УДК 517.956

В. А. МАЛОВИЧКО, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

О разрешимости нелокальных краевых задач для некоторых систем эволюционных дифференциальных уравнений

Доказана однозначная сильная разрешимость нелокальных краевых задач для двух систем эволюционных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков.

Доведена однозначна сильна розв'язність нелокальних граничних задач для двох систем еволюційних диференціальних рівнянь третього і четвертого порядків.

В прямоугольной области $Q = \{(x, t) : \alpha < x < \beta,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим две системы дифференциальных уравнений

$$\mathcal{L}_1 u(x, t) \equiv u_{tt} - (a(x)\, u_x)_{xtt} - (b(x, t)\, u_x)_x + c(x, t)\, u = f(x, t), \tag{1}$$

$$\mathcal{L}_2 u(x, t) \equiv u_{tt} - (a(x)\, u_x)_{xt} - (b(x, t)\, u_x)_x + c(x, t)\, u = f(x, t), \tag{2}$$

где u, f — m-мерные вектор-функции (дальше будем называть их функциями); a, b, c — симметричные матрицы порядка m, причем $a \in C^1([\alpha, \beta])$, $b, c \in C^1(\bar{Q})$, $a(\alpha) = a(\beta)$, $b(\alpha, t) = b(\beta, t)$ и для любого вектора $z \in R_m$ в области $\bar{Q}$ выполняются неравенства $a(x)\, zz \geqslant \nu zz$, $b(x, t)\, zz \geqslant 0$, $c(x, t)\, zz \geqslant 0$, $\nu > 0$.

В настоящей статье при помощи энергетических неравенств в позитивных и негативных нормах доказана однозначная сильная разрешимость следующих нелокальных краевых задач для систем (1), (2).

З а д а ч а 1. *В области Q найти решение системы* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(\alpha, t) = \lambda u(\beta, t), \quad \lambda u_x(\alpha, t) = u_x(\beta, t), \quad u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \tag{3}$$

где $\lambda = \mathrm{const} \neq 1$.

З а д а ч а 2. *В области Q найти решение системы* (2), *удовлетворяющее краевым условиям* (3).

Можно убедиться непосредственной проверкой, что сопряженными к задачам 1, 2 будут соответственно такие задачи.

З а д а ч а 1*. *В области Q найти решение системы $\mathcal{L}_1 v(x, t) = f(x, t)$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$v(\alpha, t) = \lambda v(\beta, t), \quad \lambda v_x(\alpha, t) = v_x(\beta, t), \quad v(x, T) = v_t(x, T) = 0. \tag{4}$$

З а д а ч а 2*. *В области Q найти решение системы $\mathcal{L}_2^* v(x, t) = f(x, t)$, удовлетворяющее краевым условиям* (4), *где $\mathcal{L}_2^*$ — оператор, формально сопряженный с оператором $\mathcal{L}_2$*.

Отметим, что при $m = 1$ уравнение (1) описывает продольные волны в стержнях и другие физические явления [1, с. 351], а уравнение (2) описывает распространение возмущений в вязких средах [2].

Будем пользоваться следующими обозначениями: W, W^* — пространства гладких в $\bar{Q}$ функций, удовлетворяющих соответственно условиям (3) и (4); H_+ (H_+^*) — гильбертово пространство, полученное замыканием пространства W (W^*) по норме

$$\| u \|^2 = \int_Q (u_t u_t + u_{xt} u_{xt})\, dQ;$$

H_- (H_-^*) — пространство с негативной нормой [3, с. 46], построенное по $L_2(Q)$ и H_+ (H_+^*).

Л е м м а 1. *Для функций $u \in H_+$, $v \in H_+^*$ выполняются энергетические неравенства*

$$\alpha_i \| u \|_{H_+} \geqslant \| \mathcal{L}_i u \|_{H_-^*}, \tag{5}$$

© В. А. МАЛОВИЧКО, 1991

$$\alpha_1^* \| v \|_{H_+^*} \geqslant \| \mathscr{L}_1 v \|_{H_-}, \quad \alpha_2^* \| v \|_{H_+^*} \geqslant \| \mathscr{L}_2^* v \|_{H_-},$$

где $\alpha_i > 0$, $\alpha_i^* > 0$, $i = 1, 2$.

Доказательство. Докажем неравенство (5) при $i = 1$. Пусть $u \in W$. Применяя интегрирование по частям и учитывая краевые условия (3), (4) и неравенство Фридрихса

$$\| u \|_{L_2(Q)} \leqslant \nu_1 \| u_t \|_{L_2(Q)}, \quad \nu_1 > 0,$$

имеем

$$\| \mathscr{L}_1 u \|_{H_-^*} = \sup_{v \in H_+^*} \| v \|_{H_+^*}^{-1} (\mathscr{L}_1 u, v)_{L_2(Q)} = \sup_{v \in W^*} \| v \|_{H_+^*}^{-1} \int_Q (-u_t v_t - a u_{xt} v_{xt} +$$

$$+ b u_x v_x + cuv)\, dQ \leqslant \sup_{v \in W^*} \| v \|_{H_+^*}^{-1} \alpha_1 \| u \|_{H_+} \| v \|_{H_+^*} = \alpha_1 \| u \|_{H_+}. \qquad (6)$$

Осуществляя в (6) предельный переход, докажем неравенство (5) при $i = 1$ для всех $u \in H_+$.

Остальные утверждения леммы 1 доказываются аналогично.

Лемма 2. *Если для любого вектора $z \in R^m$ в области Q выполняются неравенства*

$$[b(x, t) + (T - t)\, b_t(x, t)]\, zz \geqslant 0, \quad [c(x, t) + (T - t)\, c_t(x, t)]\, zz \geqslant 0, \qquad (7)$$

то для всех функций $u \in H_+$ выполняется энергетическое неравенство

$$\| \mathscr{L}_1 u \|_{H_-^*} \geqslant \beta_1 \| u \|_{L_2(Q)}, \quad \beta_1 > 0, \qquad (8)$$

а если выполняются неравенства

$$[b(x, t) - t b_t(x, t)]\, zz \geqslant 0, \quad [c(x, t) - t c_t(x, t)]\, zz \geqslant 0, \qquad (9)$$

то для всех функций $v \in H_+^*$ выполняется энергетическое неравенство

$$\| \mathscr{L}_1 v \|_{H_-} \geqslant \beta_1^* \| v \|_{L_2(Q)}, \quad \beta_1^* > 0. \qquad (10)$$

Доказательство. Введем для функций $u \in W$ интегральное преобразование

$$v(x, t) = \int_t^T (T - t)\, u(x, t)\, dt.$$

Очевидно, при этом $v \in W^*$, $v_t(x, t) = -(T - t)\, u(x, t)$. Применяя обобщенное неравенство Шварца, интегрируя по частям и учитывая условия (7), приходим к неравенству

$$\| \mathscr{L}_1 u \|_{H_-^*} \| v \|_{H_+^*} \geqslant \int_Q \mathscr{L}_1 u \cdot v\, dQ = \int_Q (u v_{tt} + a u_x v_{xtt} + b u_x v_x + cuv)\, dQ =$$

$$= - \int_Q (T - t)^{-1} (v_t v_{tt} + a v_{xt} v_{xtt} + b v_{xt} v_x + c v_t v)\, dQ \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \int_Q (T - t)^{-2} \left\{ v_t v_t + a v_{xt} v_{xt} + [b + (T - t)\, b_t]\, v_x v_x + [c + (T - t) c_t] vv \right\} dQ \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \left(\int_Q uu\, dQ \right)^{1/2} \left[\int_Q (T - t)^{-2} (v_t v_t + \nu v_{xt} v_{xt})\, dQ \right]^{1/2} \geqslant \beta_1 \| u \|_{L_2(Q)} \| v \|_{H_+^*}. \qquad (11)$$

Теперь для доказательства неравенства (8) для всех $u \in H_+$ остается только сократить неравенство (11) на $\| v \|_{H_+^*}$ и осуществить предельный переход.

Неравенство (10) доказывается аналогично, при помощи интегрального преобразования

$$u(x, t) = \int_0^t t v(x, t)\, dt, \quad v \in W^*.$$

Л е м м а 3. *Если выполняются условия* (7), *то для всех функций* $u \in H_+$ *выполняется энергетическое неравенство*

$$\| \mathcal{L}_2 u \|_{H_-^*} \geqslant \beta_2 \| u \|_{L_2(Q)}, \quad \beta_2 > 0,$$

а если выполняются условия (9), *то для всех функций* $v \in H_+^*$ *выполняется энергетическое неравенство*

$$\| \mathcal{L}_2^* v \|_{H_-} \geqslant \beta_2^* \| v \|_{L_2(Q)}, \quad \beta_2^* > 0.$$

Доказательство леммы 3 аналогично доказательству леммы 2.

О п р е д е л е н и е 1. *Пусть* $f \in L_2(Q)$. *Функцию* $u \in H_+$ *назовем сильным решением* i-*й задачи*, $i = 1, 2$, *если существует последовательность* $u_k \in W$ *такая, что*

$$\lim_{k \to \infty} \| u_k - u \|_{H_+} = \lim_{k \to \infty} \| \mathcal{L}_i u_k - f \|_{H_-^*} = 0.$$

О п р е д е л е н и е 2. *Пусть* $f \in H_-^*$. *Функцию* $u \in L_2(Q)$ *назовем сильным решением* i-*й задачи*, $i = 1, 2$, *если существует последовательность* $u_k \in W$ *такая, что*

$$\lim_{k \to \infty} \| u_k - u \|_{L_2(Q)} = \lim_{k \to \infty} \| \mathcal{L}_i u_k - f \|_{H_-^*} = 0.$$

Согласно [3, с. 93; 4, с. 183] следствием лемм 1—3 является такая теорема.

Т е о р е м а 1. *Если выполняются условия* (7), (9), *то для любой функции* $f \in L_2(Q)$ *существует единственное сильное решение* $u \in H_+$ i-*й задачи в смысле определения* 1, *а для любой функции* $f \in H_-^*$ *существует единственное сильное решение* $u \in L_2(Q)$ i-*й задачи в смысле определения* 2, $i = 1, 2$.

Далее, не меняя обозначений, будем считать, что коэффициенты систем (1), (2) не зависят от x, т. е. будем считать, что матрица $a(x) \equiv a$ постоянна, а матрицы $b(x, t) \equiv b(t)$, $c(x, t) \equiv c(t)$ зависят только от t. Покажем, что при этом дополнительном предположении можно доказать существование более гладких решений задач 1, 2.

Пусть $\mathcal{H}_+ (\mathcal{H}_+^*)$ — гильбертово пространство, полученное замыканием пространства $W (W^*)$ по норме

$$\| u \|^2 = \int_Q u_{xxt} u_{xxt} dQ, \tag{12}$$

$\mathcal{H}_- (\mathcal{H}_-^*)$ — пространство с негативной нормой, построенное по $L_2(Q)$ и $\mathcal{H}_+ (\mathcal{H}_+^*)$. Согласно [5] для всех функций из пространств W, W^* выполняются неравенства

$$\| u \|_{L_2(Q)} \leqslant \nu_2 \| u_x \|_{L_2(Q)} \leqslant \nu_3 \| u_{xx} \|_{L_2(Q)}, \quad \nu_{2,3} > 0, \tag{13}$$

из которых следует, что формула (12) действительно определяет норму в соответствующих пространствах.

Л е м м а 4. *Для всех функций* $u \in \mathcal{H}_+$, $v \in \mathcal{H}_+^*$ *выполняются энергетические неравенства*

$$\gamma_i \| u \|_{\mathcal{H}_+} \geqslant \| \mathcal{L}_i u \|_{\mathcal{H}_-^*}, \quad \gamma_1^* \| v \|_{\mathcal{H}_+^*} \geqslant \| \mathcal{L}_1 v \|_{\mathcal{H}_-},$$

$$\gamma_2^* \| v \|_{\mathcal{H}_+^*} \geqslant \| \mathcal{L}_2^* v \|_{\mathcal{H}_-}, \tag{14}$$

где $\gamma_i > 0$, $\gamma_i^* > 0$, $i = 1, 2$.

Доказывается лемма 4 аналогично лемме 1 с учетом (13).

Л е м м а 5. *Если для любого вектора* $z \in R^m$ *и всех* $t \in (0, T)$ *выполняются неравенства*

$$[b(t) + (T - t) b_t(t)] zz \geqslant 0, \quad [c(t) + (T - t) c_t(t)] zz \geqslant 0, \tag{15}$$

то для всех функций $u \in \mathcal{H}_+$ *выполняется энергетическое неравенство*

$$\| \mathcal{L}_1 u \|_{\mathcal{H}^*_-} \geqslant \delta_1 \| u \|_{L_2(Q)}, \quad \delta_1 > 0, \tag{16}$$

а если выполняются неравенства

$$[b(t) - tb_t(t)]\, zz \geqslant 0, \quad [c(t) - tc_t(t)]\, zz \geqslant 0, \tag{17}$$

то для всех функций $v \in \mathcal{H}^*_+$ *выполняется энергетическое неравенство*

$$\| \mathcal{L}_1 v \|_{\mathcal{H}_-} \geqslant \delta_1^* \| v \|_{L_2(Q)}, \quad \delta_1^* > 0. \tag{18}$$

Доказательство. Для функций $u \in W$ введем интегральное преобразование

$$v(x, t) = \int_t^T (T - t) \left[\int_\alpha^x \left(\int_\alpha^x u(y, t)\, dy - \frac{1}{1 - \lambda} \int_\alpha^\beta u(y, t)\, dy \right) dx + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \int_\alpha^\beta \left(\int_\alpha^x u(y, t)\, dy - \frac{1}{1 - \lambda} \int_\alpha^\beta u(y, t)\, dy \right) dx \right] dt. \tag{19}$$

Можно проверить, что при этом $v \in W^*$ и $v_{xxt}(x, t) = -(T - t)\, u(x, t)$. Применяя обобщенное неравенство Шварца, интегрируя по частям и учитывая неравенство (15), получаем

$$\| \mathcal{L}_1 u \|_{\mathcal{H}^*_-} \| v \|_{\mathcal{H}^*_+} \geqslant - \int_Q \mathcal{L}_1 u \cdot v dQ = - \int_Q (u v_{tt} - a u v_{xxtt} - b u v_{xx} + c u v)\, dQ =$$

$$= - \int_Q (T - t)^{-1} (v_{xt} v_{xtt} + a v_{xxt} v_{xxtt} + b v_{xxt} v_{xx} + c v_{xt} v_x)\, dQ \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \int_Q (T - t)^{-2} \{ v_{xt} v_{xt} + a v_{xxt} v_{xxt} + [b + (T - t) b_t]\, v_{xx} v_{xx} + [c + (T -$$

$$- t)\, c_t]\, v_x v_x \}\, dQ \geqslant \frac{\nu}{2} \int_Q (T - t)^{-2} v_{xxt} v_{xxt} dQ \geqslant \delta_1 \| u \|_{L_2(Q)} \| v \|_{\mathcal{H}^*_+}, \tag{20}$$

Сократив в (20) на $\| v \|_{\mathcal{H}^*_+}$ и осуществив предельный переход, докажем неравенство (16) для всех $u \in \mathcal{H}_+$.

Неравенство (18) доказывается аналогично, с помощью интегрального преобразования

$$u(x, t) = \int_0^t t \left[\int_\alpha^x \left(\int_\alpha^x v(y, t)\, dy - \frac{1}{1 - \lambda} \int_\alpha^\beta v(y, t)\, dy \right) dx + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{1 + \lambda} \int_\alpha^\beta \left(\int_\alpha^x v(y, t)\, dy - \frac{1}{1 - \lambda} \int_\alpha^\beta v(y, t)\, dy \right) dx \right] dt, \quad v \in W^*. \tag{21}$$

Лемма 6. *Если выполняются условия* (15), *то для всех функций* $u \in \mathcal{H}_+$ *выполняется энергетическое неравенство*

$$\| \mathcal{L}_2 u \|_{\mathcal{H}^*_-} \geqslant \delta_2 \| \sqrt{T - t}\, u \|_{L_2(Q)}, \quad \delta_2 > 0, \tag{22}$$

а если выполняются условия (17), *то для всех функций* $v \in \mathcal{H}^*_+$ *выполняется энергетическое неравенство*

$$\| \mathcal{L}_2^* v \|_{\mathcal{H}_-} \geqslant \delta_2^* \| \sqrt{t}\, v \|_{L_2(Q)}, \quad \delta_2^* > 0. \tag{23}$$

Доказательство. Пусть функция v определяется выражением (19), где $u \in W$. Так же, как при доказательстве неравенства (20), с учетом условий (15) приходим к неравенству

$$\|\mathcal{L}_2 u\|_{\mathcal{H}^*_-} \|v\|_{\mathcal{H}^*_+} \geqslant -\int\limits_{\dot Q} \mathcal{L}_2 u \cdot v dQ = -\int\limits_{\dot Q} (T-t)^{-1} (v_{xt} v_{xtt} - a v_{xxt} v_{xxt} +$$

$$+ b v_{xxt} v_{xx} + c v_{xt} v_x)\, dQ \geqslant \nu \int\limits_{\dot Q'} (T-t)^{-1} v_{xxt} v_{xxt} dQ + \frac{1}{2} \int\limits_{\dot Q'} (T-t)^{-2} \{v_{xt} v_{xt} +$$

$$+ [b + (T-t) b_t] v_{xx} v_{xx} + [c + (T-t) c_t] v_x v_x\}\, dQ \geqslant \nu \left| \int\limits_{\dot Q} (T-t)\, uu dQ \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{\dot Q} (T-t)^{-1} v_{xxt} v_{xxt} dQ \right|^{1/2} \geqslant \delta_2 \| \sqrt{T-t}\, u \|_{L_2(Q)} \|v\|_{\mathcal{H}^*_+},$$

из которого следует неравенство (22).

Неравенство (23) доказывается аналогично при помощи интегрального преобразования (21).

Определение 3. *Пусть $f \in L_2(Q)$. Функцию $u \in \mathcal{H}_+$ назовем сильным решением i-й задачи $i = 1, 2$, если существует последовательность $u_k \in W$ такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{\mathcal{H}_+} = \lim_{k\to\infty} \|\mathcal{L}_i u_k - f\|_{\mathcal{H}^*_-} = 0.$$

Определение 4. *Пусть $f \in \mathcal{H}^*_-$. Функцию $u \in L_2(Q)$ назовем сильным решением задачи 1, если существует последовательность $u_k \in W$ такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{L_2(Q)} = \lim_{k\to\infty} \|\mathcal{L}_1 u_k - f\|_{\mathcal{H}^*_-} = 0.$$

Следствием лемм 4, 5 являются теоремы 2 и 3.

Теорема 2. *Если выполняются условия* (15), (17), *то для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует единственное сильное решение $u \in \mathcal{H}_+$ задачи 1 в смысле определения 3, а для любой функции $f \in \mathcal{H}^*_-$ существует единственное сильное решение $u \in L_2(Q)$ задачи 1 в смысле определения 4.*

Теорема 3. *Если выполняются условия* (15), (17), *то для любой функции f такой, что $t^{-1/2} f \in L_2(Q)$ существует единственное сильное решение $u \in \mathcal{H}_+$ задачи 2 в смысле определения 3.*

Доказательство. Рассмотрим функционал $(f, v)_{L_2(Q)}$, $v \in W^*$. Используя неравенство Гельдера и неравенство (23), получаем неравенство

$$|(f, v)_{L_2(Q)}| \leqslant \|t^{-1/2} f\|_{L_2(Q)} \|\sqrt{t}\, v\|_{L_2(Q)} \leqslant \delta \|\mathcal{L}^*_2 v\|_{\mathcal{H}_-}, \ \delta > 0,$$

из которого следует, что функционал $(f, v)_{L_2(Q)}$ является линейным непрерывным функционалом от $\mathcal{L}^*_2 v$. Следовательно, по теореме Хана — Банаха его можно расширить линейно и непрерывно на все пространство $\mathcal{H}_-$. На основании теоремы об общем виде линейного непрерывного функционала заключаем, что существует функция $u \in \mathcal{H}_+$ такая, что

$$(u, \mathcal{L}^*_2 v)_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}, \ v \in W^*, \tag{24}$$

т. е. функция u является слабым решением задачи 2. Покажем, что эта функция является также сильным решением.

Поскольку W плотно в $\mathcal{H}_+$, то найдется такая последовательность $u_k \in W$, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{\mathcal{H}_+} = 0$. Используя неравенство (14) и равенство (24), получаем

$$\|\mathcal{L}_2 u_k - f\|_{\mathcal{H}^*_-} = \sup_{v \in \mathcal{H}^*_+} \|v\|^{-1}_{\mathcal{H}^*_+} (\mathcal{L}_2 u_k - f, v)_{L_2(Q)} = \sup_{v \in W^*} \|v\|^{-1}_{\mathcal{H}^*_+} [(\mathcal{L}_2 u_k, v)_{L_2(Q)} -$$

$$-(f, v)_{L_2(Q)}] = \sup_{v \in W^*} \| v \|^{-1}_{\mathscr{H}^*_+} [(u_k, \overset{*}{\mathscr{L}_2} v)_{L_2(Q)} - (u, \overset{*}{\mathscr{L}_2} v)_{L_2(Q)}] =$$

$$= \leqslant \sup_{v \in W^*} \| v \|^{-1}_{\mathscr{H}^*_+} \overset{*}{\gamma_2} \| u_k - u \|_{\mathscr{H}_+} \| v \|_{\mathscr{H}^*_+} = \overset{*}{\gamma_2} \| u_k - u \|_{\mathscr{H}_+} \underset{k \to \infty}{\to} 0.$$

Таким образом, существование сильного решения задачи 2 доказано. Единственность этого решения следует из неравенства (22).

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.— М. : Мир, 1977.— 624 с.
2. *Сувейка И. В.* Смешанные задачи для уравнения распространения возмущений в вязких средах // Дифференц. уравнения.— 1983.— **19**, № 2.— С. 337—347.
3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.
4. *Ляшко И. И., Диденко В. П., Цитрицкий О. Е.* Фильтрация шумов.— Киев : Наук. думка, 1979.— 232 с.
5. *Маловичко В. А.* Нелокальные краевые задачи для систем дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами эллиптического типа.— Киев, 1989.— 31 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.74).

Получено 21.03.90