УДК 517.984.5

А. Л. Мильман, инж. (НПО "Кольцо", Одесса)

МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ФИНИТНЫМ РАДИАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

The expressions for partial scattering matrices $S_l(\lambda)$ are obtained for any natural l by using V. M. Adamyan's result which establishes the universal relationship between the scattering matrix for a wave equation with finite potential in an even-dimensional space and a characteristic operator function of a special contraction operator which describes the energy dissipation from the domain of the space which contains a dissipator. It is shown that the problem can be reduced to the case of $l = 0$ for all even l and to the case of $l = 1$ for all odd l.

Одержано вирази для парціальних матриць розсіяння $S_l(\lambda)$ при будь-яких натуральних l з використанням встановленого В. М. Адамяном універсального зв'язку між матрицею розсіяння для хвильового рівняння з фінітним потенціалом у парновимірному просторі та характеристичною оператор-функцією спеціального оператора стиску, що описує дисипацію енергії з області простору, що містить розсіювач. Показано, що при всіх парних l задача зводиться до випадку $l = 0$, а при всіх непарних l — до випадку $l = 1$.

С точки зрения подхода Лакса — Филлипса [1] в абстрактной теории рассеяния принципиальным является факт взаимной ортогональности приходящего и уходящего подпространств $\mathcal{D}_{\pm}$(здесь и далее без пояснений используются понятия, определенные в [1]), имеющей место в случае волнового уравнения лишь в пространствах нечетного числа измерений [1, 2]. Так, для четномерных пространств нарушена унитарная эквивалентность матрицы рассеяния $S(\lambda)$ и граничного значения характеристической оператор-функции оператора сжатия T, определенного в [3] на трансляционно-инвариантном подпространстве K, установленная в предположении об ортогональности $\mathcal{D}_+$ и $\mathcal{D}_-$. Тем не менее, как впоследствии показал В. М. Адамян [4], в этом случае имеет место подобное соотношение, в котором фигурирует не сама S-матрица, а определенное граничное значение $\mathfrak{S}(\lambda)$ некоторой внутренней операторной функции, универсальным дробно-линейным преобразованием связанное с матрицей рассеяния $S_a(\lambda)$, ассоциированной с подпространствами $\mathcal{D}_{\pm}^a$, где a — радиус шара, целиком содержащего носитель потенциала в волновом уравнении. Тем самым нахождение матрицы рассеяния в схеме Лакса — Филлипса может быть сведено к построению сжатия T с последующим вычислением его характеристической оператор-функции $\Theta_T(\zeta)$.

С целью изучения свойств матрицы рассеяния в общем случае четномерных пространств и произвольных финитных препятствий рассмотрим конкретную задачу рассеяния для двумерного волнового уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r\partial r}\, r\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + q(r)\right)u(r, \theta, t) = 0,$$

где $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta < 2\pi$, $-\infty < t < \infty$, в котором потенциал q предполагается зависящей лишь от радиальной переменной неотрицательной функцией, тождественно равной нулю на полуоси $r > a$ и суммируемой на отрезке $[0, a]$ при некотором $a > 0$. В. М. Адамян поставил задачу найти в данном случае матрицу рассеяния. Метод разделения переменных сводит исходную задачу к решению радиального волнового уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\, r\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l^2}{r^2} + q(r)\right)u_l(r, t) = 0, \quad l = 0, 1, 2, \ldots,$$

а построение матрицы рассеяния — к нахождению набора парциальных матриц

$S_l(\lambda)$. Соответствующее значению $l = 0$ выражение для $S_0(\lambda)$ указанным выше способом фактически было получено в [5]. Настоящая работа посвящена нахождению остальных $S_l(\lambda)$ на основе равенства, установленного в [4], отдельно при каждом l.

Зафиксируем произвольное $l \neq 0$ и рассмотрим гильбертово пространство H двухкомпонентных вектор-функций

$$f(r) = \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{pmatrix}, \quad 0 \le r < \infty,$$

с метрикой

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2} \int_{R_+} \left\{ \left| \frac{\partial f_1}{\partial r} \right|^2 + \left[\frac{l^2}{r^2} + q(r) \right] |f_1|^2 + |f_2|^2 \right\} r dr.$$

Найдем оператор P_k ортогонального проектирования в пространстве H на его трансляционно-инвариантное подпространство $K = H \ominus \overline{(\mathcal{D}_+^a + \mathcal{D}_-^a)}$.

Лемма 1. *Пусть H_0 — гильбертово пространство двухкомпонентных вектор-функций*

$$f(r) = \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{pmatrix}, \quad 0 \le r < \infty,$$

нормированных выражением

$$\|f\|_0^2 = \frac{1}{2} \int_{R_+} \left\{ \left| \frac{\partial f_1}{\partial r} \right|^2 + \frac{l^2}{r^2} |f_1|^2 + |f_2|^2 \right\} r dr,$$

и K_0 — трансляционно-инвариантное подпространство пространства H_0, а P_{K_0} — ортопроектор, проектирующий все H_0 на K_0. Тогда если носитель функции $q(r)$ заключен в интервале $[0, a]$, то справедливо равенство $WP_K = P_{K_0}W$, где W — оператор вложения H в H_0.

Доказательство. Рассмотрим ортопроектор $Q_K = I - P_k$, проектирующий все пространство H на подпространство $K^\perp = \overline{(\mathcal{D}_+^a + \mathcal{D}_-^a)}$, а также аналогичный ему проектор $Q_{K_0} = I - P_{K_0}$. Достаточно показать, что $WQ_K = Q_{K_0}W$. Для этого заметим, что приходящие и уходящие подпространства пространств H и H_0 в данном случае состоят из одних и тех же функций с носителями на полуоси $[a, \infty)$. Следовательно, если h — произвольный элемент подпространства $K^\perp$, а g — произвольный элемент пространства H, то в силу вида функции $q(r)$ выполняется равенство $(g, h) = (Wg, Wh)_0$, а значит, если $g \perp K^\perp$, то $Wg \perp K_0^\perp$. Отсюда для произвольного элемента $f \in H$, полагая $g = f - Q_K f$, получаем, что элемент $Wg = Wf - WQ_K f$ пространства H_0 ортогонален подпространству $K_0^\perp$, а элемент $WQ_K f$ принадлежит этому подпространству. По определению оператора ортогонального проектирования это означает, что $WQ_K f = Q_{K_0} Wf$.

Лемма доказана.

В силу данной леммы поставленная задача сводится к нахождению проектора P_{K_0}. Следующая лемма является тривиальным следствием результатов [2].

Лемма 2. *Операторы $\mathcal{F}_+^0$ и $\mathcal{F}_-^0$, действующие из H_0 в $L^2(R)$ по формулам*

$$\mathcal{F}_\pm^0\colon f(r) \mapsto h(k) = \frac{1}{2} \mathcal{J}_\mp(k) \int_{R_+} [k f_1(r) + i f_2(r)] J_l(kr) r dr, \tag{1}$$

где

$$\mathcal{J}_{\pm}(k) = \begin{cases} \sqrt{k}, & k \geq 0, \\ \mp i\sqrt{|k|}, & k < 0, \end{cases}$$

унитарны и осуществляют соответственно уходящее и приходящее унитарные спектральные представления. Обратные операторы действуют по формулам

$$\mathcal{F}_{\pm}^{0^{-1}}: f(k) \mapsto f(k) = \int_R h(k) \begin{pmatrix} 1 \\ -ik \end{pmatrix} \frac{J_l(kr)}{\mathcal{J}_{\pm}(k)} dk. \tag{2}$$

Сформулированные теоремы позволяют найти оператор P_K.

Теорема 1. *Действие оператора P_K ортогонального проектирования в пространстве H на трансляционно-инвариантное подпространство K определяется покомпонентным выражением в виде интегральных операторов*

$$(P_k f)_{1(2)}(r) = \int_{R_+} \mathcal{P}_{1(2)}(r, r') f_{1(2)}(r') r' dr', \ f \in H, \tag{3}$$

с ядрами

$$\mathcal{P}_1(r, r') = \int_0^a \left\{ \int_{R_+} J_l(kr) J_{1-\nu}(kx) dk \right\} \left\{ \int_{R_+} J_l(k'r') J_{1-\nu}(k'x) k'^2 dk' \right\} x dx, \tag{4}$$

$$\mathcal{P}_2(r, r') = \int_0^a \left\{ \int_{R_+} J_l(kr) J_{\nu}(kx) k dk \right\} \left\{ \int_{R_+} J_l(k'r') J_{\nu}(k'x) k' dk' \right\} x dx, \tag{5}$$

где $\nu = l - 2[l/2]$, *а интегралы понимаются в смысле обобщенных функций.*

Доказательство. Найдем оператор P_{K_0} и применим лемму 1. Для произвольного элемента f пространства H_0 рассмотрим соответствующее ему как данным Коши решение $u_l(r, t)$ радиального волнового уравнения в свободном пространстве. Пусть $h_{\pm}$ — спектральные представители вектора f. Решая задачу Коши с данным f и применяя лемму 2, получаем

$$u_l(r, t) = \int_R e^{-ikt} J_l(kr) h_{\pm}(k) \frac{dk}{\mathcal{J}_{\pm}(k)},$$

$$u_l(r, 0) = f_1(r), \ \frac{\partial u_l}{\partial t}(r, 0) = f_2(r).$$

Функция Бесселя $J_l(zr)$ является целой аналитической функцией переменной z первого порядка типа r, а функция $\mathcal{J}_+(z)$ $\mathcal{J}_-(z)$ есть функция, аналитическая в нижней (верхней) полуплоскости. Исходя из определения подпространств $\mathcal{D}_+^a$ и $\mathcal{D}_-^a$ в случае свободного просранства и вычисляя соответствующие интегралы с помощью теоремы Коши для аналитических функций, получаем, что между подпространствами $\mathcal{D}_{\pm}^a$ и классами Харди H_+^2 и H_-^2 квадратично интегрируемых на действительной оси функций, являющихся граничными значениями функций, аналитических соответственно в нижней или верхней полуплоскости, при отображениях $\mathcal{F}_{\pm}^0$ имеется следующее соответствие:

$$\mathcal{F}_+^0: \ \mathcal{D}_+^a \mapsto e^{-ika} H_+^2, \ \ \mathcal{D}_-^a \mapsto \operatorname{sign} k e^{ika} H_-^2;$$

$$\mathcal{F}_-^0: \ \mathcal{D}_+^a \mapsto \operatorname{sign} k e^{-ika} H_+^2, \ \ \mathcal{D}_-^a \mapsto e^{ika} H_-^2.$$

В этом случае, как было показано в [5], спектральные представители $g_{\pm}(k)$

проекции $P_{K_0}f$ вектора $f(r)$ на подпространство K_0 выражается через $h_\pm(k)$ формулами

$$g_\pm(k) = \mathcal{J}_\pm(k)\int\limits_R \left\{ \frac{1}{2} \int\limits_0^a [J_0(kx)J_0(k'x) + J_1(kx)J_1(k'x)]xdx \right\}\mathcal{J}_\pm(k')h(k')dk'$$

(что после взятия внутреннего интеграла совпадает с результатом [5]). Переходя в этих равенствах от $g_\pm$ и $h_\pm$ к $P_{K_0}f$ и f с помощью (1) и (2) и применяя лемму 1, получаем (3) – (5). Теорема доказана.

С помощью (4), (5) ядра $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ могут быть найдены в явном виде. Однако в отличие от случая $l = 0$, когда вычисление внутренних интегралов в (4) и (5) сводится к выделению в них дельта-функций [5], в данном случае для ядер $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ получаются сложные выражения, содержащие нелокальные слагаемые, выражающиеся через полиномы Якоби:

$$\mathcal{P}_1(r, r') = \theta(r-a)\left(\frac{a}{r}\right)^{2-\nu} P^{(1-\nu,0)}_{[l/2]+\nu-1}\left(\frac{2a^2}{r^2}-1\right)\mathcal{P}_2(r, r'),$$

$$\mathcal{P}_2(r, r') = \theta(r-a)\frac{\delta(r-r')}{r} - \theta(r-a)\theta(r'-a)\int\limits_0^a K(r, x)K(r', x)xdx,$$

где

$$K(r, x) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{x^2}{r^2}\right)^{1-\nu} P^{(1-\nu,0)}_{[l/2]+\nu-1}\left(\frac{2x^2}{r^2}-1\right)\right], \ \ l \geq 1.$$

Следующие рассуждения показывают, что существует представление, в некотором смысле более естественное для оператора P_K, чем исходное.

Рассмотрим систему обобщенных функций $\chi_x(r)$, определенных при каждом значении параметра x выражением

$$\chi_x(r) = (-1)^{\left[\frac{l}{2}\right]}\int\limits_{R_+} J_l(kr)J_\nu(kx)kdk, \ \ 0 \leq r, x < \infty. \tag{6}$$

Функции $\chi_x(r)$ удовлетворяют соотношениям ортонормировки

$$\int\limits_{R_+} \chi_x(r)\chi_x(r')xdx = \frac{\delta(r-r')}{r}, \ \ \int\limits_{R_+} \chi_x(r)\chi_{x'}(r')rdr = \frac{\delta(x-x')}{r}, \tag{7}$$

а значит, если с функциями $\chi_x(r)$ связать обобщенное преобразование Фурье, определив оператор V, действующий по формуле

$$V\colon f(r) \mapsto F(x) = \int\limits_{R_+} f(r)\chi_x(r)rdr, \tag{8}$$

то обратный оператор будет действовать по формуле

$$V^{-1}\colon F(x) \mapsto f(r) = \int\limits_{R_+} F(x)\chi_x(x)x\,dx. \tag{9}$$

Из (6) – (9) непосредственно следует, что если $f \in H$ и $F = Vf$, то справедливы равенства

$$\int\limits_{R_+} \left\{\left|\frac{\partial f_1}{\partial r}\right|^2 + \frac{l^2}{r^2}|f_1|^2\right\}rdr = \int\limits_{R_+} \left\{\left|\frac{\partial F_1}{\partial x}\right|^2 + \frac{\nu^2}{x^2}|F_1|^2\right\}xdx,$$

$$\int_{R_+} |f_2|^2 r dr = \int_{R_+} |F_2|^2 x dx,$$

а также

$$\int_{R_+} |f_1|^2 q(r) r dr = \int_{R_+}\int_{R_+} Q(x, y) F_1(x) \overline{F_1(y)} x dx y dy,$$

где введено обозначение

$$Q(x, y) = \int_{R_+} q(r) \chi_x(r) r dr. \tag{10}$$

Таким образом, оператор V есть унитарное отображение пространства H на гильбертово пространство H_* двухкомпонентных вектор-функций $F(x)$ на полуоси $[0, \infty)$ с нормой

$$\| F \|_*^2 = \frac{1}{2} \int_{R_+} \left\{ \left| \frac{\partial F_1}{\partial x} \right|^2 + \frac{\nu^2}{x^2} |F_1|^2 + |F_2|^2 \right\} x dx + $$
$$+ \frac{1}{2} \int_{R_+}\int_{R_+} Q(x, y) F_1(x) \overline{F_1(y)} x dx y dy. \tag{11}$$

В дальнейшем при нахождении характеристической оператор-функции $\Theta_T(\zeta)$ сжатия T, продставимого в виде $T = I|_K + 2iP_K(\mathcal{H} - iI)^{-1}|_K$, где $\mathcal{H}$ — самосопряженный в H матричный оператор, определенный выражением

$$\mathcal{H} = i \begin{pmatrix} 0 & I \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l^2}{r^2} - q(r) & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

будет удобнее вычислять равную ей с точностью до постоянных унитарных множителей [6] характеристическую функцию унитарно эквивалентного сжатия $T_* = VTV^{-1}$, действующего в подпространстве VK пространства H_* по формуле

$$T_* = I|_{VK} + 2i(VP_KV)^{-1}[V(\mathcal{H} - iI)^{-1}V^{-1}]|_{VK}. \tag{13}$$

Для этого запишем соответствующие выражения для входящих в (13) операторов.

Из (3), (8) и (9) следует, что если $F \in H_*$, то

$$(VP_KV^{-1}F)_{1(2)}(x) = \int_{R_+} \mathcal{P}^*_{1(2)}(x, y) F_{1(2)}(y) y dy,$$

где обобщенные ядра выражаются интегралами

$$\mathcal{P}^*_{1(2)}(x, y) = \int_{R_+} r dr \chi_x(r) \int_{R_+} r' dr' \chi_y(r') \mathcal{P}_{1(2)}(r, r').$$

С учетом (6) выражение (5) для $\mathcal{P}_2$ переписывается в виде

$$\mathcal{P}_2(r, r') = \int_0^a \chi_x(r) \chi_x(r') x dx,$$

откуда ввиду (7) следует

$$\mathcal{P}^*_2(x, y) \doteq \theta(a - x) \delta(x - y) / x.$$

Из свойств функций Бесселя вытекает формула $k'J_{\nu-1}(k'x) = x^{-\nu}\frac{\partial}{\partial x}[x^{\nu}J_{\nu}(k'x)]$, использование которой в (4) с последующим интегрированием по частям приводит к выражению

$$\mathcal{P}_1(r, r') = (-1)^{[l/2]} a\chi_a(r') \int_{R_+} J_l(kr) J_{\nu-1}(ka) dk + \mathcal{P}_2(r, r').$$

Отсюда следует равенство

$$\mathcal{P}_1^*(x, y) = \theta(x-a)\left(\frac{a}{x}\right)^{\nu} \frac{\delta(y-a)}{a} + \theta(x-a)\frac{\delta(x-y)}{x}.$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 3. *Оператор V, действующий по формуле* (8) *из H в H_*, унитарен и при каждом l в соответствующем V-представлении действие проектора P_K описывается выражением*

$$(VP_K V^{-1} F)(x) = \begin{cases} F(x), & 0 \le x \le a, \\ \begin{pmatrix} F_1(a) \\ 0 \end{pmatrix}\left(\frac{a}{x}\right)^{\nu}, & x > a, \end{cases} \tag{14}$$

общим для всех l одной четности.

Замечание. Из леммы 3 следует, что при всех четных и нечетных значениях l соответствующие им операторы P_K унитарно эквивалентны.

Далее, для оператора, заключенного в (13) в квадратные скобки, имеем $V(\mathcal{H} - iI)^{-1}V^{-1} = (\mathcal{H}_* - iI)^{-1}$, где введен оператор $\mathcal{H}_*$, определенный на множестве $D(\mathcal{H}_*) = VD(\mathcal{H}) \subset VK$ выражением $\mathcal{H}_* = V\mathcal{H}V^{-1}$.

Для описания оператора $(\mathcal{H}_* - iI)^{-1}$ рассмотрим произвольный элемент $G \in \in \mathcal{H}_*$ и элемент F, связанный с ним равенством $F = (\mathcal{H}_* - iI)^{-1}G$.

Оператор $\mathcal{H}_*$, унитарно эквивалентный самосопряженному оператору $\mathcal{H}$, также самосопряжен. Поэтому область определения оператора $(\mathcal{H}_* - iI)^{-1}$ совпадает со всем пространством $\mathcal{H}_*$, и элемент F вполне определен.

Положим $F = Vf$ и $G = Vg$. Тогда $f = (\mathcal{H} - iI)^{-1}g$ и, как следует из определения оператора $\mathcal{H}$,

$$f_2(r) = f_1(r) - ig_1(r),$$

$$f_1(r) = i\int_{R_+} G_i(r, r')[g_1(r') + g_2(r')]r'dr',$$

где $G_\lambda(r, r')$ — функция Грина краевой задачи

$$\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l^2}{r^2} + q(r)\right)y = \lambda^2 y; \quad 0 \le r < \infty,$$

$$|y(r \to 0)| < \infty, \quad |y(r \to \infty)| < \infty. \tag{15}$$

Следовательно, для F и G имеем

$$F_2(x) = F_1(x) - iG_1(x),$$

$$F_1(x) = i\int_{R_+} \Gamma_i(x, x')[G_1(x') + G_2(x')]x'dx',$$

где $\Gamma_\lambda(x, x')$ определяется равенством

$$\Gamma_\lambda(x, x') = \int_{R_+} r dr \chi_x(r) \int_{R_+} r' dr' \chi_{x'}(r') G_\lambda(r, r'). \tag{16}$$

Покажем, что Γ_λ — функция Грина краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения

$$\left(-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\nu^2}{x^2} + \hat{Q}\right)y = \lambda^2 y, \quad 0 \le x < \infty, \tag{17}$$

где $\hat{Q}$ — интегральный оператор с ядром (10): $(\hat{Q}y)(x) = \int_{R_+} Q(x, x')y(x')x'dx'$, с граничными условиями конечности $|y(x \to 0)| < \infty$, $|y(x \to \infty)| < \infty$.

Из свойств функций Бесселя и (6) следует, что $\chi_x(r)$ как обобщенные функции удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l^2}{r^2}\right)\chi_x(r) = \left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\nu^2}{x^2}\right)\chi_x(r).$$

Комбинируя его с (8) – (10) и (12), получаем

$$\mathcal{H}_* = i\begin{pmatrix} 0 & I \\ \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\nu^2}{x^2} - \hat{Q} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, остается лишь проверить выполнение граничных условий, для чего изучим функции $\chi_x(r)$ несколько подробнее.

Сводя (6) к вычислению сходящихся интегралов путем выделения δ-образного слагаемого, получаем представление

$$\chi_x(r) = \frac{\delta(r - x)}{r} + \theta(r - x)K(r, x), \tag{18}$$

где функция $K(r, x)$ выражается через полиномы Якоби

$$K(r, x) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{x^2}{r^2}\right)^{1-\nu} P^{(1-\nu, 0)}_{[l/2]+\nu-1}\left(\frac{2x^2}{r^2} - 1\right)\right], \quad l \ge 1,$$

а значит, имеет вид $K(r, x) = r^{-2}p_l(x / r)$, где p_l — некоторый фиксированный (при каждом значении l) многочлен. Следовательно, функция $K(r, x)$ равномерно ограничена в промежутке $[0, r]$ при каждом r как функция x, а также на полуоси $[x, \infty]$ при каждом x как функция r.

Подставляя (18) в (16), получаем

$$\Gamma_\lambda(x, x') = G_\lambda(x, x') + \int_x^\infty r\, dr K(r, x)G_\lambda(r, x') + \int_{x'}^\infty r' dr' K(r', x')G_\lambda(x, r') +$$

$$+ \int_x^\infty r dr K(r, x)\int_{x'}^\infty r' dr' K(r', x')G_\lambda(r, r'). \tag{19}$$

В силу суммируемости потенциала q и его финитности функция G_λ при $\mathrm{Im}\,\lambda \ne 0$ ограничена и экспоненциально убывает на бесконечности по обеим переменным. Следовательно, при каждом значении x' правая часть (19) имеет конечные пределы при $x \to 0$ и $x \to \infty$, как и утверждалось.

Пусть теперь $x > x'$. По определению функции Грина

$$\left(-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\nu^2}{x^2} + \hat{Q} - \lambda^2 \right)\Gamma_\lambda(x, x') = 0.$$

Подстановка (18) в (10) показывает, что поскольку $q(r) \equiv 0$ при $r > a$, то $Q(x, y) \equiv 0$ при $x > a$. Следовательно, при $x > x'$ и $x > a$ $\Gamma_\lambda(x, x')$ как функция переменной λx есть линейная комбинация цилиндрических функций порядка ν. Будем считать, что $\operatorname{Im} \lambda > 0$. Тогда из граничного условия на бесконечности следует, что функция Грина $\Gamma_\lambda(x, x')$ при $x > x'$ представима в виде $\Gamma_\lambda(x, x') = \gamma(x')\Psi_\lambda(x)$, где Ψ_λ — решение уравнения (17), удовлетворяющее условию $\Psi_\lambda(x \geq a) = H_\nu^{(1)}(\lambda x)$.

Аналогичные рассуждения показывают, что $\gamma(x)$ — функция, пропорциональная решению $\Phi_\lambda(x)$ уравнения (17), удовлетворяющему граничному условию в нуле, т. е. регулярному решению. Обозначая коэффициент пропорциональности через Ω_λ^{-1}, получаем

$$\Gamma_\lambda(x, x') = \frac{1}{\Omega_\lambda}\Phi_\lambda(x_<)\Psi_\lambda(x_>), \quad x_< = \min(x, x'), \quad x_> = \max(x, x').$$

Используя полученные выражения, найдем сужение оператора $(\mathcal{H}_* - iI)^{-1}$ на подпространство VK.

Пусть $F \in VK$ и $G = (\mathcal{H}_* - iI)^{-1}$. Положим $x < a$ и вычислим $G_1(x)$. Имеем

$$G_1(x) = \frac{i}{\Omega_i}\int_0^a [F_1(x') + F_2(x')]\Phi_i(x_<)\Psi_i(x_>)x'dx' +$$

$$+ i\frac{F_1(a)}{\Omega_i}\left[\int_a^\infty \Psi_i(x')\left(\frac{a}{x'}\right)^\nu x'dx'\right]\Phi_i(x).$$

Использование очевидных равенств

$$\Phi_i(x) = \Delta\Phi_i(x) - \frac{\nu^2}{x^2}\Phi_i(x), \quad x > a; \quad \frac{\nu^2}{x^2}\left(\frac{a}{x}\right)^\nu = \Delta\left[\left(\frac{a}{x}\right)^\nu\right],$$

где Δ — оператор Лапласа, сводит вычисление несобственного интеграла к применению формулы Грина, и в результате получаем

$$G_1(x) = \frac{i}{\Omega_i}\left\{ \int_0^a [F_1(x') + F_2(x')]\Phi_i(x_<)\Psi_i(x_>)x'dx' - F_1(a)(D\Psi_i)(a)\Phi_i(x) \right\}, \quad (20)$$

где введена дифференциальная операция D, действующая по формуле $(Dy)(x) = x\frac{dy(x)}{dx} + \nu y(x)$. Кроме того, как было указано, при всех x

$$G_2(x) = G_1(x) - iF_1(x). \quad (21)$$

Таким образом, в силу (13) действие сжатия T_* описывается выражениями (20), (21) и (14). Исходя из этого, покажем, что данное сжатие представляет собой одномерное возмущение унитарного оператора.

Пусть F — произвольный элемент подпространства VK. Учитывая (14) в (11), интегрируя по частям, получаем

$$\| F \|_*^2 = \frac{1}{2}\int_0^a \left\{ \left[\left(-\Delta + \frac{\nu^2}{x^2} \right) F_1(x) + \int_0^a Q(x, y) F_1(y) y dy \right] \overline{F_1(x)} + \right.$$

$$\left. + | F_2(x) |^2 \right\} x dx + \frac{1}{2}(DF_1)(a) \overline{F_1(a)}, \tag{22}$$

откуда, в частности, следует, что подпространство VK изометрически вкладывается в гильбертово пространство K_* двухкомпонентных вектор-функций на отрезке $[0, a]$ со скалярным произведением, индуцируемым на K_* нормой (22).

Наряду с $\mathcal{H}_*$ рассотрим в VK оператор $\mathcal{H}_h$, действующий по той же формуле, что и $\mathcal{H}_*$, но областью определения которого является множество всех элементов $F \in VK$, удовлетворяющих дополнительному граничному условию $(DF_1)(a) = ihF_2(a)$, где h — произвольное действительное число. Как непосредственно следует из (22), $\mathcal{H}_h$ — самосопряженный в VK оператор, а его резольвента $(\mathcal{H}_h - \lambda I)^{-1}$ действует в пространстве VK по формулам

$$[(\mathcal{H}_h - \lambda I)^{-1} F]_1(x) = \frac{1}{\Omega_\lambda} \left\{ \int_0^a [\lambda F_1(x') + iF_2(x')] \Phi_\lambda(x_<) \tilde{\Psi}_\lambda(x_>) x' dx' + \right.$$

$$\left. + \frac{F_1(a)}{\lambda} (D\tilde{\Psi}_\lambda)(a) \Phi_\lambda(x) \right\}, \tag{23}$$

$$[(\mathcal{H}_h - \lambda I)^{-1} F]_2(x) = -i\lambda [(\mathcal{H}_h - \lambda I)^{-1} F]_1(x) - iF_1(x), \tag{24}$$

где введено обозначение

$$\tilde{\Psi}_\lambda(x) = \Psi_\lambda(x) - \frac{(D\Psi_\lambda)(a) - \lambda h \Psi_\lambda(a)}{(D\Phi_\lambda)(a) - \lambda h \Phi_\lambda(a)} \Phi_\lambda(x).$$

Сравнивая (20) и (21) с (23) и (24), при $\lambda = i$, $x < a$ получаем

$$\{[VP_K V^{-1} (\mathcal{H}_* - iI)^{-1}|_{VK} - (\mathcal{H}_h - iI)^{-1}] F\}_1(x) = \{[VP_K V^{-1} (\mathcal{H}_* - iI)^{-1}|_{VK} -$$

$$- (\mathcal{H}_h - iI)^{-1}] F\}_2(x) = \frac{i}{\Omega_i} \frac{(D - ih)\Psi_i(a)}{(D - ih)\Phi_i(a)} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^a [F_1(x') + F_2(x')] \Phi_i(x') x' dx' - F_1(a) (D\Phi_i)(a) \right\} \Phi_i(x)$$

или, в терминах скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_*$,

$$[VP_K V^{-1} (\mathcal{H}_* - iI)^{-1}|_{VK} - (\mathcal{H}_h - iI)^{-1}] F = -\frac{2i}{\Omega_i} \frac{(D - ih)\Psi_i(a)}{(D - ih)\Phi_i(a)} (F, \hat{\Phi}_{-i})_* \hat{\Phi}_i,$$

где введены векторы

$$\hat{\Phi}_i(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Phi_i(x), \tag{25}$$

$$\hat{\Phi}_{-i}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Phi_{-i}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overline{\Phi_i(x)}. \tag{26}$$

Таким образом, сжатие T_* связано с действующим в пространстве VK унитарным оператором

$$U = I + 2i(\mathcal{H}_h - iI)^{-1} \tag{27}$$

равенством

$$T_* = U + \tau(\cdot, \hat{\Phi}_{-i})_* \hat{\Phi}_i, \tag{28}$$

в котором константа τ имеет вид

$$\tau = \frac{4}{\Omega_i} \frac{(D - ih)\Psi_i(a)}{(D - ih)\Phi_i(a)}, \tag{29}$$

а значит, T_* является одномерным возмущением унитарного оператора U.

Непосредственные вычисления на основании (25) – (27) показывают, что справедливы равенства

$$U\hat{\Phi}_{-i} = u\hat{\Phi}_i, \quad U^*\hat{\Phi}_i = \bar{u}\,\hat{\Phi}_i, \tag{30}$$

где

$$u = \frac{(D + ih)\Phi_{-i}(a)}{(D - ih)\Phi_i(a)}, \quad |u| = 1. \tag{31}$$

Рассмотрение решений $\Phi_\lambda(x)$ и $\Psi_\lambda(x)$ при $x \ge a$ позволяет выразить константу Ω_λ через их вронскиан при $x = a$. Тогда из (28) – (31) следуют равенства, аналогичные (30):

$$T_*\hat{\Phi}_{-i} = t\hat{\Phi}_i, \quad T_*^*\hat{\Phi}_i = \bar{t}\,\hat{\Phi}_{-i}, \tag{32}$$

где

$$t = \frac{(D + iH)\Phi_{-i}(a)}{(D - iH)\Phi_i(a)}, \quad H = \frac{(DH_\nu^{(1)})(ia)}{iH_\nu^{(1)}(ia)}; \quad |t| < 1.$$

Из (30) следует, что дефектные операторы сжатия T_* имеют вид

$$D_{T_*} = \sqrt{1 - |t|^2}\, \|\hat{\Phi}_{-i}\|^2 (\cdot, \hat{\Phi}_{-i})_* \hat{\Phi}_{-i}, \tag{33}$$

$$D_{T_*^*} = \sqrt{1 - |t|^2}\, \|\hat{\Phi}_i\|_*^{-2} (\cdot, \hat{\Phi}_i)_* \hat{\Phi}_i, \tag{34}$$

а значит, дефектными подпространствами являются натянутые на векторы (25) и (26) одномерные пространства.

Для нахождения характеристической оператор-функции ввиду одномерности дефектных пространств, совпадающей с точностью до постоянных унитарных множителей с оператор-функцией умножения на скалярную функцию

$$\theta_{T_*}(\zeta) = \|\hat{\Phi}_i\|_*^{-2} (\Theta_{T_*}\hat{\Phi}_{-i}\, \hat{\Phi}_i)_*, \tag{35}$$

где

$$\Theta_{T_*}(\zeta) = [-T_* + \zeta D_{T_*^*}(I - \zeta T_*^*)^{-1} D_{T_*}]\Big|_{D_{T_*}VK}, \quad |\zeta| < 1, \tag{36}$$

в силу (33) достаточно выразить элемент

$$\hat{\xi} = (I - \zeta T_*^*)^{-1} \hat{\Phi}_{-i}. \tag{37}$$

Из (28) получаем $(I - \zeta T_*^*)\hat{\xi} = \hat{\Phi}_{-i} = (I - \zeta U^*)\hat{\xi} - \zeta\bar{\tau}(\hat{\xi}, \hat{\Phi}_i)_* \hat{\Phi}_{-i}$, откуда для нахождения $\hat{\xi}$ следует система уравнений

$$(I - \zeta U^*)\hat{\xi} = c\hat{\Phi}_{-i},$$

$$1 + \zeta\tau(\hat{\xi}, \hat{\Phi}_i)_* = c,$$

при решении которой достаточно использовать (27). Тогда

$$\hat{\xi} \;=\; \| \Phi_{-i} \|_*^2 ((I - \zeta U^*)^{-1}\hat{\Phi}_{-i}, (I - \zeta T_*)\hat{\Phi}_{-i})_*^{-1} (I - \zeta U^*)^{-1}\hat{\Phi}_{-i}. \tag{38}$$

После подстановки (36) в (35) с учетом (37), (38), (32), а также равенства $\| \hat{\Phi}_i \|_* = \| \hat{\Phi}_{-i} \|_*$ находим

$$\theta_{T_*}(\zeta) \;=\; \theta_0 \frac{(D - zH)\Phi_z(a)}{(D - z\overline{H})\Phi_z(a)}, \tag{39}$$

где константа H та же, что и выше, θ_0 — унитарная константа, определенная равенством

$$\theta_0 = -\frac{(D + i\overline{H})\Phi_{-i}(a)}{(D - iH)\Phi_i(a)},$$

а переменная z связана с ζ преобразованием Кэли $z = i(\zeta + 1) / (\zeta - 1)$.

Из (18) и равномерной ограниченности ядра $K(r, x)$ следует, что функция $\Phi_{\sqrt{z}}(x)$ комплексного переменного z наследует аналитические свойства связанного с ней вольтерровским интегральным оператором регулярного решения $\varphi_{\sqrt{z}}(r)$ задачи рассеяния для радиального волнового уравнения

$$\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l^2}{r^2} + q(r)\right)\varphi_{\sqrt{z}}(r) \;=\; z\varphi_{\sqrt{z}}(r),$$

а значит, является вместе со своей производной целой аналитической функцией половинного порядка. Следовательно, разложения в бесконечные произведения числителя и знаменателя (39), соответствующие квадратам их нулей, не содержат экспоненциальных сомножителей. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Сжатие T является одномерным возмущением унитарного оператора с одномерными дефектными операторами, а его характеристическая оператор-функция $\Theta_T(\zeta)$ с точностью до постоянных унитарных множителей совпадает с умножением на мероморфную аналитическую функцию $\theta_{T_*}(\zeta)$, являющуюся произведением Бляшке.*

Замечание. Как следует из данной теоремы, $\Theta_T(\zeta)$ при каждом значении l выражается с помощью зависящей лишь от ν константы H через регулярное решение интегро-дифференциального уравнения (17). В отличие от (15) сингулярный член в (17) зависит лишь от ν. В этом смысле при произвольном l исходная задача сводится к случаю $l = 0$, если l — четное число, и к случаю $l =$ $= 1$, если нечетное.

Из унитарной эквивалентности сжатий T и T_* следует, что введенная в [4] оператор-функция сводится в данном случае, как и $\theta_{T_*}(\zeta)$, к умножению на скалярную функцию $\mathcal{E}(\lambda)$, представимую в виде

$$\mathcal{E}(\lambda) \;=\; \varepsilon \frac{(D - \lambda H)\Phi_\lambda(a)}{(D - \lambda\overline{H})\Phi_\lambda(a)},$$

где ε — произвольная унитарная константа. В предельном случае $l = 0$ и $q(r) \equiv$

$\equiv 0$; имеем [4]

$$\mathcal{E}(\lambda) = \lim_{\operatorname{Im} z \uparrow 0} e_0(z) = i\,\frac{J_1(\lambda a)H_0^{(2)}(-ia) + J_0(\lambda a)H_1^{(2)}(-ia)}{J_1(\lambda a)H_0^{(2)}(-ia) - J_0(\lambda a)H_1^{(2)}(-ia)},$$

откуда $\varepsilon = 1$. Тогда в силу [4]

$$S_a^{(l)}(\lambda) = e^{-2i\lambda a}S_l(\lambda) = -\,e^{-2i\lambda a}\operatorname{sign}\lambda\,\frac{H_0^{(2)}(\lambda a)(D\Phi_\lambda)(a) + (DH_0^2)(\lambda a)\Phi_\lambda(a)}{H_0^{(1)}(\lambda a)(D\Phi_\lambda)(a) + (DH_1^{(1)})(\lambda a)\Phi_\lambda(a)}.$$

Определим равенством $m(z) = (D\Phi_z)(a)\,/\,a\Phi_z(a)$ функцию Вейля — Титчмарша для (17). На основании полученных результатов можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Для волнового уравнения с радиальным потенциалом в виде суммируемой неотрицательной функции* $q(r)$ *с носителем на отрезке* $[0, a]$ *парциальная матрица рассеяния* $S_l(\lambda)$ *выражается через функцию Вейля — Титчмарша интегро-дифференциального уравнения* (17) *дробно-линейным преобразованием*

$$\hat{S}_l(\lambda) = -\operatorname{sign}\lambda\,\frac{aH_0^{(2)}(\lambda a)m(\lambda) + (DH_0^{(2)})(\lambda a)}{aH_0^{(1)}(\lambda a)m(\lambda) + (DH_0^{(1)})(\lambda a)}.$$

Замечания. **1.** При $l = 0$ или $l = 1$ оператор V сводится к единичному, а уравнение (17) — к обыкновенному дифференциальному уравнению. В результате для $S_l(\lambda)$ получается обычное выражение S-матрицы через функцию Вейля — Титчмарша обыкновенного дифференциального уравнения.

2. Рассуждения, аналогичные [5], показывают, что $\mathcal{E}(z)$ является мероморфной аналитической функцией, однозначно определяющей потенциал $q(r)$ ввиду эквивалентности соответствующей обратной задачи в случае суммируемого потенциала задаче для самосопряженного оператора $-d^2\,/\,dr^2 + q(r) - 1\,/\,4r^2$ по двум спектрам.

Функция $\mathcal{E}(\sqrt{z})$ восстанавливается по набору своих нулей (или полюсов) как отношение целых функций половинного порядка, а значит, соответствующая обратная задача также разрешима. Построению ее решения будет посвящена отдельная работа.

3. Нетрудно видеть, что в данном случае, как и при $l = 0$, нулями характеристической оператор-функции $\Theta_T(\zeta)$ являются собственные значения диссипативного оператора $B = i\,(T + I)(T - I)^{-1}$, а полюсами — собственные значения сопряженного оператора B^*.

1. *Лакс П., Филлипс Р.* Теория рассеяния. – М.: Мир, 1971. – 312 с.
2. *Lax P. D., Phillips R. S.* Scattering theory for the acoustic equation in an even number of space dimensions // Indiana Univ. Math. J. – 1972. – **22**. – P. 101 – 134.
3. *Адамян В. М., Аров Д. З.* Об операторах рассеяния и полугруппах сжатий в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. – 1965. – **165**, № 1. – С. 9 – 12.
4. *Адамян В. М.* К теории рассеяния для волновых уравнений в четномерных пространствах // Функцион. анализ и его прил. – 1976. – **10**, вып. 4. – С. 1 – 8.
5. *Мильман А. Л.* Обратная задача акустической теории рассеяния для центрально-симметричных финитных препятствий в двумерном пространстве // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 12. – С. 1649 – 1657.
6. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 432 с.

Получено 04.06.91