УДК 519.21+517.88

М. Ш. БРАВЕРМАН, канд. физ.-мат. наук
(Хабаров. отд-ние ин-та прикл. математики Дальневосточ. отд-ния АН СССР)

Оценки для сумм независимых случайных величин в симметричных пространствах

Для некоторого класса симметричных пространств случайных величин устанавливается равносильность выполнения верхних оценок одного и того же вида для совокупностей дизъюнктных и независимых случайных величин.

Для деякого класу симетричних просторів випадкових величин встановлюється еквівалентність виконання верхніх оцінок одного і того ж вигляду для сукупності диз'юнктних і незалежних випадкових величин.

Введение. В настоящей статье рассматриваются случайные величины (с. в.), заданные на вероятностном неатомическом пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Следуя терминологии, принятой в теории функций, будем называть с. в. X, Y дизъюнктными, если $XY = 0$.

Известно следующее неравенство Бара — Эссеена [1]. Пусть $1 \leqslant p \leqslant 2$, $\{X_k\}_{k=1}^n \subset L_p(\Omega)$ — набор независимых с. в. с нулевыми средними. Тогда

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} X_k \Big\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \Big(2 \sum_{k=1}^{n} \| X_k \|^p_{L_p(\Omega)} \Big)^{1/p}.$$

С другой стороны, аналогичное соотношение выполняется, если с. в. попарно дизъюнктны. В статье показано, что для широкого класса пространств оценка приведенного вида для независимых с. в. эквивалентна такой же оценке для с. в., попарно дизъюнктных.

1. Основные определения. Приведем некоторые понятия, используемые в дальнейшем. Банахово пространство E случайных величин, заданных на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, называется симметричным (с. п.) если 1) из условий $Y \in E$, $|X| \leqslant |Y|$ следует, что $X \in E$, $\| X \|_E \leqslant \| Y \|_E$; 2) из равнораспределенности с. в. X, Y и условия $Y \in E$ вытекает, что $X \in E$, $\| X \|_E = \| Y \|_E$.

Основные сведения о с. п. содержатся в [2, 3]. К классу с. п. относятся пространства $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, пространства Лоренца $L_{p,q}(\Omega)$ (см. [4], гл. 5), пространства Орлича [5].

Для всякого с. п. E имеют место вложения $L_\infty(\Omega) \subset E \subset L_1(\Omega)$. Через I_h обозначим индикатор случайного события h. Фундаментальная функция с. п. E задается формулой $\varphi_E(t) = \| I_h \|_E$, где $P(h) = t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

В дальнейшем можно считать, без ограничения общности, что $\| I_\Omega \|_E = 1$. Тогда $\| X \|_{L_1(\Omega)} \leqslant \| X \|_E \leqslant \| X \|_{L_\infty(\Omega)}$ для любой с. в. $X \in L_\infty(\Omega)$.

Всякое с. п. E обладает следующим свойством [2, с. 133]. Пусть $Y \in E$ и $P\{|X| \geqslant x\} \leqslant CP\{|Y| \geqslant x\}$ при всех $x > 0$. Тогда $X \in E$ и $\|X\|_E \leqslant \max\{1, C\} \|Y\|_E$.

Пусть F — вероятностное распределение на прямой. Через $\Pi(F)$ обозначается соответствующее сложное пуассоновское распределение [6, с. 160]. Будем писать $X \in \mathcal{L}(F)$, если с. в. X имеет распределение F.

В. М. Круглов [7] установил класс неотрицательных измеримых функций Φ на R, обладающих следующим свойством: если $X \in \mathcal{L}(F)$, $Y \in \mathcal{L}(\Pi(F))$, то условия $M\Phi(X) < \infty$ и $M\Phi(Y) < \infty$ эквивалентны. Будем говорить, что с. п. E обладает свойством Круглова ($E \in K$), если для таких же X, Y эквивалентны условия $X \in E$ и $Y \in E$.

Согласно [7], $L_p(\Omega) \in K$, $1 \leqslant p < \infty$. Описание с. п., обладающих свойством Круглова, рассматривается в [3].

Известно, что с. п. E допускает верхнюю p-оценку [8], если для всякого набора попарно дизъюнктных с. в. $\{X_k\}_{k=1}^n \subset E$

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} X_k \Big\|_E \leqslant B \Big(\sum_{k=1}^{n} \| X_k \|_E^p \Big)^{1/p}, \tag{1}$$

где B зависит лишь от E.

Ясно, что пространство $L_p(\Omega)$, $p \neq \infty$, допускает верхнюю p-оценку и не допускает верхнюю s-оценку при $s > p$. Рассмотрим пространства Лоренца $L_{p,q}(\Omega)$. Пусть $r = \min\{p, q\}$. Из результатов работ [9, 10] следует, что $L_{p,q}(\Omega)$ допускает верхнюю r-оценку и не допускает верхнюю s-оценку при $s > r$.

Будем говорить, что с. п. E обладает p-свойством Бара — Эссеена ($E \in (BE)_p$), если для любого набора независимых с. в. $\{X_k\}_{k=1}^n \subset E$ с нулевыми средними выполняется оценка типа (1) с постоянной, не зависящей от X_k.

Покажем, что свойство Бара — Эссеена может выполняться лишь при $p \leqslant 2$. Действительно, из вложения $L_\infty(\Omega) \subset E$ [2, 3] следует, что E содержит последовательность независимых с. в. $\{U_k\}_{k=1}^\infty$ с симметричным бернуллиевским распределением. Согласно неравенству Пэли — Зигмунда [11, с. 48] $P\Big[\Big|\sum_{k=1}^{n} U_k\Big| \geqslant n^{1/2}/2\Big] \geqslant \eta > 0$, где η не зависит от n. Отсюда $\Big\| \sum_{k=1}^{n} U_k \Big\|_E \geqslant an^{1/2}$, где $a > 0$ не зависит от n. Если $E \in (BE)_p$, то норма слева не превышает $Bn^{1/p}$. Значит, $p \leqslant 2$.

В силу неравенства треугольника всякое с. п. обладает свойством Бара — Эссеена при $p = 1$. Поэтому можно считать $p > 1$.

2. Формулировка результатов.

Теорема 1. *Пусть $E \in K$, $1 < p < 2$. Условие $E \in (BE)_p$ выполняется тогда и только тогда, когда E допускает верхнюю p-оценку.*

Теорема 2. *Пусть $E \in K$. Условие $E \in (BE)_2$ выполняется тогда и только тогда, когда E допускает верхнюю 2-оценку и $E \subset L_2(\Omega)$.*

В качестве примера рассмотрим пространства $L_{p,q}(\Omega)$. Пусть, как и выше, $r = \min\{p, q\}$. Согласно [3] $L_{p,q}(\Omega) \in K$ при $r < \infty$. Из сказанного выше следует, что если $1 \leqslant r < 2$, то $L_{p,q}(\Omega) \in (BE)_r$ и $L_{p,q}(\Omega) \notin (BE)_s$ при $s > r$. Если же $r > 2$, то $L_{p,q}(\Omega) \in (BE)_2$ (ибо при этом $L_{p,q}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$). В случае $r = 2$ соотношение $L_{p,q}(\Omega) \in (BE)_2$ эквивалентно вложению $L_{p,q}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$, которое выполняется тогда и только тогда, когда $p > 2$ или $p = 2 \geqslant q$.

Условие $E \in K$ является существенным. Действительно, $L_\infty(\Omega) \notin K$ и допускает верхнюю p-оценку для любого $p > 1$. Нетрудно проверить, что $L_\infty(\Omega) \notin (BE)_p$, $p > 1$.

Однако условие $E \in K$ не является необходимым для p-свойства Бара — Эссеена. Рассмотрим пространство Орлича $\overset{*}{L}_N(\Omega)$, порождаемое функцией $N(x) = \exp x^2 - 1$. Из результатов статьи [12] следует, что $\overset{*}{L}_N(\Omega) \in (BE)_2$. Это пространство вложено в $L_2(\Omega)$, допускает верхнюю 2-оценку и не обладает свойством Круглова.

3. О свойстве Круглова. Результаты этого пункта играют важную роль в доказательстве сформулированных теорем и, быть может, представляют самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть $E \in K$. Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что если $X \in E$, $X \in \mathscr{L}(F)$, $Y \in \mathscr{L}(\Pi(F))$, то*

$$e^{-1} \| X \|_E \leqslant \| Y \|_E \leqslant C \| X \|_E. \tag{2}$$

Доказательство. Воспользуемся следующей известной конструкцией. Рассмотрим попарно несовместные события $\{h_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, такие, что $P(h_n) = 1/(en!)$. Пусть $X \in \mathscr{L}(F)$ и с. в. $X_k^{(n)}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $n = 1, 2, \ldots$ равнораспределены с X и таковы, что с. в. $\{X_k^{(n)}\}_{k=1}^n \cup \{I_{h_n}\}$ независимы при каждом n. Пусть

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} X_k^{(n)} \Big) I_{h_n}. \tag{3}$$

Тогда $Y \in \mathscr{L}(\Pi(F))$.

Из (3) следует, что $P[|Y| \geqslant x] \geqslant e^{-1} P[|X| \geqslant x]$ при всех $x > 0$. Отсюда вытекает нижняя оценка в (2).

Предположим, что верхняя оценка в (2) не выполняется. Тогда найдется последовательность с. в. $Z_j \in E$ с распределениями G_j, для которой $\| Y_j \|_E \geqslant 2^{2j} \| Z_j \|_E$, $j = 1, 2, \ldots$, где $Y_j \in \mathscr{L}(\Pi(G_j))$.

Пусть G, H — распределение с. в. Z, $|Z|$ соответственно. Из (3) следует, что существуют с. в. $Y \in \mathscr{L}(\Pi(G))$, $U \in \mathscr{L}(\Pi(H))$ для которых $|Y| \leqslant U$. Поскольку с. в. Z и $|Z|$ имеют одинаковые нормы в E, то предыдущее соотношение выполняется и для с. в. $|Z_j|$. По формуле (3) с. в. aX $(a \in R)$ соответствует с. в. aY. Значит, умножая с. в. $|Z_j|$ на подходящие постоянные, можно получить последовательность с. в. X_j с распределениями F_j такую, что

$$Y_j \geqslant 0, \quad \| X_j \|_E \leqslant 2^{-j}, \quad \| U_j \|_E \geqslant 2^j, \tag{4}$$

где $U_j \in \mathscr{L}(\Pi(F_j))$. Кроме того, можно выбрать с. в. $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ независимыми.

Положим

$$X = \sum_{j=1}^{\infty} X_j. \tag{5}$$

Согласно (4) ряд абсолютно сходится в E. Поэтому $X \in E$. Пусть F — распределение с. в. X. Будет показано, что с. п. E не содержит с. в. $Y \in \mathscr{L}(\Pi(F))$. Это противоречит свойству Круглова и доказывает лемму.

Из (4) и упомянутых выше свойств с. п. вытекает, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} MX_j < \infty$. Отсюда следует сходимость ряда (5) почти наверное.

Пусть с. в. $X_{k,j}^{(n)}$ таковы, что $X_{k,j}^{(n)} \overset{d}{=} X_j$ при всех $1 \leqslant k \leqslant n$; $n = 1, 2, \ldots$; $j = 1, 2, \ldots$, и с. в. $\{X_{k,j}^{(n)}\} \cup \{I_{h_n}\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$; $j = 1, 2, \ldots$, независимы при каждом $n = 1, 2, \ldots$. Обозначим через Y_j с. в., построенные по $X_{k,j}^{(n)}$ с помощью формулы (3). Имеем, изменяя порядок суммирования,

$$\sum_{j=1}^{m} Y_j = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} X_{k,j}^{(n)} \Big) I_{h_n}.$$

Кроме того, при всех $m = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{j=1}^{m} X_{k,j}^{(n)} \overset{d}{=} \sum_{j=1}^{m} X_j, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Учитывая сказанное выше, заключаем, что ряды $X_k^{(n)} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} X_{k,j}^{(n)}$ сходятся почти наверное и $X_k^{(n)} \overset{d}{=} X$, $1 \leqslant k \leqslant n$; $n = 1, 2, \ldots$. Поскольку события h_n попарно несовместны, то отсюда и из предыдущего вытекает сходимость почти наверное ряда $Y = \sum\limits_{j=1}^{\infty} Y_j$ и соотношение $Y \in \mathscr{L}(\Pi(F))$.

Так как $X_j \geqslant 0$, то согласно (3) $Y_j \geqslant 0$. Значит, $Y \geqslant Y_j$. Отсюда и из (4) $\| Y \|_E \geqslant \| Y_j \|_E \geqslant 2^j$, $j = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $Y \notin E$. Поскольку $X \in E$, то это противоречит условию $E \in K$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $E \in K$, с. в. $\{Z_k\}_{k=1}^{n} \in E$ попарно дизъюнктны, F_k — соответствующие распределения, с. в. $Y_k \in \mathscr{L}(\Pi(F_k))$ независимы.*

Тогда

$$e^{-1}\left\|\sum_{k=1}^{n} Z_k\right\|_E \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{n} Y_k\right\|_E \leqslant C\left\|\sum_{k=1}^{n} Z_k\right\|_E,$$

где C — постоянная из (2).

Доказательство. Пусть F — распределение суммы $\sum_{k=1}^{n} Z_k$ и $Y \in \in \mathscr{L}(\Pi(F))$. Тогда $Y \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Это соотношение нетрудно проверить, вычисляя характеристические функции левой и правой частей. Отсюда и из леммы 1 вытекают искомые оценки. Лемма доказана.

4. Симметризация. Неравенства, о которых говорится в определении свойства Бара — Эссеена, будут вначале установлены для симметричных случайных величин. Следующее утверждение позволит перейти к общему случаю.

Лемма 3. *Для всякого с. п. E существует постоянная $C(E) > 0$ такая, что $\| X + Y \|_E \geqslant C(E) \| X \|_E$ для любых независимых с. в. X, $Y \in E$, $MY = 0$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся последовательности X_k, $Y_k \in E$ со следующими свойствами: 1) с. в. $\{X_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \cup \{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ независимы; 2) $MY_k = 0$; 3) $\| X_k \|_E = 1$; 4) $\| X_k + Y_k \|_E \leqslant 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (X_k + Y_k)$ абсолютно сходится в E. Значит, как уже отмечалось, он абсолютно сходится в $L_1(\Omega)$. Пусть $\beta = \sigma(\{X_k\}_{k=1}^{\infty})$. В силу 1 и 2 $M^{\beta}(X_k + Y_k) = X_k + MY_k = X_k$. Так как оператор M^{β} действует в $L_1(\Omega)$ с единичной нормой, то отсюда следует сходимость в $L_1(\Omega)$ рядов $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} Y_k$. Значит, эти ряды сходятся почти наверное, ибо их члены независимы [13, с. 422]. Следовательно, $Y_k \to 0$ почти наверное.

Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Положим $h(k, \varepsilon) = [| Y_k | < \varepsilon]$, $Z_{k,\varepsilon} = (| X_k | - \varepsilon) I_{h(k,\varepsilon)}$. Имеем $| X_k + Y_k | I_{h(k,\varepsilon)} \geqslant | Z_{k,\varepsilon} |$. В силу независимости $P[| Z_{k,\varepsilon} | \geqslant x] = P(h(k, \varepsilon)) P[|| X_k | - \varepsilon | \geqslant x]$ при всех $x > 0$. Отсюда $\| Z_{k,\varepsilon} \|_E \geqslant \geqslant P(h(k, \varepsilon)) \| | X_k | - \varepsilon \|_E$. Так как $P(h(k, \varepsilon)) \geqslant 1 - \varepsilon$ при достаточно больших k, то из 3 следует, что при таких k правая часть последнего неравенства не меньше чем $(1 - \varepsilon)^2$. Учитывая неравенство $\| X_k + Y_k \|_E \geqslant \geqslant \| Z_{k,\varepsilon} \|_E$, получаем противоречие с условием 4. Лемма доказана.

Для пространств $L_p(\Omega)$ эта лемма содержится в [13, с. 277], причем $C(L_p(\Omega)) = 1$.

5. Некоторые оценки. Часть результатов этого пункта, повидимому, известна. Ради полноты изложения, приведем все утверждения с доказательствами.

Предложение 1. *Пусть E допускает верхнюю p-оценку. Тогда $P[|X| \geqslant x] \leqslant b \|X\|_E^p x^{-p}$ для всех $x > 0$, где b зависит только от E.*

Доказательство. Имеем $\| X \|_E \geqslant \| x I_{[|X| \geqslant x]} \|_E = x\varphi_E(P[| X | \geqslant x])$. Нужная оценка будет получена, если установить неравенство $\varphi_E(t) \geqslant \geqslant \alpha t^{1/p}$, где $\alpha > 0$ — постоянная.

Пусть $0 < x < 1$. Выберем попарно несовместные события h_k, $1 \leqslant k \leqslant \leqslant n$, так, чтобы $P(h_k) = x/n$. Пусть $h = \bigcup h_k$. Так как $P(h) = x$, то из (1) вытекает неравенство $\varphi_E(x) = \| I_h \|_E \leqslant Bn^{1/p}\varphi_E(x/n)$. Для каждого $t \in (0, 1)$ существует натуральное n такое, что $1/2 \leqslant tn = x < 1$. Отсюда и из предыдущего следует нужная оценка для $\varphi_E(t)$. Предложение доказано.

Пусть ([4], гл. 5) $\| X \|_{p,\infty}^{*} = \sup \{x(P[| X | \geqslant x])^{1/p} : x > 0\}$.

Предложение 2. *Пусть $1 < p < 2$, $|X| \leqslant a$. Тогда $MX^2 \leqslant \leqslant 2a^{2-p}(2-p)^{-1}(\| X \|_{p,\infty}^{*})^p$.*

Доказательство. Имеем

$$MX^2 = 2\int_0^a xP[|X| \geqslant x]\,dx.$$

По определению $P[|X| \geqslant x] \leqslant (\|X\|^*_{p,\infty})^p x^{-p}$. Из этих соотношений вытекает нужная оценка.

Лемма 4. *Пусть $\{U_k\}_{k=1}^n$ — набор независимых с. в. с нулевыми средними, $|U_k| \leqslant a$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Пусть с. п. E допускает верхнюю p-оценку $(1 < p \leqslant 2)$ и если $p = 2$, то $E \subset L_2(\Omega)$. Положим $u = \Sigma\|U_k\|_E$. Тогда при всех $x > 0$*

$$P\left[\left|\sum_{k=1}^n U_k\right| \geqslant x\right] \leqslant 2\exp\left(-\frac{x}{2a}\ln\left(1+\frac{\gamma x}{u}\right)\right), \tag{6}$$

где $\gamma > 0$ зависит только от a, p, E.

Доказательство. По неравенству Ю. В. Прохорова [14] при всех $x > 0$ левая часть (6) оценивается сверху величиной $2\exp(-(2a)^{-1} \times \times x \operatorname{arcsin} h(\sigma^2 ax/2))$, где $\sigma^2 = \Sigma MU^2$. Если $1 < p < 2$, то согласно предложению 1 $\|X\|^*_{p,\infty} \leqslant b^{1/p}\|X\|_E$ для всех $X \in E$. Отсюда и из предложения $2\sigma^2 \leqslant 2a^{2-p}bu/(2-p)$. При $p = 2$ имеем $MX^2 \leqslant C\|X\|^2_E$, где C не зависит от X [2, с. 24]. Поэтому $\sigma^2 \leqslant Cu$.

Как нетрудно убедиться, $\operatorname{arcsin} ht \geqslant \ln(1+t)$ при всех $t > 0$. Отсюда и из предыдущего вытекает (6). Лемма доказана.

6. Доказательство теоремы 1. Достаточность. Пусть E допускает верхнюю p-оценку, $E \in K$. Рассмотрим набор независимых симметричных с. в. $\{X_k\}_{k=1}^n \subset E$. Без ограничения общности

$$\sum_{k=1}^n \|X_k\|_E^p = 1. \tag{7}$$

Пусть $a = b^{1/p}$, где b — постоянная из предложения 1. Положим

$$U_k = X_k I_{[|X_k| \leqslant a]}, \quad V_k = X_k - U_k. \tag{8}$$

Во всяком с. п. E содержится с. в. $X \equiv 1$ [2, с. 124]. Поскольку $E \in K$, то E содержит с. в. Y, имеющую стандартное пуассоновское распределение с параметром $\lambda = 1$. Как известно [6, с. 236], $P[Y \geqslant x] \geqslant \beta\exp(-x\ln(1+ + x))$ при всех $x > 0$, где $\beta > 0$ — постоянная. Из (7), (8) и леммы 4 вытекает (6), где $u = 1$. Значит, существует постоянная $v > 0$ такая, что $P[|\Sigma U_k| \geqslant x] \leqslant P[vY \geqslant x]$ при всех $x > 0$. Отсюда и из приведенного выше свойства с. п.

$$\left\|\sum_{k=1}^n U_k\right\|_E \leqslant v\|Y\|_E = D. \tag{9}$$

Далее, пусть F_k — распределение с. в. V_k и с. в. $Y_k \in \mathscr{L}(\Pi(F_k))$ независимы. Согласно неравенству Ю. В. Прохорова [15] $P[|\Sigma V_k| \geqslant x] \leqslant \leqslant 8P[|\Sigma Y_k| \geqslant x/2]$ для всех $x > 0$. Поэтому

$$\left\|\sum_{k=1}^n V_k\right\|_E \leqslant 16\left\|\sum_{k=1}^n Y_k\right\|_E. \tag{10}$$

Из (7), (8) и предложения 1 следует оценка $\Sigma P[V_k \neq 0] \leqslant 1$. Значит, существуют попарно дизъюнктные с. в. Z_k такие, что $Z_k \overset{d}{=} V_k$, $1 \leqslant \leqslant k \leqslant n$. По лемме 2

$$\left\|\sum_{k=1}^n Y_k\right\|_E \leqslant C\left\|\sum_{k=1}^n Z_k\right\|_E, \tag{11}$$

где C зависит лишь от E. Поскольку E допускает верхнюю p-оценку, то можно применить к сумме справа неравенство (1). Согласно (8) $\| Z_k \|_E = \| V_k \|_E \leqslant \| X_k \|_E$. Учитывая (7), заключаем, что правая часть (11) не превышает величины BC.

Таким образом, для симметричных с. в. из (8)—(11) вытекает искомая оценка с постоянной $B_1 = D + 16BC$. Чтобы получить эту оценку в общем случае, нужно записать ее для соответствующих симметризованных с. в. [13, с. 259] и затем воспользоваться леммой 3. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $E \in K$ и $E \in (BE)_p$. Рассмотрим набор попарно дизъюнктных с. в. $\{X_k\}_{k=1}^n \subset E$. Без ограничения общности $MX_k = 0$. Пусть F_k — распределения с. в. X_k и с. в. $Y_k \in \mathscr{L}(\Pi(F_k))$ независимы. Согласно (3) $MY_k = 0$. Так как $E \in (BE)_p$, то для набора $\{Y_k\}_{k=1}^n$ выполняется оценка типа (1). Применяя лемму 2, получаем аналогичную оценку для набора $\{X_k\}_{k=1}^n$, причем постоянная зависит лишь от E. Это и означает, что E допускает верхнюю p-оценку. Теорема доказана.

7. Доказательство теоремы 2. Достаточность доказывается так же, как и в теореме 1. Для получения оценки (9) нужно воспользоваться условием $E \subset L_2(\Omega)$ и неравенством (6) при $p = 2$.

Необходимость. То, что E допускает верхнюю 2-оценку, устанавливается тем же способом, что и выше. Покажем, что $E \subset L_2(\Omega)$.

Пусть $X \in E$, $MX = 0$. Рассмотрим последовательность независимых с. в. $\{X_k\}_{k=1}^\infty$, равнораспределенных с X. Поскольку $E \in (BE)_2$, то

$$\left\| n^{-1/2} \sum_{k=1}^n X_i \right\|_E \leqslant D \left(\sum_{k=1}^n \| X_k \|_E^2 / n \right)^{1/2} = D \| X \|_E$$

при всех $n = 1, 2, \ldots$, где D — постоянная. Как известно [2, с. 124], $\| X \|_E \geqslant AM|X|$, где $A > 0$ зависит только от E. Поэтому

$$\sup_n M \left| n^{-1/2} \sum_{k=1}^n X_k \right| < \infty.$$

Отсюда [16] $MX^2 = MX_k^2 < \infty$. Значит, $E \subset L_2(\Omega)$. Теорема доказана.

1. *Von Bahr B., Esseen K.-G.* Inequalities for rth absolute moment of a sum of random variables // Ann. Math. Statist.—1965.— **36**.— P. 299—303.
2. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
3. *Браверман М. Ш.* Случайные величины с безгранично делимыми распределениями и симметричные пространства // Сиб. мат. журн.— 1985. - **26**, № 2.— С. 36—50.
4. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М. : Мир, 1974.— 333 с.
5. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича.— М. : Физматгиз, 1958.— 271 с.
6. *Круглов В. М.* Дополнительные главы теории вероятностей.— М. : Высш. шк., 1984.— 264 с.
7. *Круглов В. М.* Замечание к теории безгранично делимых законов // Теория вероятностей и ее применения. – 1970. — **15**, вып. 1.— С. 330—336.
8. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces, V. 2. Function Spaces.— Berlin: Springer Verlag, 1979.— 320 p.
9. *Новиков С. Я., Семенов Е. М., Токарев Е. В.* Структура подпространств пространства $\lambda_p(\varphi)$ // Докл. АН СССР.— 1979. — **247**, № 1.— С. 552—554.
10. *Новиков С. Я.* Тип и котип функциональных пространств Лоренца // Мат. заметки.— 1982.— **32**, № 2.— С. 213—221.
11. *Кахан Ж.-П.* Случайные функциональные ряды.— М. : Мир, 1973.— 340 с.
12. *Булдыгин В. В., Козаченко Ж. В.* О субгауссовских случайных величинах // Укр. мат. журн.— 1980.— **36**, № 6.— С. 723—730.
13. *Лоэв М.* Теория вероятностей.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962. — 720 с.
14. *Прохоров Ж. В.* Одна экстремальная задача теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения.— 1959. — **4**, вып. 2. — С. 211—214.
15. *Прохоров Ж. В.* Усиленная устойчивость сумм и неограниченно делимые распределения // Там же.— 1958.— 3, вып. 2.— С. 153—165.
16. *Esseen K.-G., Janson S.* On moment conditions for normed sums lf independent random variables and martingal differences // Stochast. Process. and Appl.— 1985.— **9**, N 1.— P. 173—185.

Получено 14.11.89