n = 1, 2, \ldots,$$

то

$$Y_n(h) = (n \operatorname{mes}(\Delta_n))^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} z_{nk}(h)$$

и $\tilde{V}_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{V}_{nk}$, где $\tilde{V}_{nk} = (n \operatorname{mes}(\Delta_n))^{-1/2} \sum_{j=1}^{p} \alpha^{(j)} z_{nk}(h_j)$.

При фиксированном n с. в. $\tilde{V}_{nk}$, $k = \overline{1, n}$, центрированы, независимы и имеют одинаковое распределение. При этом

$$D\tilde{V}_{n1} = \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^{n} \alpha^{(j)} \alpha^{(k)} \int_{R^m} [B(u) B(u + h_k - h_j) +$$

$$+ B(u + h_k) B(u - h_j)] A_{\Delta_n}(u)\, du,$$

где функция A_Δ задана соотношением (5). Обозначим

$$\rho_n(h_1, h_2) = \int_{R^m} [B(u) B(u + h_2 - h_1) + B(u + h_2) B(u - h_1)] \times$$

$$\times A_{\Delta_n}(u)\, du, \quad h_1, h_2 \in R^m. \tag{11}$$

Из условия $B \in L_2(R^m)$ и того факта, что $0 \leqslant A_\Delta(u) \leqslant 1$, $u \in R^m$ (см. п. 1 замечания к теореме 1) вытекает, что подынтегральная функция в правой части соотношения (11) при фиксированных $h_1, h_2 \in R^m$ абсолютно интегрируема на R^m по мере Лебега. Тогда в силу теоремы Лебега и п. 2 замечания к теореме 1 $\lim_{n\to+\infty} \rho_n(h_1, h_2) = \rho(h_1, h_2)$, $h_1, h_2 \in R^m$, где функция $\rho(h_1, h_2)$ задана соотношением (10). С учетом утверждения теоремы из работы [8]

$$D\widetilde{V}_n = \sum_{k=1}^{n} D\widetilde{V}_{nk} = \sum_{j,k=1}^{p} \alpha^{(j)}\alpha^{(k)}\rho_n(h_j, h_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{j,k=1}^{p} \alpha^{(j)}\alpha^{(k)}\rho(h_j, h_k) > 0. \tag{12}$$

Таким образом, если положить $V_{nk} = \widetilde{V}_{nk}(D\widetilde{V}_n)^{-1/2}$, $k = \overline{1, n}$, $n = 1, 2, \ldots$, то с. в. V_{nk}, $k = \overline{1, n}$, $n = 1, 2, \ldots$, образуют последовательность серий с. в., удовлетворяющих условиям

$$EV_{nk} = 0, \quad DV_{nk} < +\infty, \; k = \overline{1, n}, \; n = 1, 2, \ldots, \; \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} DV_{nk} = 1.$$

Убедимся в том, что $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} EV_{nk}^4 = 0$.

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n} EV_{nk}^4 = nEV_{n1}^4 = nE\widetilde{V}_{n1}^4/(DV_n)^2,$$

то в силу соотношения (12) достаточно проверить выполнение соотношения $\lim_{n\to+\infty} nE\widetilde{V}_{n1}^4 = 0$. Воспользовавшись равенством (2), получим

$$nE\widetilde{V}_{n1}^4 = \frac{1}{n} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4=1}^{p} \alpha^{(k_1)}\alpha^{(k_2)}\alpha^{(k_3)}\alpha^{(k_4)} \sum_{J} \frac{1}{\operatorname{mes}^2(\Delta_n)} \times$$

$$\times \int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n} \prod_{\nu=1}^{4} B(u_{j_\nu} - u_{i_\nu})\, dt_1 dt_2 dt_3 dt_4.$$

Каждое из слагаемых под знаком суммы содержит всякую из переменных интегрирования t_1, t_2, t_3, t_4 по два раза. Поэтому под знаком интеграла группируем четыре сомножителя по два таким образом, чтобы в аргументах каждой пары присутствовала общая переменная интегрирования, после чего применяем неравенство Коши — Буняковского по выделенным общим переменным интегрирования. Получаем

$$nEV_{n1}^4 \leqslant \frac{60}{n}\left(\int_{R^m} B^2(u)\,du\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{p} |\alpha^{(k)}|\right)^4 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Следовательно, в силу центральной предельной теоремы в форме Ляпунова для схемы серий независимых случайных величин [9, с. 169] для произвольного ненулевого вектора $\alpha \in R^p$ и произвольного набора попарно несовпадающих векторов $h_j \in R^p$, $j = \overline{1, p}$, с. в. $\tilde{V}_n/\sqrt{D\widetilde{V}_n}$ сходятся по распределению при $n \to +\infty$ к стандартной нормальной с. в. Это и означает, что конечномерные распределения полей $Y_n(h)$, $h \in R^m$, сходятся при $n \to +\infty$ к конечномерным распределениям некоторого гауссовского поля, которое обозначим $Y(h)$, $h \in R^m$. Центрированность предельного поля вытекает из центрированности полей Y_n, $n = 1, 2, \ldots$, и, как было показано в ходе доказательства, равна $\rho(h_1, h_2)$. Теорема доказана.

Свойства оценки $\hat{B}_n$ в пространствах $H(q)$. Обозначим $\hat{B}_n = (\hat{B}_n(h),\ h \in R^m)$, $n = 1, 2, \ldots$, $B = (B(h),\ h \in R^m)$. Поскольку к. ф. непрерывна и ограничена, то $B \in H(q)$ для любой $q \in Q(R^m)$.

Теорема 3. *Пусть* $X(t)$, $t \in R^m$, *— однородное с. к.-непрерывное гауссовское случайное поле,* $q \in Q(R^m)$. *Тогда для любого* $n = 1, 2, \ldots$ *поля* $\widehat{B}_n$ *являются с. э. пространства* $H(q)$ *и* $P\{\lim_{n\to+\infty} \|\widehat{B}_n - B\|_{H(q)} = 0\} = 1$, *т. е.* $\widehat{B}_n$ *сильно состоятельна в пространстве* $H(q)$.

Доказательство. Обозначим

$$j_* = \begin{cases} 1, & j = 1, 2, \\ 2, & j = 3, 4. \end{cases}$$

Тогда $E\|\widehat{B}_n - B\|^4_{H(q)} = A_1 + A_2 + A_3$, где

$$A_1 = \frac{1}{n^3 \operatorname{mes}^4(\Delta_n)} \int_{R^m}\int_{R^m} q(h_1)\, q(h_2) \times$$

$$\times \int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n} E\left\{\prod_{j=1}^{4} [X(t_j)\, X(t_j + h_{j_*}) - B(h_{j_*})]\right\} dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 dh_1 dh_2,$$

$$A_2 = \frac{2C_n^2}{n^4 \operatorname{mes}^4(\Delta_n)} \int_{R^m}\int_{R^m} q(h_1)\, q(h_2) \times$$

$$\times \int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n} E\{[X(t_1)(X(t_1 + h_1) - B(h_1)]\, [X(t_2)\, X(t_2 + h_1) - B(h_1)] \times$$

$$\times E\{[X(t_3)\, X(t_3 + h_2) - B(h_2)]\, [X(t_4)\, X(t_4 + h_2) - B(h_2)]\} \times$$

$$\times\, dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 dh_1 dh_2,$$

$$A_3 = \frac{4C_n^2}{n^4 \operatorname{mes}^4(\Delta_n)} \int_{R^m}\int_{R^m} q(h_1)\, q(h_2) \left[\int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n} E\{[X(t_1)\, X(t_1 + h_1) - B(h_1)] \times\right.$$

$$\left.\times\, [X(t_2)\, X(t_2 + h_2) - B(h_2)]\}\, dt_1 dt_2\right]^2 dh_1 dh_2.$$

Оценим каждое из слагаемых A_1, A_2, A_3. Для слагаемого A_1 с помощью соотношения (2) получаем

$$|A_1| \leqslant \frac{1}{n^3} \sum_J \int_{R^m}\int_{R^m} q(h_1)\, q(h_2)\, \frac{1}{\operatorname{mes}^4(\Delta_n)} \int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n} |B(u_{j_\nu} - u_{i_\nu})| \times$$

$$\times\, dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 dh_1 dh_2 \leqslant \frac{60\sigma^8}{n^3} \left(\int_{R^m} q(u)\, du\right)^2.$$

Слагаемые A_2 и A_3 оцениваются следующим образом:

$$|A_2| \leqslant \frac{n(n-1)}{n^4} \int_{R^m}\int_{R^m} q(h_1)\, q(h_2)\, \frac{1}{\operatorname{mes}^4(\Delta_n)} \int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n} (2\sigma^4)^2\, dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 \times$$

$$\times\, dh_1 dh_2 \leqslant \frac{4\sigma^8}{n^2} \left(\int_{R^m} q(u)\, du\right)^2,$$

$$|A_3| \leqslant \frac{2n(n-1)}{n^4} \int_{R^m}\int_{R^m} q(h_1)\, q(h_2) \left[\frac{1}{\operatorname{mes}^2(\Delta_n)} \int_{\Delta_n}\int_{\Delta_n} 2\sigma^4 dt_1 dt_2\right]^2 dh_1 dh_2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8\sigma^8}{n^2} \left(\int_{R^m} q(u)\, du\right)^2.$$

Следовательно,

$$E\|\widehat{B}_n - B\|^4_{H(q)} \leqslant 12\sigma^8 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3}\right) \left(\int_{R^m} q(u)\, du\right)^2. \tag{13}$$

Отсюда для любого $n = 1, 2, \dots$

$$E \| \hat{B}_n \|_{H(q)} \leqslant [E \| \hat{B}_n - B \|_{H(q)}]^{1/4} + \| B \|_{H(q)} < +\infty \tag{14}$$

и, принимая во внимание измеримость поля X и сепарабельность пространства $H(q)$, заключаем, что $\hat{B}$, $n = 1, 2, \dots$, являются с. э. пространства $H(q)$. На основании неравенства Чебышева — Маркова с учетом (13) имеем

$$P\{\| \hat{B}_n - B \|_{H(q)} > \varepsilon\} \leqslant \frac{12\sigma^8}{\varepsilon^4} \left(\int_{R^m} q(u)\, du \right)^2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3} \right).$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\{\| \hat{B}_n - B \|_{H(q)} > \varepsilon\} < +\infty,$$

откуда и вытекает утверждение теоремы. Теорема доказана.

Обозначим $Y_n = (Y_n(h),\ h \in R^m)$, $n = 1, 2, \dots$, $Y_n = (Y_n(h),\ h \in R^m)$. Если к. ф. $B \in L_2(R^m)$, то Y_n, $n = 1, 2, \dots$, и Y являются с. э. пространства $H(q)$, $q \in Q(R^m)$. Действительно, в этом случае из соотношений (10) и (11) вытекает, что для любых $h_1, h_2 \in R^m$ и любого $n = 1, 2, \dots$ $|\rho_n(h_1, h_2)| \leqslant d^2$, $|\rho(h_1, h_2)| \leqslant d^2$ где $d^2 = 2 \int_{R^m} B^2(u)\, du$. Соответственно

$$E \| Y_n \|^2_{H(q)} = \int_{R^m} q(u)\, \rho_n(u, u)\, du \leqslant d^2 \int_{R^m} q(u)\, du < +\infty,$$

$$E \| Y \|^2_{H(q)} = \int_{R^m} q(u)\, \rho(u, u)\, du \leqslant d^2 \int_{R^m} q(u)\, du < +\infty.$$

Измеримость отображений Y_n, $Y: \Omega \to H(q)$ следует из измеримости исходного и предельного полей и сепарабельности пространства $H(q)$.

Теорема 4. *Пусть $X(t)$, $t \in R^m$, — однородное с. к.-непрерывное гауссовское поле с к. ф. $B \in L_2(R^m)$. Пусть множества Δ_n стремятся при $n \to +\infty$ к бесконечности по Ван Хову. Тогда для любой функции $q \in Q(R^m)$ с. э. Y_n слабо сходятся при $n \to +\infty$ в пространстве $H(q)$ к с. э. Y.*

Доказательство. Положим

$$X_{nj}(h) = (n \operatorname{mes}(\Delta_n))^{-1/2} \int_{\Delta_n} (X_j(t) X_j(t + h) - B(h))\, dt,$$

$$X_{nj} = (X_{nj}(h),\ h \in R^m), \quad j = \overline{1, n},\ n = 1, 2, \dots .$$

Тогда

$$E \| X_{nj} \|^2_{H(q)} \leqslant \frac{2}{n} \left(\int_{R^m} q(u)\, du \right) \left(\int_{R^m} B^2(u)\, du \right) < +\infty,$$

следовательно, для всех $j = \overline{1, n}$, $n = 1, 2, \dots$ X_{nj} являются с. э. пространства $H(q)$. Обозначим A_n ковариационный оператор с. э. $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_{nj}$. В соответствии с утверждениями теорем из работ [7, 10] для справедливости настоящей теоремы достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\lim_{n \to +\infty} \langle A_n \varphi, \varphi \rangle_{H(q)} = \langle A\varphi, \varphi \rangle_{H(q)} \text{ для любого } \varphi \in H(q), \tag{15}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{tr} A_n = \operatorname{tr} A, \tag{16}$$

$$\lim nE \| X_{n1} \|^4_{H(q)} = 0, \tag{17}$$

где символ $\operatorname{tr} A$ обозначает след оператора A. Убедимся в том, что условия (15)—(17) выполнены. Для любого $\varphi \in H(q)$ имеем

$$\langle A_n\varphi, \varphi\rangle_{H(q)} = E\langle Y_n, \varphi\rangle^2_{H(q)} = E\left[\int\limits_{R^m} q(u) Y_n(u)\varphi(u)\,du\right]^2 =$$

$$= \int\limits_{R^m}\int\limits_{R^m} q(u) q(v)\varphi(u)\varphi(v)\rho_n(u, v)\,dudv.$$

В силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости и неравенства $|\rho_n(u, v)| \leqslant d^2$ последнее выражение имеет при $n \to +\infty$ предел, равный

$$\int\limits_{R^m}\int\limits_{R^m} q(u) q(v)\varphi(u)\varphi(v)\rho(u, v)\,dudv = \langle A\varphi, \varphi\rangle_{H(q)}.$$

Условие (15), таким образом, выполнено. Далее, в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости

$$\operatorname{tr} A_n = E\|Y_n\|^2_{H(q)} = \int\limits_{R^m} q(u)\rho_n(u, u)\,du \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int\limits_{R^m} q(u)\rho(u, u)\,du =$$

$$= E\|Y\|^2_{H(q)} = \operatorname{tr} A.$$

Значит, условие (16) также выполнено. Что касается соотношения (17), то, как несложно видеть,

$$nE\|X_{n1}\|^4_{H(q)} = \frac{1}{n\,\mathrm{mes}^2(\Delta_n)}\int\limits_{R^m}\int\limits_{R^m} q(h_1) q(h_2) \times$$

$$\times \int\limits_{\Delta_n}\int\limits_{\Delta_n}\int\limits_{\Delta_n}\int\limits_{\Delta_n} E\left\{\prod_{j=1}^{4}[X(t_j)X(t_j + h_{j_*}) - B(h_{j_*})]\right\} dt_1dt_2dt_3dt_4dh_1dh_2.$$

Подставляя в правую часть этого равенства выражение для математического ожидания, задаваемое равенством (2), и оценивания полученное выражение подобно тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 2, приходим к следующей оценке:

$$nE\|X_{n1}\|^4_{H(q)} \leqslant \frac{60}{n}\left(\int\limits_{R^m} q(u)\,du\right)^2\left(\int\limits_{R^m} B^2(u)\,du\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Теорема доказана.

1. *Иванов А. В.* Одна предельная теорема для оценки корреляционной функции // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1978.— Вып. 19.— С. 76—81.
2. *Булдыгин В. В.* Предельные теоремы в функциональных пространствах и одна задача статистики случайных процессов // Вероятностные методы бесконечномерного анализа. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980.— С. 24—36.
3. *Булдыгин В. В., Иларионов Е. В.* Об одной задаче статистики случайных полей // Вероятностный бесконечномерный анализ.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 6—14.
4. *Дыховичный А. А.* Об оценке корреляционной функции однородного и изотропного гауссовского поля // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1983.— Вып. 29.— С. 37—40.
5. *Леоненко Н. Н., Иванов А. В.* Статистический анализ случайных полей.— Киев : Вища шк., 1986.— 216 с.
6. *Заяц В. В.* L_2-оценки коррелционной функции на всем параметрическом множестве и их приложения // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1990.— № 2.— С. 6—9.
7. *Заяц В. В.* Оценивание корреляционной функции однородного гауссовского поля в пространствах функций типа L_2.— Киев, 1988.— 27 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.65).
8. *Заяц В. В.* О строгой положительной определенности одной корреляционной функции // Стохастические системы и их приложения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1990.— С. 51—55.
9. *Скороход А. В.* Элементы теории вероятностей и случайных процессов.— Киев : Вища шк., 1980.— 344 с.

10. *Канделаки Н. П., Сазонов В. В.* К центральной предельной теореме для случайных элементов, принимающих значения из гильбертова пространства // Теория вероятностей и ее применения.— 1964.— 9, № 1.— С. 43—51.

Получено 09.07.90