УДК 519.21

Р. Г. САФАРЯН, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

R-D-системы и ветвящиеся процессы Иржины

Для параболического уравнения, содержащего нелинейную часть специального вида, строится вероятностное представление решения в виде математического ожидания некоторого функционала от траекторий ветвящегося процесса с непрерывным множеством типов частиц.

Для параболічного рівняння, що містить нелінійну частину спеціального вигляду, побудовано ймовірносне зображення розв'язку за допомогою математичного сподівання деякого функціоналу від траєкторій гіллястого процесу із неперервною множиною типів частинок.

1. Введение. Пусть X_t — однородный марковский процесс со значениями в борелевском фазовом пространстве $(E, \mathcal{E})$. Обозначим через $\mathcal{D}$ область определения его сильного инфинитезимального оператора L. Будем считать, что множество $\mathcal{D}$ плотно в топологии поточечной ограниченной сходимости в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ всех ограниченных $\mathcal{E}$-измеримых функций с равномерной нормой $\|g\| = \sup\limits_{x\in E} |g(x)|$.

Рассмотрим уравнение («R-D-систему»)

$$\partial u_t(x)/\partial t = Lu_t(x) + f(u_t(x)),\ u_t \in \mathcal{D},\ t \geqslant 0, \tag{1}$$
$$u_0(x) = g(x) \geqslant 0.$$

Уравнение вида (1) рассматривалось в работе [1] в предположении, что процесс X_t диффузионный,

$$f(u) = c\sum_{k=0}^{\infty} p_k(u^k - u),\ c, p_k \geqslant 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1,\ 0 \leqslant g \leqslant 1.$$

В указанной работе для решения задачи (1) было получено вероятностное представление через ветвящийся диффузионный процесс.

Целью настоящей работы является аналогичное представление, когда

$$f(u) = au - bu^2 + \int_0^{\infty} (1 - e^{-uy} - uy)\,\Lambda(dy), \tag{2}$$

где $b \geqslant 0$, $\int_0^{\infty} (y^2 \wedge y)\,\Lambda(dy) < \infty$.

При таком выборе функции $f(u)$ в роли ветвящегося процесса выступит так называемый ветвящийся процесс Иржины с абстрактным множеством типов $(E, \mathcal{E})$.

Впервые такие процессы были введены в случае дискретного времени в [2]. В случае непрерывного времени определение вполне аналогично.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество конечных неотрицательных мер m на измеримом пространстве $(E, \mathcal{E})$. Измеримая структура на множестве $\mathfrak{M}$ есть по определению наименьшая σ — алгебра $\mathcal{M}$, относительно которой измеримы все отображения $\mathfrak{M} \ni m \to m(S)$, $S \in \mathcal{E}$.

Однородный марковский процесс M_t со значениями в $(\mathfrak{M}, \mathcal{M})$ называется процессом Иржины, если условное распределение M_t при условии $M_0 = m_1 + m_2$ $(m_1, m_2 \in \mathfrak{M})$ совпадает с распределением суммы $M_t^1 + M_t^2$, слагаемые которой независимы, причем распределение M_t^i совпадает с распределением M_t при условии $M_0 = m_i$, $i = 1,2$. Если множество E конечно, то процесс M_t известен под названием ветвящегося процесса с конечным числом типов и непрерывно меняющейся массой [3]. Для $x \in E$ обозначим через $\mathbf{P}_x$ условную вероятность при условии $M_0 = \delta_x$, где, как обычно, δ_x обозначает вероятностную меру, сосредоточенную в точке $x \in E$. Через $\mathbf{M}_x$ будем обозначать математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_x$.

© Р. Г. САФАРЯН, 1991

Предположим, что для всех $t \geqslant 0$

$$\sup_{x \in E} \mathbf{M}_x M_t(E) < \infty \tag{3}$$

и обозначим $A_t(x, S) = \mathbf{M}_x M_t(S)$, $x \in E$, $S \in \mathcal{E}$. Из (3) следует, что A_t для всякого $t \geqslant 0$ является ограниченным неотрицательным ядром [4] на $(E, \mathcal{E})$. Кроме того, семейство ядер A_t, $t \geqslant 0$ удовлетворяет полугрупповому уравнению

$$A_t A_u = A_{t+u}, \ A_0 = 1. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение множество $\mathfrak{B}_+$, состоящее из всех неотрицательных функций из $\mathfrak{B}$. Для $g \in \mathfrak{B}_+$ положим

$$K_t(x, g) = -\log \mathbf{M}_x \exp\left\{-\int_E M_t(dy)\, g(y)\right\}. \tag{5}$$

Из (5) следует

$$K_t(x, g) \leqslant A_t g(x), \ x \in E, \ g \in \mathfrak{B}_+,$$

и, следовательно, $K_t(\cdot, g) \in \mathfrak{B}_+$.

Доказательство следующих двух (весьма простых) теорем мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Теорема 1. *Однородный марковский процесс M_t со значениями в $(\mathfrak{M}, \mathcal{M})$ и удовлетворяющий условию* (3) *тогда и только тогда является процессом Иржины, когда*

$$K_t(x, K_s(\cdot, g)) = K_{t+s}(x, g) \tag{6}$$

для всех $s, t \geqslant 0$, $x \in E$, $g \in \mathfrak{B}_+$.

Далее, для $m \in \mathfrak{M}$, $g \in \mathfrak{B}$ обозначим

$$\langle m, g \rangle = \int_E m(dx)\, g(x).$$

Непосредственно из определения процесса Иржины вытекает, что распределение неотрицательной случайной величины $\langle M_t, g \rangle$ при $g \in \mathfrak{B}_+$ безгранично делимо. Учитывая условие (3), получаем, что $K_t(x, g)$, как функционал от $g \in \mathfrak{B}_+$, необходимо имеет вид

$$K_t(x, g) = \Gamma_t g(x) + \int_{\mathfrak{M}} \left(1 - e^{-\langle l, g \rangle}\right) \Pi_t(x, dl), \tag{7}$$

где для всех $t \geqslant 0$ ядра Γ_t неотрицательны, ограничены и $\sup_{x \in E} \int_{\mathfrak{M}} l(E)\, \Pi_t \times$ $\times (x, dl) < \infty$.

Теорема 2. *Всякий удовлетворяющий условиям* (6), (7) *функционал $K_t(x, g)$ определяет некоторый процесс Иржины, удовлетворяющий условиям* (3), (5).

Нам понадобятся только эти результаты по процессам Иржины.

Обозначим через $\mathfrak{B}^0$ множество тех функций $g \in \mathfrak{B}$, для которых

$$\lim_{t \to 0} \| T_t g - g \| = 0.$$

Известно [5], что $\mathfrak{B}^0$ есть банахово подпространство банахова пространства $\mathfrak{B}$, $T_t g \in \mathfrak{B}^0$ для $g \in \mathfrak{B}^0$ и что функция $T_t g(x)$ непрерывна по $t \geqslant 0$ равномерно по $x \in E$. Кроме того,

$$\mathcal{D} \subset \mathfrak{B}^0. \tag{8}$$

Обозначим через $\mathfrak{B}^0_+$ множество неотрицательных функций из $\mathfrak{B}^0_0$. Предположим, что $f(g) \in \mathfrak{B}^0$ для всех $g \in \mathfrak{B}^0_+$, или, короче,

$$f(\mathfrak{B}^0_+) \subset \mathfrak{B}^0. \tag{9}$$

Теорема 3. *Всякая пара: инфинитезимальный оператор L и функция f, удовлетворяющие условию* (9), *однозначно определяют процесс Иржи-*

ны M_t с множеством типов $(E, \mathscr{E})$ такой, что функция $u_t(x) = K_t(x, g)$ для всех $g \in \mathscr{D}$ является единственным решением задачи (1), *удовлетворяющим условиям*

$$\lim_{\substack{\Delta\downarrow 0 \\ s\to t}} \| T_\Delta f(u_s) - f(u_t) \| = 0 \tag{10}$$

для всех $t \geqslant 0$;

функция $f(u_t(x))$ дифференцируема по $t \geqslant 0$ равномерно по $x \in E$; (11)

производная $\partial f(u_t(x))/\partial t$ непрерывна по $t \geqslant 0$ равномерно по $x \in E$. (12)

Доказательство состоит из четырех этапов. Изложим кратко содержание каждого из них.

Для сокращения формулировок введем в рассмотрение класс $\mathscr{K}(L, f)$, состоящий из функций $u_t(x) \geqslant 0$, удовлетворяющих условиям (10)—(12).

На первом этапе мы заменяем дифференциальное уравнение (1) в некотором смысле эквивалентным ему интегральным нелинейным уравнением

$$u_t = T_t g + \int_0^t T_{t-s}[f(u_s)]\,ds, \tag{13}$$

которое получается, если формально решить задачу (1), считая функцию $f(u_t)$ известной.

Точнее, всякое решение задачи (1) из класса $\mathscr{K}(L, f)$ удовлетворяет уравнению (13) и, наоборот, всякое дифференцируемое по $t \geqslant 0$ решение уравнения (13) из класса $\mathscr{K}(L, f)$ является решением задачи (1).

На втором этапе мы показываем, что для всякой функции $g \in \mathfrak{B}^+$ уравнение (13) имеет решение $u_t(x)$ такое, что

$$0 \leqslant u_t(x) \leqslant e^{at} T_t g(x),$$

и это решение единственно в классе таких функций $u_t(x) \geqslant 0$, что

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t} \sup_{x\in E} u_s(x) < \infty.$$

При этом сначала рассматриваем функцию $f(u)$ частного вида

$$f(u) = cu + \int_0^\infty (1 - e^{-uy})\,\Lambda(dy), \tag{14}$$

где $\int_0^\infty y\Lambda(dy) < \infty$. Для таких f уравнение (13) превращается в более простое

$$u_t = e^{ct} T_t g(x) + \int_0^t e^{c(t-s)} T_{t-s}[f^0(u_s)]\,ds, \tag{15}$$

где $f^0(u) = \int_0^\infty (1 - e^{-uy})\,\Lambda(dy)$.

Главное преимущество уравнения (15) перед (13) в том, что функция $f^0(u)$ монотонно возрастает. Для функции $f(u)$ общего вида (2) подбираем последовательность функций $f_n(u)$ вида (14), сходящуюся к $f(u)$ равномерно на каждом интервале.

Третий этап состоит в доказательстве вероятностного представления для решения уравнения (13), т. е. в доказательстве равенства

$$u_t(x) = K_t(x, g), \tag{16}$$

где $K_t(x, g)$ определяется по некоторому процессу Иржины M_t в соответствии с (5). При этом также сначала рассматривается функция $f(u)$ вида (14), а затем осуществляется предельный переход к функции f вида (2) по последовательности функций вида (14).

Для функций f вида (14) представление (16) вытекает из следующей ниже леммы 1. Лемма 2 показывает, что представление (16) сохраняется при предельном переходе. Доказательство обеих оставляются читателю. Обозначим через $\mathfrak{B}$ $(\mathfrak{B}_+)$ класс функционалов φ: $\mathfrak{B}_+ \to R_+$ вида

$$\varphi(g) = <\alpha, \ g> + \int_{\mathfrak{M}} (1 - e^{-(l,g)}) \Pi(dl), \tag{17}$$

где $g \in \mathfrak{B}_+$, $\alpha \in \mathfrak{M}$, $\Pi(dl) \geqslant 0, \int_{\mathfrak{M}} l(E) \Pi(dl) < \infty$.

Если множество E состоит из одной точки, то $\mathfrak{B}_+$ изоморфно полупрямой R_+, и класс $\mathscr{L}(R_+)$ состоит из функций $\varphi: R_+ \to R_+$ вида

$$\varphi(u) = \alpha u + \int_0^\infty (1 - e^{-uy}) \Pi(dy),$$

где α, $u \geqslant 0$, $\Pi(dy) \geqslant 0$, $\int_0^\infty y \Pi(dy) < \infty$.

Лемма 1. *Если* $h \in \mathscr{L}(R_+)$, $\varphi \in \mathscr{L}(\mathfrak{B}_+)$, *то* $h(\varphi) \in \mathscr{L}(\mathfrak{B}_+)$.

Непосредственно из определения класса $\mathscr{L}(\mathfrak{B}_+)$ следует, что всякое отображение φ из $\mathscr{L}(\mathfrak{B}_+)$ дифференцируемо по Фреше, причем $\varphi'(g) \in \mathfrak{M}$, и в силу (17)

$$\langle \varphi'(g), h \rangle = \langle \alpha, h \rangle + \int_{\mathfrak{M}} e^{-(l,g)} \langle l, h \rangle \Pi(dl).$$

Лемма 2. *Пусть последовательность* $\varphi_n \in \mathscr{L}(\mathfrak{B}_+)$ *такова, что для всех* $g \in \mathfrak{B}_+$ *существует предел* $\varphi(g) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(g)$. *Тогда если найдется мера* $\gamma \in \mathfrak{M}$ *такая, что* $\varphi_n(g) \leqslant \gamma, g\rangle$ *для всех* $n \geqslant 1$, $g \in \mathfrak{B}_+$, *то* $\varphi \in \mathscr{L}(\mathfrak{B}_+)$, *и*

$$\lim_{n\to\infty} \langle \varphi_n'(g), h \rangle = \langle \varphi'(g), h \rangle$$

для всех $h, g \in \mathfrak{B}_+$.

Заметим, что условие (9) до сих пор не использовалось. Оно необходимо только на четвертом этапе, когда доказывается, что для $g \in \mathcal{D}$ решение уравнения (13) дифференцируемо по $t \geqslant 0$ и входит в класс $\mathcal{K}(L, f)$. Ключевым моментом этого этапа является дифференцируемость по Фреше отображения

$$\mathbf{K}_t: \mathfrak{B}_+ \to \mathfrak{B}_+,$$

переводящего функцию $g \in \mathfrak{B}_+$ в функцию $\mathbf{K}_t(g) = K_t(\cdot, g)$. Производная $\mathbf{K}_t'(g)$ линейно отображает $\mathfrak{B}_+$ в $\mathfrak{B}_+$ по формуле

$$\mathbf{K}_t'(g) h(x) = \langle K_t'(x, g), h \rangle,$$

где $K_t'(x, g)$ — производная по Фреше отображения $g \to K_t(x, g)$ при фиксированных $t \geqslant 0$, $x \in E$. При этом оказывается, что

$$\frac{\partial}{\partial t} u_t(x) = \langle K_t'(x, g), \ Lg + f(g) \rangle.$$

Из этого тождества достаточно тривиально вытекает включение $u_t \in \mathcal{K}(L, f)$.

Замечание 1. Вместо банахова пространства $\mathfrak{B}$ можно рассматривать любое инвариантное (относительно T_t) подпространство $\mathfrak{L}$, плотное в $\mathfrak{B}$ в топологии поточечной ограниченной сходимости. В этом случае следует $\mathfrak{B}^0$ заменить на $\mathfrak{L}^0 = \mathfrak{B}^0 \cap \mathfrak{L}$. Соответственно изменится и условие (9): $f(\mathfrak{L}_+^0) \subset \subset \mathfrak{L}^0$.

В такой редакции это условие будет, например, выполнено для стохастически непрерывных феллеровских процессов на компакте [6], если под $\mathfrak{L}$ понимать пространство непрерывных функций.

З а м е ч а н и е 2. Аналогично область определения $\mathcal{D}$ инфинитезимального оператора L можно сузить до любого линейного подмножества $\mathcal{D}_0$, такого, что слабое замыкание по-прежнему представляет собой пространство $\mathfrak{B}$, и при некоторых $\lambda > 0$ уравнение $\lambda g - Lg = h$ разрешимо в $\mathcal{D}_0$ для плотного в $\mathfrak{B}$ множества правых частей h.

Такое сужение часто оказывается полезным, ибо точное описание всей области определения $\mathcal{D}$ возможно лишь в исключительных ситуациях. Например, пусть процесс X_t принимает значения из R^α, и на дважды непрерывно дифференцируемых функциях оператор L определяется дифференциальным выражением. Тогда целесообразно сузить $\mathcal{D}$ до множества всех дважды непрерывно дифференцируемых функций, или некоторой его части (определяемой граничными условиями, или еще чем нибудь).

П р и м е р. В работе [7] рассмотрен случай, когда

$$f(u) = u^2 - u. \tag{18}$$

Решение задачи (1) с такой f допускает вероятностное представление через ветвящийся процесс, в котором каждая частица блуждает показательное (с параметром 1) время по закону марковского процесса X_t, а затем превращается в две точно такие же частицы. Полное число частиц в таком процессе (обозначим его ν_t) также образует ветвящийся процесс, но уже с одним типом.

Положим

$$P_t(z) = M(z^{\nu_t} \mid \nu_0 = 1), \ |z| \leqslant 1.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t(z) = P_t^2(z) - P_t(z), \ P_0(z) = z.$$

Решая это уравнение, находим

$$P_t(z) = 1 - \frac{1 - z}{1 - z(1 - e^{-t})}.$$

Однако, если мы изменим только лишь знак функции (18), то она изменит вид на (2). И, стало быть, для того, чтобы получить вероятностное представление решения задачи (1), нам придется использовать ветвящийся процесс Иржины с бесконечным числом типов. Обозначим его M_t. Полную массу меры M_t обозначим μ_t, т. е. $\mu_t = M_t(E)$.

В рассматриваемой ситуации (т. е. когда $f(u) = u - u^2$) числовой процесс μ_t является непрерывным надкритическим процессом Иржины (процессом Иржины μ_t будет всегда, но в данном случае он непрерывен) с одним типом, и его переходная вероятность допускает явное вычисление. Обозначим

$$K_t(\lambda) = -\log M(e^{-\lambda\mu_t} \mid \mu_0 = 1), \ \lambda > 0.$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} K_t(\lambda) = K_t(\lambda) - K_t^2(\lambda), \ K_0(\lambda) = \lambda.$$

Решая это уравнение, находим

$$K_t(\lambda) = \frac{\lambda e^t}{1 + \lambda(e^\lambda - 1)}.$$

1. *Сафарян Р. Г.* Ветвящиеся диффузионные процессы и системы дифференциальных уравнений реакция-диффузия // Мат. сб.— 1987.— 134, № 4.— С. 530 –545.
2. *Jirina M.* Branching processes with Measure-Valued states // Trans. Third Conf. Inform. Theory.— Prague, 1960.— P. 333—357.
3. *Рыжов Ю. М., Скороход А. В.* Однородные ветвящиеся процессы с конечным числом типов и непрерывно меняющейся массой // Теория вероятностей и ее применения.—1970.— 15, вып. 4.— С. 722—726.
4. *Шуренков В. М.* Эргодические процессы Маркова.— М. : Наука, 1989.— 332 с.
5. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы.— М. : Физматгиз, 1963.— 860 с.

6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.— М. : Наука, 1973.— Т. 2.— 639 с.
7. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнений диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Сер. А.— 1937.— **1**.— С. 1—26.

Получено 15.02.90