УДК 517.9

С. З. КУРБАНШОЕВ, канд. физ.-мат. наук (Душанбин. пед. ин-т)

Об аналитических решениях систем функциональных уравнений

Изучаются аналитические свойства интегральных многообразий систем разностных уравнений. Определяются аналитические решения систем функциональных уравнений в виде степенного разложения.

Вивчаються аналітичні властивості інтегральних многовидів систем різницевих рівнянь. Визначаються аналітичні розв'язки систем функціональних рівнянь у вигляді степеневого розкладу.

Рассматривается система разностных уравнений

$$X_{n+1} = A_1 X_n + \varepsilon F_1 (X_n, Y_n, \varepsilon), \quad Y_{n+1} = A_2 Y_n + \varepsilon F_2 (X_n, Y_n, \varepsilon), \qquad (1)$$

где $\dim X_n = q$, $\dim Y_n = p$, $p + q = m$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Предположим, что спектр матрицы A_1 лежит в области $|z| < 1$, а спектр матрицы A_2 — в области $|z| > 1$. Вектор-функции $F_i (X, Y, \varepsilon)$, $i = 1, 2$, являются непрерывными и аналитическими функциями от X, Y, ε в некоторой области D, где

$$D = \{\| X \| < R, \ \| Y \| < R, \ |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0\}. \qquad (2)$$

Пусть разложение вектор-функции $F_i (X, Y, \varepsilon)$, $i = 1, 2$, в степенных рядах начинается с членов не ниже второго порядка и в области D удовлетворяет условиям

$$F_i(0, 0, \varepsilon) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

$$\| F_i(X_1, Y_1, \varepsilon) - F_i(X_2, Y_2, \varepsilon) \| \leqslant L(R) \max \{\| X_1 - X_2 \|, \| Y_1 - Y_2 \|\},$$

где $L(R) \to 0$ при $\| X_1 \| + \| X_2 \| \to 0$, $\| Y_1 \| + \| Y_2 \| \to 0$.

Для векторов $X = (x_1, x_2, \ldots, x_q)^T$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)^T$ используем нормы

$$\| X \| \equiv \max_j \{| x_j |\}, \quad j = 1, 2, \ldots, q; \qquad \| Y \| \equiv \max_s \{| y_s |\}, \quad s = 1, 2, \ldots, p.$$

Полагаем, что для матриц A_1, A_2 выполнены условия

$$\| A_1^n \| \leqslant c\rho^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \| A_2^{-n} \| \leqslant c\rho^n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$c \geqslant 1, \quad 0 < \rho < 1. \tag{4}$$

Если положим

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} (Ez - A)^{-1} dz, \quad P_2 = E - P_1,$$

то для матрицы Грина $G(n, k)$ получим формулы

$$G(n, k) = A^{n-k-1} P_1, \quad n \geqslant k + 1; \qquad G(n, k) = - A^{n-k-1}, \quad n \leqslant k,$$

где $\operatorname{rang} P_1 = q$, $\operatorname{rang} P_2 = p$, $p + q = m$. При этом для матрицы Грина будут выполнены неравенства

$$\| G(n, k) \| \leqslant c\rho^{|n-k-1|}, \quad n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{5}$$

При выполнении условий $rc < R$, $1 - rcR^{-1} > | \varepsilon | gL(R)$, где $g \equiv \equiv \sup\limits_n \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \| G(n, k) \| \leqslant c(1 + \rho)(1 - \rho)^{-1}$, $0 < r < R$, в силу результатов работы [1] проектор $P_1(X, \varepsilon)$ можно представить в виде

$$P_1(Z, \varepsilon) = \begin{pmatrix} X + \varepsilon S_1(X, Y, \varepsilon) \\ \varepsilon S_2(X, Y, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

где векторы $S_i(X, Y, \varepsilon)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям

$$\| S_i(X_1, Y_1, \varepsilon) - S_i(X_2, Y_2, \varepsilon) \| \leqslant \frac{cgL(R)}{1 - | \varepsilon | gL(R)} \max \{\| X_1 - X_2 \|, \| Y_1 - Y_2 \|\}$$

в области D_1, где

$$D_1 = \{\| X \| < r, \ \| Y \| < r, \ | \varepsilon | < \varepsilon_1\}, \quad \varepsilon_1 \equiv \{\varepsilon_0, g^{-1} L^{-1}(R)(1 - 2cR^{-1})\}.$$

Интегральное многообразие G_1 системы (1) определяется системой уравнений

$$Y = \varepsilon S_2(X, Y, \varepsilon), \tag{6}$$

а интегральное многообразие G_2 системы (1) — системой уравнений

$$- X + \varepsilon S_1(- X, - Y, \varepsilon) = 0. \tag{7}$$

Решение $Y = \Phi(X, \varepsilon)$, $X = \Psi(Y, \varepsilon)$ систем неявных уравнений (6), (7) можно найти методом последовательных приближений:

$$\Phi_0(X, \varepsilon) \equiv 0, \quad \Phi_{i+1}(X, \varepsilon) = \varepsilon S_2(X, \Phi_i(X, \varepsilon), \varepsilon), \quad \Phi(X, \varepsilon) = \lim_{i \to \infty} \Phi_i(X, \varepsilon),$$

$$\Psi_0(Y, \varepsilon) \equiv 0, \quad \Psi_{i+1}(Y, \varepsilon) = \varepsilon S_2(- \Psi_i(Y, \varepsilon), -Y, \varepsilon), \quad \Psi(Y, \varepsilon) = \lim_{i \to \infty} \Psi_i(Y, \varepsilon).$$

Для аналитичности вектор-функций $\Phi(X, \varepsilon)$, $\Psi(Y, \varepsilon)$ в области D_2, где

$$D_2 = \{\| X \| < r, \ \| Y \| < r, \ | \varepsilon | < \varepsilon_2\}, \quad \varepsilon_3 \equiv \min \{\varepsilon_2, g^{-1}(1 + c)^{-1} L^{-1}(R)\}, \tag{8}$$

достаточно, чтобы последовательности $\Phi_i(X, \varepsilon)$, $\Psi_i(Y, \varepsilon)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, сходились равномерно по X, Y, ε и чтобы при любом значении $i = 0, 1, 2, \ldots$, выполнялись условия

$$\|\Phi_i(X, \varepsilon)\| < r, \quad \|\Psi_i(X, \varepsilon)\| < r, \quad i = 0, 1, 2, \ldots . \tag{9}$$

Это приводит к дополнительному неравенству $|\varepsilon| g(1 + c) L(R) < 1$, откуда следует ограничение на параметр ε (8).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в системе разностных уравнений* (1) *вектор-функции* $F_i(X, Y, \varepsilon)$, $i = 1, 2$, *аналитичны относительно* X, Y, ε *в области* D *и удовлетворяют условиям* (3). *Если при* $\varepsilon = 0$ *система разностных уравнений* (1) *экспоненциально дихотомична, т. е. для матриц* A_1, A_2 *выполнены условия* (4), *то при выполнении условий*

$$rcR^{-1} + |\varepsilon| gL(R) < 1, \quad |\varepsilon| g(1 + c) L(R) < 1 \tag{10}$$

система разностных уравнений (1) *имеет аналитическое интегральное многообразие решений* G_1 *размерности* q, *стремящихся к нулю при* $n \to +\infty$ *и определяемых системой уравнений вида* $Y = \Phi(X, \varepsilon)$.

Аналогично система разностных уравнений (1) *имеет аналитическое интегральное многообразие решений* G_2 *размерности* p, *стремящихся к нулю при* $n \to -\infty$ *и определяемых системой уравнений вида* $X = \Psi(Y, \varepsilon)$.

Интегральные многообразия решений G_1, G_2 системы разностных уравнений (1) являются аналитическими, так как определяются аналитическими функциями [2]. При этом вектора $\Phi(X, \varepsilon)$, $\Psi(Y, \varepsilon)$ аналитичны в области D_2 и удовлетворяют условиям ограниченности (9).

Для определения интегральных многообразий $Y = \Phi(X, \varepsilon)$, $X = \Psi(Y, \varepsilon)$ можно использовать системы функциональных уравнений. Поскольку должны выполняться равенства

$$Y_n = \Phi(X_n, \varepsilon), \quad Y_{n+1} = \Phi(X_{n+1}, \varepsilon), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

то из системы разностных уравнений (1) получим систему функциональных уравнений

$$A_2\Phi(X, \varepsilon) + \varepsilon F_2(X, \Phi(X, \varepsilon), \varepsilon) = \Phi(A_1X + \varepsilon F_1(X, \Phi(X, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon). \tag{11}$$

Аналитическое относительно X, ε решение системы функциональных уравнений (11) однозначно определяется при отыскании решения в виде степенного разложения

$$\Phi(X, \varepsilon) = \sum_{m_i=0}^{\infty} \Phi_{m_0, m_1, \ldots, m_q} \varepsilon^{m_0} x_1^{m_1} \ldots x_q^{m_q}, \quad i = 0, 1, \ldots, q. \tag{12}$$

Подставляя разложение (12) в систему уравнений (11) можно последовательно определить все коэффициенты разложения, достаточные условия сходимости, которые даются в теореме 1. Для решения системы уравнений (11) используем метод последовательных приближений

$$\Phi_0(X, \varepsilon) \equiv 0, \quad \Phi_{i+1}(X, \varepsilon) = -\varepsilon A_2^{-1} F_2(X, \Phi_i(X, \varepsilon), \varepsilon) + A_2^{-1} \Phi_i \times$$
$$\times (A_1 Y + \varepsilon F_1(X, \Phi_i(X, \varepsilon), \varepsilon) \varepsilon), \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$\Phi(X, \varepsilon) = \lim_{i \to \infty} \Phi_i(X, \varepsilon).$$

Аналогично для вектора $\Psi(Y, \varepsilon)$ легко выводится система функциональных уравнений

$$A_1 \Psi(Y, \varepsilon) + \varepsilon F_1(\Psi(Y, \varepsilon), Y, \varepsilon) = \Psi(A_2 Y + \varepsilon F_2(\Psi(Y, \varepsilon), Y, \varepsilon), \varepsilon). \tag{13}$$

Решение системы уравнений (13) однозначно определяется при отыскании его в виде степенного разложения

$$\Psi(Y, \varepsilon) = \sum_{m_j=0}^{\infty} \Psi_{m_0, m_1, \ldots, m_p} \varepsilon^{m_0} y_1^{m_1} \ldots y_p^{m_p}, \quad j = 0, 1, \ldots, p. \tag{14}$$

Т е о р е м а 2. *Пусть в системе функциональных уравнений* (11) *или* (13) *векторы* $F_i(X, Y, \varepsilon)$, $i = 1, 2$, *аналитичны в некоторой окрестности точки* $X = 0$, $y = 0$, $\varepsilon = 0$, $F_i(0, 0, \varepsilon) = 0$, $i = 1, 2$. *Если спектр матрицы* A_1 *лежит в области* $|z| < 1$, *а спектр матрицы* A_2 — *в области* $|z| > 1$, *то системы функциональных уравнений* (11), (12) *имеют единственные аналитические решения* $Y = \Phi(X, \varepsilon)$, $X = \Psi(Y, \varepsilon)$, *определяемые разложениями вида* (12), (14) *и такие, что* $\Phi(0, \varepsilon) \equiv 0$, $\Psi(0, \varepsilon) \equiv 0$.

1. *Валеев К. Г., Курбаншоев С. З.* Построение нелинейных проекторов систем разностных уравнений // Дифференциальные уравнения с частными производными.— Л. : Ленингр. пед. ин-т, 1988.— С. 138—147.
2. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— 388 с.

Получено 29.12.89