УДК 517.958

И. Н. МОЛЧАНОВ, д-р физ.-мат. наук,
Е. Ф. ГАЛБА, канд. физ.-мат. наук (Ин-т кибернетики АН УССР, Киев)

Вариационные постановки статической задачи теории упругости при заданных внешних силах

Рассматривается краевая задача для уравнений упругого равновесия тел в перемещениях, когда на поверхности тела заданы напряжения. Для этой задачи, имеющей единственное решение на подпространстве, сформулированы две вариационные задачи, разрешимые единственным образом на всем пространстве.

Розглядається крайова задача для рівнянь пружної рівноваги тіл в переміщеннях, коли на поверхні тіла задані напруження. Для цієї задачі, яка має єдиний розв'язок на підпросторі,

сформульовані дві варіаційні задачі, які розв'язуються єдиним способом на всьому просторі.

Пусть $\Omega \subset R^3$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ. В $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ рассмотрим краевую задачу теории упругости [1]

$$Lu = -\sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \overset{\circ}{x}^{(i)} = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$lu = -\sum_{i,k=1}^{3} \sigma_{ik} \cos(n, x_k) \overset{\circ}{x}^{(i)} = g(x), \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

где $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ — вектор упругих перемещений, $f = (f_1, f_2, f_3)^T$, $g = (g_1, g_2, g_3)^T$, $\overset{\circ}{x}^{(i)}$ — орт оси Ox_i, n — внутренняя нормаль к Γ, $\sigma_{ik}(u) = \sigma_{ki}(u) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm}(x)\, \varepsilon_{lm}(u)$ — составляющие тензора напряжений, $\varepsilon_{lm}(u) = \varepsilon_{ml}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right)$ — составляющие тензора деформаций.

Пусть выполняются условия существования решения задачи (1), (2)

$$\int_{\Omega} f dx + \int_{\Gamma} g d\gamma = 0, \quad \int_{\Omega} r \times f dx + \int_{\Gamma} r \times g d\gamma = 0, \tag{3}$$

где r — радиус-вектор точки области Ω, а $\times$ означает векторное произведение векторов.

Единственное решение выделим условиями

$$\int_{\Omega} u dx = 0, \quad \int_{\Omega} r \times u dx = 0. \tag{4}$$

Предполагаем, что $f \in (L_2(\Omega))^3$, $g \in (L_2(\Gamma))^3$, коэффициенты упругости $c_{iklm}(x)$ — ограниченные функции, подчиненные условиям симметрии $c_{iklm} = c_{lmik} = c_{kilm}$ и, кроме того, удовлетворяют условию [1]

$$\sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm} \geqslant \mu_0 \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}^2, \quad \mu_0 = \text{const} > 0. \tag{5}$$

В $(L_2(\Omega))^3$ и $(L_2(\Gamma))^3$ для вектор-функций скалярные произведения и нормы введем по формулам

$$(u, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} \sum_{m=1}^{3} u_m v_m dx, \quad \| u \|_{0,\Omega} = (u, u)_{\Omega}^{1/2},$$

$$(u, v)_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^{3} u_m v_m d\gamma, \quad \| u \|_{0,\Gamma} = (u, u)_{\Gamma}^{1/2}.$$

Через $(W_2^k(\Omega))^3$ будем обозначать пространство Соболева с нормой

$$\| u \|_{k,\Omega} = \Big(\sum_{m=1}^{3} \| u_m \|_{k,\Omega}^2\Big)^{1/2},$$

где

$$\| u_m \|_{k,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_{\Omega} (D^{\alpha} u_m)^2 dx, \ m = 1, 2, 3.$$

Определим билинейные формы

$$a_1(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}(x)\, \varepsilon_{ik}(u)\, \varepsilon_{lm}(v)\, dx,$$

$$Q(u, v) = \int_\Omega u dx \cdot \int_\Omega v dx + \int_\Omega r \times u dx \cdot \int_\Omega r \times v dx,$$

$$a_2(u, v) = a_1(u, v) + \zeta \int_\Omega u \cdot v dx, \quad a_3(u, v) = a_1(u, v) + Q(u, v),$$

$$E(u, v) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}(u) \varepsilon_{ik}(v) dx$$

и линейную форму

$$b(v) = 2 \int_\Omega f \cdot v dx + 2 \int_\Gamma g \cdot v d\gamma,$$

где $u \cdot v$ — евклидово скалярное произведение трехмерных векторов u и v, $\zeta > 0$ — фиксированный числовой параметр.

Определим линейное множество вектор-функций

$$(V_2^k(\Omega))^3 = \left\{ v \mid v \in (W_2^k(\Omega))^3, \ \int_\Omega v dx = 0, \ \int_\Omega r \times v dx = 0 \right\}.$$

Для упрощения записи в дальнейшем пространство $(W_2^1(\Omega))^3$ и подпространство $(V_2^1(\Omega))^3$ будем обозначать соответственно W^1 и V^1.

Лемма. *Для любой вектор-функции $\varphi \in W^1$ справедливо неравенство*

$$E(\varphi, \varphi) + Q(\varphi, \varphi) \geqslant C \|\varphi\|_{1,\Omega}^2, \tag{6}$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от φ.

Доказательство. Известно [2], что гильбертово пространство $H = (L_2(\Omega))^3$ представляет собой ортогональную сумму подпространств H_1 и H_2: $H = H_1 \oplus H_2$, где H_1 — подпространство вектор-функций смещений чистой деформации, удовлетворяющих условиям (4), а H_2 — подпространство вектор-функций жестких смещений $H_2 = \{u \mid u(x) = a + r \times b, \ a, b \in R^3\}$. Пусть $\varphi = v + u$, где $\varphi \in H$, $v \in H_1$, $u \in H_2$. В [3] показано, что на фактор-пространстве $H_1 = H \ominus H_2$ форма $E(v, v)^{1/2}$ является нормой, эквивалентной норме $\|v\|_{1,\Omega}$. В силу этого утверждения и очевидных соотношений $E(u, v) = E(u, u) = 0 \ \forall u \in H_2$ получаем

$$E(\varphi, \varphi) + Q(\varphi, \varphi) \geqslant C_1 (\|v\|_{1,\Omega}^2 + Q(u, u)), \ C_1 = \mathrm{const} > 0. \tag{7}$$

Так как форма $Q(u, u)^{1/2}$ на подпространстве H_2 является нормой, эквивалентной норме $\|u\|_{0,\Omega}$ и $E(u, u) = 0$, то, используя второе неравенство Корна [3, 4]

$$E(\varphi, \varphi) + \|\varphi\|_{0,\Omega}^2 \geqslant C_2 \|\varphi\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall \varphi \in W^1 \tag{8}$$

и неравенство треугольника, из (7) получаем (6), т. е. утверждение леммы.

Будем рассматривать вариационную задачу о минимуме функционала

$$J_1(v) = a_1(v, v) - b(v) \tag{9}$$

в подпространстве вектор-функций V^1. В [3] показано, что решение этой задачи существует и единственно.

Сформулируем две вариационные задачи, однозначно разрешимые в W^1. Сначала рассмотрим вариационную задачу о минимуме функционала

$$J_2(w) = a_2(w, w) - b(w) \tag{10}$$

в пространстве вектор-функций W^1.

Так как квадратичная форма $a_1(\cdot, \cdot)$ в силу неравенств (5), (8) положительно определена в W^1, а линейная и симметричная билинейная формы непрерывны, то существует единственная вектор-функция из W^1, минимизирующая функционал (10).

Теорема 1. *Пусть v_0 доставляет минимум функционалу* (9) *в подпространстве V^1, а w_0 минимизирует функционал* (10) *в пространстве*

W^1. *Тогда справедлива оценка*

$$\| v_0 - w_0 \|_{1,\Omega} \leqslant C_3 \zeta (\| f \|_{0,\Omega} + \| g \|_{0,\Gamma}). \qquad (11)$$

Доказательство. На линеале вектор-функций, удовлетворяющих условиям (4), форма $a_1(v, v)^{1/2}$ порождает энергетическую норму, эквивалентную норме $\| v \|_{1,\Omega}$. Обозначим $[u, v]_1 = a_1(u, v)$, $\| u \|_L = [u, u]_1^{1/2}$. Во введенном энергетическом пространстве функционал $J_1(v)$ согласно [2] представляется в виде $J_1(v) = \| v - v_0 \|_L^2 - \| v_0 \|_L^2$, где v_0 удовлетворяет тождеству $[v, v_0]_1 = \frac{1}{2} b(v)$. Функционал $J_2(w)$ в энергетическом пространстве со скалярным произведением $[u, v]_2 = a_2(u, v)$ представляется в виде $J_2(w) = \| w - w_0 \|_L^2 + \zeta \| w - w_0 \|_{0,\Omega}^2 - \| w_0 \|_L^2 - \zeta \| w_0 \|_{0,\Omega}^2$, где w_0 удовлетворяет тождеству $[w, w_0]_2 = \frac{1}{2} b(w)$, из которого, в частности, следует $w_0 \in V^1$. Так как $z = w_0 - v_0 \in V^1 \subset W^1$, то тождества, определяющие v_0 и w_0, должны выполняться, если в них вместо v и w положить z, т. е. $[z, v_0]_1 = \frac{1}{2} b(z)$, $[z, w_0]_1 + \zeta (z, w_0)_\Omega = \frac{1}{2} b(z)$. Вычтя из второго тождества первое, получим $\| z \|_L^2 + \zeta (z, w_0)_\Omega = 0$. Из этого равенства имеем $\| z \|_{1,\Omega} \leqslant C_4 \zeta \| w_0 \|_{0,\Omega}$. Полагая в тождестве, определяющем w, $w = w_0$ и учитывая, что $w_0 \in V^1$, получаем $\| w_0 \|_{0,\Omega} \leqslant C_5 (\| f \|_{0,\Omega} + \| g \|_{0,\Gamma})$. Из последних двух неравенств следует оценка (11), т. е. утверждение теоремы.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$J_3(w) = a_3(w, w) - b(w) \qquad (12)$$

в пространстве вектор-функций W^1.

Так как квадратичная форма $a_3(\cdot, \cdot)$ в силу (5), (6) положительно определена в W^1, а линейная и симметричная билинейная формы непрерывны, то существует единственная вектор-функция из W^1, доставляющая минимум функционалу (12).

Теорема 2. *Задача о минимуме функционала* (9) *в подпространстве* V^1 *и задача о минимуме функционала* (12) *в пространстве* W^1 *эквивалентны.*

Для доказательства теоремы 2 достаточно использовать ортогональное разложение пространства $H = (L_2(\Omega))^3$. Действительно, пусть, как и при доказательстве леммы, $H = H_1 \oplus H_2$, $w = v + u$, $w \in H$, вектор-функции $v \in H_1$ удовлетворяют условиям (4), $u \in H_2$ — подпространство вектор-функций жестких смещений. Тогда функционал (12) примет вид $J_3(w) = J_1(v) + Q(u, u)$, откуда и следует утверждение теоремы.

Таким образом, для задачи теории упругости при заданных на границе области напряжениях предложены и исследованы две вариационные задачи, разрешимые единственным образом в W^1. Предложенные вариационные постановки задачи теории упругости можно использовать, например, при дискретизации задачи методом конечных элементов. Свойства полученных систем линейных алгебраических уравнений будут характеризоваться теми же особенностями, что и свойства систем дискретной задачи Неймана для самосопряженного уравнения эллиптического типа, изученные в работе [5]. В этой же работе даны рекомендации относительно методов решения таких систем, а также рассмотрены другие подходы решения краевых задач, разрешимых единственным образом на подпространстве.

1. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала.— М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1952.— 216 с.
2. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике.— М. : Наука, 1970.— 512 с.
3. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
4. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости.— М. : Мир, 1974.— 160 с.
5. *Molchanov I. N., Galba E. F.* On finite element methods for the Neumann problem // Numer. Math.— 1985.— **46**, N 4.— P. 587—598.

Получено 04.04.89