УДК 519.21

**М. П. МОКЛЯЧУК**, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

# Об экстраполяции преобразований случайных процессов, возмущаемых белым шумом

Рассмотрена задача линейного среднеквадратически оптимального оценивания преобразования $A\xi = \int_0^\infty a(t)\,\xi(t)\,dt$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ по наблюдениям процесса $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \leqslant 0$, где $\eta(t)$ — некоррелированный с $\xi(t)$ белый шум. Найдены наименее благоприятные спектральные плотности $f_0(\lambda) \in \mathcal{D}$ и минимаксные (робастные) спектральные характеристики оптимальной оценки преобразования $A\xi$ для различных классов плотностей $\mathcal{D}$.

Розглянута задача лінійного середньоквадратично оптимального оцінювання перетворення $A\xi = \int_0^\infty a(t)\,\xi(t)\,dt$ стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \leqslant 0$, де $\eta(t)$ — некорельований з $\xi(t)$ білий шум. Знайдені найменш сприятливі спектральні щільності $f_0(\lambda) \in \mathcal{D}$ та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики оптимальної оцінки перетворення $A\xi$ для різних класів щільностей $\mathcal{D}$.

В настоящей статье рассматривается задача линейного среднеквадратически оптимального оценивания преобразований вида

$$A\xi = \int_0^\infty a(t)\,\xi(t)\,dt$$

стационарных случайных процессов $\xi(t)$ по наблюдениям процесса $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \leqslant 0$, где $\eta(t)$ — некоррелированный с $\xi(t)$ белый шум. Найдены наименее благоприятные спектральные плотности $f_0(\lambda) \in \mathcal{D}$ и минимаксные (робастные) спектральные характеристики оптимальной оценки преобразования $A\xi$ для различных классов плотностей $\mathcal{D}$.

Пусть $\xi(t)$, $\eta(t)$ — некоррелированные стационарные случайные процессы, $M\xi(t) = 0$, $M\eta(t) = 0$. Пусть процесс $\xi(t)$ имеет плотность $f(\lambda)$, а процесс $\eta(t)$ — это белый шум с дисперсией $\sigma^2$. При заданной плотности

$f(\lambda)$ величину среднеквадратической ошибки линейной оценки $\hat{A}\xi$ преобразования $A\xi$ можно вычислить по формуле

$$\Delta(h, f) = M\,|A\xi - \hat{A}\xi|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |A(\lambda) - h(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda + \frac{\sigma^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)|^2\, d\lambda,$$

где $A(\lambda) = \int_0^{\infty} a(t)\, e^{it\lambda}\, dt$, $h(\lambda)$ — спектральная характеристика оценки $\hat{A}\xi$, и существует функция $h(f) \in L_2^-(f(\lambda) + \sigma^2)$ такая, что

$$\Delta(h(f), f) = \min_{h \in L_2^-(f(\lambda)+\sigma^2)} \Delta(h, f) = \| Ad \|^2 - \sigma^2 \| a \|^2, \tag{1}$$

где $A$ — оператор в $L_2[0, \infty)$, задаваемый соотношением

$$(Ad)(t) = \int_0^{\infty} a(t+u)\, d(u)\, du, \quad \| a \|^2 = \int_0^{\infty} |a(t)|^2 dt.$$

Функция $h(f)$ — спектральная характеристика оптимальной линейной оценки преобразования $A\xi$:

$$h(f) = A(\lambda) - r(\lambda)\, \varphi^{-1}(\lambda), \; r(\lambda) = \int_0^{\infty} (Ad)(t)\, e^{it\lambda} dt. \tag{2}$$

Функция $d(u)$ находится по канонической факторизации плотности [1]

$$f(\lambda) + \sigma^2 = |\varphi(\lambda)|^2, \; \varphi(\lambda) = \int_0^{\infty} d(t)\, e^{-it\lambda} dt. \tag{3}$$

Для преобразования $A_T\xi = \int_0^T a(t)\, \xi(t)\, dt$ величину среднеквадратической ошибки и спектральную характеристику $h_T(f)$ можно вычислить по формуле

$$\Delta(h_T(f), f) = \| A_T d \|^2 - \sigma^2 \| a \|^2 = \int_0^T |(A_T d)|^2 dt - \sigma^2 \int_0^T |a(t)|^2 dt, \tag{4}$$

$$h_T(f) = A_T(\lambda) - r_T(\lambda)\, \varphi^{-1}(\lambda), \; A_T(\lambda) = \int_0^T a(t)\, e^{it\lambda} dt, \tag{5}$$

$$r_T(\lambda) = \int_0^T (A_T d)(t)\, e^{it\lambda} dt,$$

где $A_T$ — оператор в $L_2[0, T]$, задаваемый соотношением

$$(A_T d)(t) = \int_0^{T-t} a(t+u)\, d(u)\, du, \; 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Предполагается, что функция $a(t)$, задающая преобразование $A\xi$, удовлетворяет условиям

$$\int_0^{\infty} |a(t)|\, dt < \infty, \; \int_0^{\infty} t\, |a(t)|^2 dt < \infty. \tag{6}$$

Формулы (1)—(5) позволяют вычислить величину среднеквадратической ошибки и спектральную характеристику оптимальной линейной оценки преобразования $A\xi$ тогда, когда задана спектральная плотность $f(\lambda)$ процесса $\xi(t)$. В том случае, когда задается лишь множество $\mathcal{D}$ возможных значений плотности $f(\lambda)$, применяется минимаксный подход к задачам фильтрации случайных процессов и их преобразований [2—5]. Наименее благоприятная в классе $\mathcal{D}$ спектральная плотность $f_0(\lambda)$ при оптимальном линейном оценивании преобразования $A\xi$ определяется условием

$$\Delta(h(f_0), f_0) = \max_{f \in \mathcal{D}} \Delta(h(f), f) = \max_{f \in \mathcal{D}} \min_{h \in L_2^-(f(\lambda)+\sigma^2)} \Delta(h, f).$$

Учитывая возможность факторизации (3) плотности $f_0(\lambda) + \sigma^2$, можно утверждать, что справедлива такая лемма.

Лемма 1. *Спектральная плотность $f_0(\lambda) \in \mathcal{D}$ будет наименее благоприятной в классе $\mathcal{D}$ при оптимальном линейном оценивании преобразования $A\xi$, если*

$$f_0(\lambda) + \sigma^2 = \left|\int_0^\infty d_0(t)\, e^{-it\lambda} dt\right|^2$$

*и функция $d_0(t)$ — решение задачи на условный экстремум*

$$\| Ad \|^2 \to \max, \quad f(\lambda) = \left|\int_0^\infty d(t)\, e^{-it\lambda} dt\right|^2 - \sigma^2 \in \mathcal{D}. \tag{7}$$

Минимаксная (робастная) спектральная характеристика $h_0(\lambda)$ оптимальной оценки преобразования $A\xi$ определяется условием

$$h_0(\lambda) \in H_{\mathcal{D}} = \bigcap_{f \in \mathcal{D}} L_2^-(f(\lambda) + \sigma^2), \quad \min_{h \in H_{\mathcal{D}}} \max_{f \in \mathcal{D}} \Delta(h, f) = \max_{f \in \mathcal{D}} \Delta(h_0, f).$$

Наименее благоприятная спектральная плотность $f_0(\lambda) \in \mathcal{D}$ и минимаксная характеристика $h_0(\lambda)$ образуют седловую точку функции $\Delta(h, f)$ на множестве $H_{\mathcal{D}} \times \mathcal{D}$:

$$\Delta(h, f_0) \geqslant \Delta(h_0, f_0) \geqslant \Delta(h_0, f)\ \forall h \in H_{\mathcal{D}},\ \forall f \in \mathcal{D}.$$

Левая часть неравенств выполняется, если $h_0 = h(f_0) \in H_{\mathcal{D}}$. Правая часть неравенств выполняется, если $f_0$ — решение задачи на условный экстремум $\Delta(h(f_0), f_0) = \max_{f \in \mathcal{D}} \Delta(h(f_0), f)$. Если найдем решение $f_0$ этой задачи, то минимаксную спектральную характеристику находим по формуле (2) при условии, что $h(f_0) \in H_{\mathcal{D}}$. Функция $\Delta(h(f_0), f)$ имеет вид

$$\Delta(h(f_0), f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|r(\lambda)|^2}{f_0(\lambda) + \sigma^2} f(\lambda)\, d\lambda + \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |h_0(\lambda)|^2\, d\lambda,$$

где функции $r(\lambda) = r_{f_0}(\lambda)$, $h_0 = h(f_0)$ вычисляются по факторизации плотности $f_0(\lambda) + \sigma^2$. Поэтому наименее благоприятная спектральная плотность $f_0(\lambda)$ будет решением такой задачи на условный экстремум:

$$\Delta(f) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|r(\lambda)|^2}{f_0(\lambda) + \sigma^2} f(\lambda)\, d\lambda \to \inf, \quad f(\lambda) \in \mathcal{D}. \tag{8}$$

Пользуясь этим соотношением, можно найти наименее благоприятную спектральную плотность для конкретных классов плотностей $\mathcal{D}$. Задачу на условный экстремум (8) будем рассматривать на более широком множестве $\mathcal{D} \subset L_1$, в описании которого снято ограничение $f(\lambda) \geqslant 0$. Решение $f_0(\lambda)$ задачи (8) на таком более широком множестве, удовлетворяющее условию $f_0(\lambda) \geqslant 0$, будет решение задачи (8) для множества плотностей. Задача на условный экстремум эквивалентна задаче на безусловный экстремум на всем пространстве $L_1$ [6] : $\Delta_{\mathcal{D}}(f) = \Delta(f) + \delta(f \mid \mathcal{D}) \to \inf$, где $\delta(f \mid \mathcal{D})$ — индикаторная функция множества $\mathcal{D}$. Решение $f_0(\lambda)$ этой задачи характеризуется условием $0 \in \partial\Delta_{\mathcal{D}}(f_0)$, где $\partial\Delta_{\mathcal{D}}(f_0)$ — субдифференциал выпуклого функционала $\Delta_{\mathcal{D}}(f_0)$.

Рассмотрим задачу для множества спектральных плотностей с ограничением на мощность. Пусть

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ f(\lambda) \,\middle|\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\lambda \leqslant P \right\}.$$

В силу условий (6) функция $|r(\lambda)|^2 (f_0(\lambda) + \sigma^2)^{-1}$ ограничена. Поэтому $\Delta(f)$ — линейный непрерывный функционал на $L_1$ и $\partial \Lambda_{\mathcal{D}}(f_0) = \partial \Delta(f_0) + \partial \delta(f_0 | \mathcal{D})$. Условие $0 \in \partial \Lambda_{\mathcal{D}}(f_0)$ выполняется, если $|r(\lambda)|^2 (f_0(\lambda) + \sigma^2)^{-1} = \psi(\lambda) + c^{-2}$, где $\psi(\lambda) \leqslant 0$ п. в. и $\psi(\lambda) = 0$ при $f_0(\lambda) > 0$. Из этого соотношения находим

$$f_0(\lambda) = \left[ \left| c \int_0^{\infty} (Ad)(t)\, e^{it\lambda} dt \right|^2 - \sigma^2 \right]_+. \tag{9}$$

Для всех решений уравнения

$$Ad = \alpha \bar{d}, \ \| d \|^2 = P + \sigma^2, \ \alpha \in R^1, \tag{10}$$

выполняется равенство

$$f_0(\lambda) + \sigma^2 = \left| \int_0^{\infty} d(t)\, e^{-it\lambda} dt \right|^2 = \left| c \int_0^{\infty} (Ad)(t)\, e^{it\lambda} dt \right|^2 = | cr(\lambda) |^2.$$

Чтобы найти наименее благоприятную плотность, нужно использовать каноническую факторизацию (3) плотности $f_0(\lambda) + \sigma^2$, условие (7) и условие нормировки

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\lambda)\, d\lambda = P. \tag{11}$$

Обозначим через $\nu_0(P + \sigma^2)$ максимальное значение $\| Ad \|^2$, где $d$ — решение уравнения (10), задающее каноническую факторизацию (3) плотности вида $f(\lambda) + \sigma^2$, $f(\lambda) \in \mathcal{D}_0$. Через $\nu_0^+(P + \sigma^2)$ обозначим максимальное значение $\| Ad \|^2$ по всем функциям $d(t)$, $\| d \|^2 = P + \sigma^2$, задающим каноническую факторизацию (3) плотностей $f_0(\lambda) + \sigma^2$, где $f_0(\lambda)$ — плотности вида (9). В том случае, когда существует решение $d_0(t)$ уравнения (10) такое, что $\nu_0(P + \sigma^2) = \nu_0^+(P + \sigma^2) = \| Ad_0 \|^2$, наименее благоприятной в $\mathcal{D}_0$ будет плотность

$$f_0(\lambda) = \left| \int_0^{\infty} d_0(t)\, e^{-it\lambda} dt \right|^2 - \sigma^2. \tag{12}$$

Минимаксная спектральная характеристика оптимальной оценки $A\xi$ вычисляется по формуле (2), так как функции $A(\lambda)$, $r(\lambda)$ ограничены и, следовательно, $h(f_0) \in H_{\mathcal{D}}$.

Теорема 1. *Если существует функция $d_0(t)$ такая, что $\| Ad_0 \|^2 = \nu_0(P + \sigma^2) = \nu_0^+(P + \sigma^2)$, то наименее благоприятной в классе $\mathcal{D}_0$ спектральной плотностью при оптимальном оценивании преобразования $A\xi$ будет плотность* (12). *Если $\nu_0 < \nu_0^+$, то плотность* (9), *допускающая каноническую факторизацию* (3) *плотности $f_0(\lambda) + \sigma^2$, будет наименее благоприятной в $\mathcal{D}_0$. Функция $cd(t)$ находится из условий* (3), (7), (11). *Минимаксная спектральная характеристика оптимальной оценки $A\xi$ вычисляется по формуле* (2). *Среднеквадратическая ошибка оптимальной оценки равна $\Delta(h(f_0), f_0) = \nu_0^+(P + \sigma^2) - \sigma^2 \| a \|^2$.*

Для преобразования $A_T\xi$ плотность (9) имеет вид

$$f_0(\lambda) = \left[ \left| c \int_0^{T} (A_T d)(t)\, e^{it\lambda} dt \right|^2 - \sigma^2 \right]_+. \tag{13}$$

В этом случае

$$|r_T(\lambda)|^2 = \left|\int_0^T (A_T d)(t) e^{it\lambda} dt\right|^2 = \left|\int_0^T (\hat{A}_T d)(t) e^{-it\lambda} dt\right|^2,$$

где $\hat{A}_T$ — оператор в $L_2[0, T]$, задаваемый соотношением

$$(\hat{A}_T d)(t) = \int_0^t a(T + v - t) d(v) dv, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Поэтому для всех решений уравнения

$$A_T d = \alpha \overline{d}, \quad \| d \|^2 = P + \sigma^2, \quad \alpha \in R^1, \tag{14}$$

и для всех решений уравнения

$$\hat{A}_T d = \beta d, \quad \| d \|^2 = P + \sigma^2, \quad \beta \in R^1, \tag{15}$$

выполняется равенство

$$f_0(\lambda) + \sigma^2 = \left|\int_0^T d(t) e^{-it\lambda} dt\right|^2 = |c r_T(\lambda)|^2. \tag{16}$$

Для того чтобы найти наименее благоприятную в $D_0$ спектральную плотность при оптимальном оценивании $A_T \xi$, нужно использовать каноническую факторизацию (3) плотности $f_0(\lambda) + \sigma^3$, нормировку (11) и условие

$$\| A_T d \|^2 = \| \hat{A}_T d \|^2 \to \max, \quad f(\lambda) = \left|\int_0^T d(t) e^{-it\lambda} dt\right|^2 - \sigma^2 \in \mathcal{D}. \tag{17}$$

Обозначим через $\nu_0^T(P + \sigma^2)$ максимальное значение $\| A_T d \|^2 = \| \hat{A}_T d \|^2$, где $d$ — решения уравнений (14), (15), задающие каноническую факторизацию (3) плотностей вида $f(\lambda) + \sigma^2$, $f(\lambda) \in \mathcal{D}_0$. Через $\nu_0^{+T}(P + \sigma^2)$ обозначим максимальное значение $\| A_T d \|^2$, когда $d$, $\| d \|^2 = P + \sigma^2$, задают кононическую факторизацию плотностей $f_0(\lambda) + \sigma^2$, где $f_0(\lambda)$ — плотности вида (13).

Если существует решение $d_0$ уравнения (14) или уравнения (15) такое, что $\nu_0^T(P + \sigma^2) = \nu_0^{+T}(P + \sigma^2) = \| A_T d_0 \|^2 = \| \hat{A}_T d_0 \|^2$, то наименее благоприятной в $\mathcal{D}_0$ будет плотность

$$f_0(\lambda) = \left|\int_0^T d_0(t) e^{-it\lambda} dt\right|^2 - \sigma^2. \tag{18}$$

Случайный процесс $\xi(t) + \eta(t)$ в этом случае будет процессом скользящего среднего

$$\xi(t) + \eta(t) = \int_0^T d_0(t - u) d\zeta(u), \tag{19}$$

где $\zeta(u)$ — стандартный процесс с некоррелированными приращениями. При оптимальном оценивании значения $\xi(T)$ соотношение (16) выполняется для всех функций $d(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, таких, что $\| d \|^2 = P + \sigma^2$ и

$$f_0(\lambda) = \left|\int_0^T d(t) e^{-it\lambda} dt\right|^2 - \sigma^2 \geqslant 0. \tag{20}$$

Поэтому плотности (20) будут наименее благоприятными в классе $\mathcal{D}_0$ при оценивании $\xi(T)$.

Теорема 2. *Если существует функция $d_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, такая, что $\nu_0^t(P + \sigma^2) = \nu_0^{+T}(P + \sigma^2) = \| A_T d_0 \|^2 = \| \hat{A}_T d_0 \|^2$, то наименее благоприятной в классе $\mathcal{D}_0$ спектральной плотностью при оптимальном оце-*

*нивании преобразования $A_T\xi$ будет плотность* (18). *Если* $\nu_0^T<\nu_0^{+T}$, *то плотность* (13), *допускающая каноническую факторизацию* (3) *плотности* $f_0(\lambda)+\sigma^2$, *будет наименее благоприятной в* $\mathcal{D}_0$. *Функция* $cd(t)$ *находится из условий* (3), (11), (17). *Минимаксная спектральная характеристика оптимальной оценки* $A_T\xi$ *вычисляется по формуле* (5).

Рассмотрим задачу для множества спектральных плотностей, описывающих «полосовую» модель случайных процессов [2]

$$\mathcal{D}_g=\left\{f(\lambda)\,|\,g_1(\lambda)\leqslant f(\lambda)\leqslant g_2(\lambda);\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,d\lambda=P\right\}.$$

Из условия $0\in\partial\Delta_{\mathcal{D}}(f_0)$ для такого множества следует, что

$$|r(\lambda)|^2(f_0(\lambda)+\sigma^2)^{-1}=\psi_1(\lambda)+\psi_2(\lambda)+c^{-2},$$

где $\psi_1(\lambda)\leqslant 0$ п.в. и $\psi_1(\lambda)=0$ при $f_0(\lambda)>g_1(\lambda)$; $\psi_2(\lambda)\geqslant 0$ п.в. и $\psi_2(\lambda)=0$ при $f_0(\lambda)<g_2(\lambda)$. Из этого соотношения находим

$$f_0(\lambda)=\max\left\{g_1(\lambda),\,\min\left\{g_2(\lambda),\,\left|c\int_0^{\infty}(Ad)(t)\,e^{it\lambda}dt\right|^2-\sigma^2\right\}\right\}. \tag{21}$$

Обозначим через $\nu_g(P+\sigma^2)$ максимальное значение $\|Ad\|^2$, где $d$ — решения уравнения (10), которые удовлетворяют неравенству

$$g_1(\lambda)+\sigma^2\leqslant\left|\int_0^{\infty}d(t)\,e^{-it\lambda}dt\right|^2\leqslant g_2(\lambda)+\sigma^2. \tag{22}$$

и задают каноническую факторизацию (3) плотности $f(\lambda)+\sigma^2$, $f(\lambda)\in\mathcal{D}_g$. Через $\nu_g^+(P+\sigma^2)$ обозначим максимальное значение $\|Ad\|^2$ по всем функциям $d(t)$, $\|d\|^2=P+\sigma^2$, задающим каноническую факторизацию (3) плотностей $f_0(\lambda)+\sigma^2$, где $f_0(\lambda)$ — плотности вида (21).

Теорема 3. *Если существует решение* $d_0(t)$ *уравнения* (10) *такое, что* $\nu_g(P+\sigma^2)=\nu_g^+(P+\sigma^2)=\|Ad_0\|^2$, *то наименее благоприятной в* $\mathcal{D}_g$ *спектральной плотностью при оптимальном оценивании* $A\xi$ *будет плотность* (12). *Если* $\nu_g<\nu_g^+$, *то плотность* (21), *допускающая каноническую факторизацию* (3) *плотности* $f_0(\lambda)+\sigma^2$, *будет наименее благоприятной в* $\mathcal{D}_g$. *Функция* $cd(t)$ *находится из условий* (3), (7), (11). *Минимаксная спектральная характеристика оптимальной оценки* $A\xi$ *вычисляется по формуле* (2).

Для преобразования $A_T\xi$ из условия $0\in\partial\Delta\,\mathcal{D}(f_0)$ находим

$$f_0(\lambda)=\max\left\{g_1(\lambda),\,\min\left\{g_2(\lambda),\,\left|c\int_0^{T}(A_Td)(t)\,e^{it\lambda}dt\right|^2-\sigma^2\right\}\right\}. \tag{23}$$

Обозначим через $\nu_g^T(P+\sigma^2)$ максимальное значение $\|A_Td\|^2=\|\hat{A}_Td\|^2$, где $d$ — решения уравнений (14), (15), которые удовлетворяют неравенству

$$g_1(\lambda)+\sigma^2\leqslant\left|\int_0^{T}d(t)\,e^{-it\lambda}dt\right|^2\leqslant g_2(\lambda)+\sigma^2 \tag{24}$$

и задают каноническую факторизацию (3) плотности вида $f(\lambda)+\sigma^2$, $f(\lambda)\in\mathcal{D}_g$. Через $\nu_g^{+T}(P+\sigma^2)$ обозначим максимальное значение $\|A_Td\|^2$ по всем функциям $d(t)$, $\|d\|^2=P+\sigma^2$, задающим каноническую факторизацию (3) плотностей $f_0(\lambda)+\sigma^2$, где $f_0(\lambda)$ — плотности вида (23).

Теорема 4. *Если существует функция* $d_0(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, *такая, что* $\nu_g^T(P+\sigma^2)=\nu_g^{+T}(P+\sigma^2)=\|A_Td_0\|^2=\|\hat{A}_Td_0\|^2$, *то наименее благоприятной в классе* $\mathcal{D}_g$ *спектральной плотностью при оптимальном оценивании преобразования* $A_T\xi$ *будет плотность* (18). *Если* $\nu_g^T<\nu_g^{+T}$, *то плотность* (23), *допускающая каноническую факторизацию* (3) *плотности*

$f_0(\lambda)+\sigma^2$, *будет наименее благоприятной в классе* $\mathscr{D}_g$. *Функция* $cd(t)$ *находится из условий* (3), (11), (17). *Минимаксная спектральная характеристика оптимальной оценки преобразования* $A_T\xi$ *вычисляется по формуле* (5).

При оптимальном оценивании значения $\xi(T)$ соотношение (16) при $f_0(\lambda)\in\mathscr{D}_g$ выполняется для всех функций $d(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, $\|d\|^2=P+\sigma^2$, удовлетворяющих неравенству (24). Поэтому плотности (20) будут наименее благоприятными в $\mathscr{D}_g$ при оценивании $\xi(T)$, если функции $d(t)$, $\|d\|^2=P+\sigma^2$, удовлетворяют неравенству (24).

Найдем вид наименее благоприятной плотности для множества плотностей, описывающих модели «ε-окрестностей» случайных процессов. Пусть [2]

$$\mathscr{D}_\varepsilon=\left\{f(\lambda)\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)-g_1(\lambda)|\,d\lambda\leqslant\varepsilon\right.\right\},$$

где $g_1(\lambda)$ — заданная ограниченная спектральная плотность. Для такого множества из условия $0\in\partial\Delta_{\mathscr{D}}(f_0)$ получим

$$|r(\lambda)|^2(f_0(\lambda)+\sigma^2)^{-1}=c^{-2}\psi(\lambda),$$

где $|\psi(\lambda)|\leqslant1$, $\psi(\lambda)=\operatorname{sign}(f_0(\lambda)-g_1(\lambda))$ при $f_0(\lambda)\neq g_1(\lambda)$. Отсюда находим

$$f_0(\lambda)=\max\left\{\left|c\int_0^{\infty}(Ad)(t)\,e^{it\lambda}dt\right|^2-\sigma^2,\quad g_1(\lambda)\right\}.\tag{25}$$

Для преобразования $A_T\xi$

$$f_0(\lambda)=\max\left\{\left|c\int_0^{T}(A_Td)(t)\,e^{it\lambda}dt\right|^2-\sigma^2,\quad g_1(\lambda)\right\}.\tag{26}$$

Функция $cd(t)$ находится по факторизации (3) плотности $f_0(\lambda)+\sigma^2$, условию (7) и условию нормировки

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_0(\lambda)\,d\lambda=\varepsilon+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g_1(\lambda)\,d\lambda=P.\tag{27}$$

Пусть $\nu_\varepsilon,\nu_\varepsilon^+,\nu_\varepsilon^T,\nu_\varepsilon^{+T}$ обозначают такие же величины, как для множества $\mathscr{D}_g$, в случае, когда условие нормировки (11) заменено на (27), а в неравенствах (22), (24) $g_2(\lambda)=\infty$.

Теорема 5. *Если существует решение* $d_0(t)$ *уравнения* (10) *такое, что* $\nu_\varepsilon(P+\sigma^2)=\nu_\varepsilon^+(P+\sigma^2)=\|Ad_0\|^2$, *то наименее благоприятной в классе* $\mathscr{D}_\varepsilon$ *спектральной плотностью при оптимальном оценивании преобразования* $A\xi$ *будет плотность* (12). *Если* $\nu_\varepsilon<\nu_\varepsilon^+$, *то плотность* (25), *допускающая каноническую факторизацию плотности* $f_0(\lambda)+\sigma^2$, *будет наименее благоприятной в классе* $\mathscr{D}_\varepsilon$. *Функция* $c\,d(t)$ *находится из условий* (3), (7), (27). *Минимаксная спектральная характеристика оптимальной оценки преобразования* $A\xi$ *вычисляется по формуле* (2).

Теорема 6. *Если существует функция* $d_0(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, *такая, что* $\nu_\varepsilon^T(P+\sigma^2)=\nu_\varepsilon^{+T}(P+\sigma^2)=\|\widehat{A}_Td_0\|^2=\|\widehat{A}_Td_0\|^2$, *то наименее благоприятной в классе* $\mathscr{D}_\varepsilon$ *спектральной плотностью при оптимальном оценивании преобразования* $A_T\xi$ *будет плотность* (18). *Если* $\nu_\varepsilon^T<\nu_\varepsilon^{+T}$, *то плотность* (26), *допускающая каноническую факторизацию* (3) *плотности* $f_0(\lambda)+\sigma^2$, *будет наименее благоприятной в классе* $\mathscr{D}_\varepsilon$. *Функция* $cd(t)$ *находится из условий* (3), (17), (27). *Минимаксная спектральная характеристика оптимальной оценки преобразования* $A_T\xi$ *вычисляется по формуле* (5).

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.— М. : Наука, 1975.— Т. 1.— 664 с.
2. *Kassam S. A., Poor V. H.* Robust techniques for signal processing: A survey // Proc. IEEE.— 1985.— **73**, N 3.— P. 433—481.
3. *Franke J., Poor V. H.* Minimax — robust filtering and finite — length robust predictors // Lect. Notes Statist.— 1984.— **26**.— P. 87—126.
4. *Moklyachuk M. P.* Estimation of linear functionals of a stationary stochastic processes and two-person zero-sume game // Stanford Univ. techn. rept.— 1981.— **169**.— 87 p.
5. *Моклячук М. П.* О минимаксной фильтрации случайных процессов // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1989.— Вып. 40. — С. 73—80.
6. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума.— М. : Наука, 1982.— 144 с.

Получено 14.10.89