УДК 517.925

Л. Г. Просенюк, канд. физ.-мат. наук (Одес. инж.-строит. ин-т)

О СУЩЕСТВОВАНИИ И АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА, ЧАСТИЧНО РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

A differential equation of the n-th order, unsolved with respect to the derivative, is considered. Under certain assumptions, we investigate the problem of the existence of solutions to this equation for special initial conditions and study their asymptotic behavior.

Розглядається одне диференціальне рівняння n-го порядку, не розв'язне відносно похідної. При деяких умовах вивчається питання існування та асимптотичної поведінки розв'язків рівняння з особливими початковими даними.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\alpha(t)\frac{d^n x}{dt^n} = a\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \varepsilon(t) f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) \tag{1}$$

в предположении, что t — независимая переменная, x — неизвестная функция, $\alpha(t) \in C(0, t_0]$, $t_0 = \text{const}$, $\alpha(t) > 0$, $\alpha(+0) = 0$, интеграл $\int_0^{t_0} (\alpha(t))^{-1}\,dt$ расходящийся, $a = \text{const} > 0$, $\varepsilon(t) \in C(0, t_0]$, существует число $\omega > a$, при котором

$$\varepsilon(t)\alpha^{-1}(t)\exp\left(\int_t^{t_0} \frac{\omega\,dt}{\alpha(t)}\right) = o(1), \quad t \to +0,$$

функция f непрерывна вместе со своими частными производными по x, $dx/dt, \ldots, d^n x/dt^n$ в окрестности нулевых значений аргументов.

В настоящей статье изучается вопрос существования и асимптотического поведения решений и их производных до n-го порядка включительно уравнения (1) таких, что

$$\lim_{t\to+0}\left(x^2(t) + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)^2\right) = 0.$$

Подобные вопросы для различных типов дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, рассматривались и другими авторами, см., например, [1 – 4]. Предлагаемые там методы исследования не применимы к уравнению (1). Кроме того, здесь выясняется не только асимптотика решений, но и их производных.

Изложим основной результат работы.

Теорема. *Каково-бы ни было число* $c \neq 0$, *существует решение* $x(t)$ *уравнения* (1), *для которого справедливы асимптотические представления*

$$x = c\Phi_1(t) + O(\Phi_2(t)), \tag{2}$$

$$\frac{d^k x}{dt^k} = c\frac{d^k \Phi_1(t)}{dt^k} + O\left(\frac{d^k \Phi_2(t)}{dt^k}\right), \quad t \to +0, \quad k = \overline{1, n},$$

где

$$\Phi_1 = \underbrace{\int_0^t \ldots \int_0^t}_{n-1} \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{a\,dt}{\alpha(t)}\right) dt \ldots dt,$$

$$\Phi_2 = \underbrace{\int_0^t \ldots \int_0^t}_{n-1} \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{\omega dt}{\alpha(t)} \right) dt \ldots dt.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $c \neq 0$. Вместо переменных $x, dx/dt, \ldots, d^n x/dt^n$ введем в уравнение (1) новые неизвестные функции $Y(t)$, $S(t, Y)$ согласно формулам

$$x = c\Phi_1(t) + \int_0^t \ldots \int_0^t \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{\omega dt}{\alpha(t)} \right) Y dt \ldots dt,$$

$$\frac{d^k x}{dt^k} = c\frac{d^k \Phi_1(t)}{dt^k} + \underbrace{\int_0^t \ldots \int_0^t}_{n-k-1} \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{\omega dt}{\alpha(t)} \right) Y dt \ldots dt, \quad k = \overline{1, n-2},$$

$$\frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} = c\frac{d^{n-1} \Phi_1(t)}{dt^{n-1}} + \frac{d^{n-1} \Phi_2(t)}{dt^{n-1}} Y, \quad \frac{d^n x}{dt^n} = c\frac{d^n \Phi_1(t)}{dt^n} + \frac{1}{\omega}\frac{d^n \Phi_2(t)}{dt^n} S. \tag{3}$$

После несложных упрощений получаем равенство

$$S = aY + \varepsilon(t)\exp\left(\int_t^{t_0} \frac{\omega dt}{\alpha(t)} \right) f\left(t, p_1, \ldots, p_{n-1}, \right.$$

$$\left. c\frac{d^{n-1}\Phi_1}{dt^{n-1}} + \frac{d^{n-1}\Phi_2}{dt^{n-1}} Y,\ c\frac{d^n\Phi_1}{dt^n} + \frac{1}{\omega}\frac{d^n\Phi_2}{dt^n} S \right). \tag{4}$$

Здесь, для краткости записи, через $p_1, \ldots, p_{n-1}$ обозначены правые части $n-1$ первых формул в (3). Согласно теореме о существовании неявной функции легко убедиться, что (4) определяет в некоторой области $D[0 \lneq t \leq t_0,\ p_1^2 + \ldots + p_{n-1}^2 + Y^2 \leq \delta^2,\ \delta = \mathrm{const}]$ функцию $S(t, p_1, \ldots, p_{n-1}, Y)$ со свойством $S(0, \ldots, 0) = 0$. Эта функция непрерывна в D и имеет там непрерывные частные производные по $p_1, \ldots, p_{n-1}, Y$. Представим ее в виде

$$S(t, p_1, \ldots, p_{n-1}, Y) = aY + \varepsilon(t)\exp\left(\int_t^{t_0} \frac{\omega dt}{\alpha(t)} \right) F(t, p_1, \ldots, p_{n-1}, Y) \tag{5}$$

и подставим в (4). Имеем тождество

$$F \equiv f\left(t, p_1, \ldots, p_{n-1}, c\frac{d^{n-1}\Phi_1}{dt^{n-1}} + \frac{d^{n-1}\Phi_2}{dt^{n-1}} Y,\ c\frac{d^n\Phi_1}{dt^n} + \frac{1}{\omega}\frac{d^n\Phi_2}{dt^n} S \right).$$

Очевидно, при достаточно малом t_0 в области D функция F и ее частные производные по $p_1, \ldots, p_{n-1}, Y$ непрерывны. Заметим, как следствие, что F ограничена в D по модулю некоторой постоянной M и удовлетворяет условию Липшица с константой L.

Продифференцируем далее по t правую часть предпоследнего равенства в (3) и результат приравняем к правой части последнего, где только вместо S записана определенная выше неявная функция. Относительно неизвестной функции $Y(t)$ получится интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\alpha(t)\frac{dY}{dt} = (a - \omega)Y + \varepsilon(t)\exp\left(\int_t^{t_0} \frac{\omega dt}{\alpha(t)} \right) F(t, p_1, \ldots, p_{n-1}, Y). \tag{6}$$

Если существует такое решение Y уравнения (6), что $|Y| \le \delta$, то, подставляя его в (3), где на месте S стоит неявная функция, мы, очевидно, получаем решение и его производные уравнения (1). Поэтому ниже, опираясь на принцип Шаудера неподвижной точки, докажем наличие у уравнения (6) требуемых решений.

Рассмотрим пространство Банаха — множество функций $Y(t)$ непрерывных на отрезке $[0, t_0]$, $\| Y(t) \| = \max\limits_{0 \le t \le t_0} |Y(t)|$. Возьмем в нем подмножество Q, состоящее из функций, удовлетворяющих неравенству $|Y(t)| \le \delta$. Ясно, что Q — ограниченное, замкнутое и выпуклое множество. Оператор T зададим следующим образом. Произвольно взятую функцию $Y(t) \in Q$ подставим в уравнение (6) под знак F. Получится линейное дифференциальное уравнение. Одно из решений последнего и поставим в соответствие $Y(t)$. Именно:

$$T\colon\ Y(t) \to \overline{Y}(t) = \left(\int_t^{t_0} \frac{\omega - a}{\alpha(t)} dt \right) \int_0^t \varepsilon(t) \alpha^{-1}(t) \times$$

$$\times \exp\left(\int_t^{t_0} \frac{a dt}{\alpha(t)} \right) F(t, p_1, \ldots, p_{n-1}, Y(t))\, dt.$$

Если t_0 достаточно мало, то

$$|\overline{Y}(t)| < M \exp\left(\int_t^{t_0} \frac{\omega - a}{\alpha(t)} dt \right) \int_0^t \varepsilon(t) \alpha^{-1}(t) \exp\left(\int_t^{t_0} \frac{a dt}{\alpha(t)} \right) dt.$$

К тому же эта оценка справедлива для любой функции $Y(t) \in Q$. Из нее также вытекает, что $\lim\limits_{t \to +0} \overline{Y}(t) = 0$, а значит, на некотором интервале $(0, t_0]$ $|\overline{Y}(t)| \le \delta$. Таким образом, оператор T переводит множество Q в себя. Докажем теперь, что T вполне непрерывен. Возьмем произвольно подмножество в Q. Его образ есть множество функций, равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных. Последнее заключение основано на том, что $\lim\limits_{t \to +0} d\overline{Y}/dt = 0$ равномерно по $Y(t) \in Q$ и тем самым производные функций-образов ограничены по модулю одним и тем же числом. Следовательно, оператор T любое подмножество из Q переводит в компактное множество. Остается, наконец, обосновать непрерывность T. Пусть последовательность функций $\{ Y_k(t) \}$ из Q сходится к функции $Y_0(t)$, т.е. $\lim\limits_{k \to +\infty} \sigma_k = 0$, $\sigma_k = \| Y_k - Y_0 \|$. Докажем, что $\| \overline{Y}_k - \overline{Y}_0 \| \to 0$ при $k \to +\infty$, где $\overline{Y}_k = TY_k$, $\overline{Y}_0 = TY_0$. Обозначим через $p_{1k}, \ldots, p_{n-1k}$ и $p_{10}, \ldots, p_{n-1\,0}$ правые части $n-2$ первых равенств в (3), где вместо Y подставлено соответственно $Y_k(t)$ и $Y_0(t)$. Тогда при достаточно малом t_0 справедливо неравенство

$$\| \overline{Y}_k(t) - \overline{Y}_0(t) \| = \left\| \exp\left(\int_t^{t_0} \frac{\omega - a}{\alpha(t)} dt \right) \int_0^t \varepsilon(t) \alpha^{-1}(t) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left(\int_t^{t_0} \frac{a dt}{\alpha(t)} \right) [F(t, p_{1k}, \ldots, p_{n-1\,k}, Y_k(t)) - F(t, p_{10}, \ldots, p_{n-1\,0}, Y_0(t))]\, dt \right\| \le$$

$$\leq L\left\| \exp\left(\int_t^{t_0} \frac{\omega - a}{\alpha(t)} dt \right) \int_0^t \varepsilon(t)\alpha^{-1}(t) \exp\left(\int_t^{t_0} \frac{a dt}{\alpha(t)} \right) (|p_{1k} - p_{10}| + \right.$$

$$\left. + \ldots + |p_{n-1\,k} - p_{n-1\,0}| + |Y_k - Y_0|)\, dt \right\| \leq$$

$$\leq L\sigma_k n \left\| \exp\left(\int_t^{t_0} \frac{\omega - a}{\alpha(t)} dt \right) \int_0^t \varepsilon(t)\alpha^{-1}(t) \exp\left(\int_t^{t_0} \frac{a dt}{\alpha(t)} \right) dt \right\|.$$

Отсюда следует $\lim\limits_{k \to +\infty} \| \bar{Y}_k - \bar{Y}_0 \| = 0$. Непрерывность T доказана. Теперь выполнены все условия принципа Шаудера. Оператор T имеет неподвижную точку, которая представлает собой решение уравнения (6) с требуемой оценкой $|Y| \leq \delta$. Это решение подставляем в правые части (3) и, как уже отмечалось, получаем решение и производные решения уравнения (1). Асимптотические представления (2) вытекают из вида замены (3), свойств функций Y и S. Теорема доказана.

1. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных // Изв. вузов. Математика. – 1971. – № 9. – С. 79 – 84.
2. *Фильчаков П. Ф.* Построение интегралов дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1969. – № 7. – С. 606 – 611.
3. *Просенюк Л. Г., Яценко С. А.* О поведении решений одного комплексного дифференциального уравнения первого порядка вблизи особой точки // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 6. – С. 51 – 54.
4. *Ricceri B.* Solutions Lipschitziennes différentielles sous forme implicite // C. r. Acad. sci. A. – 1982. – Ser. 1, **295**, № 3. – С. 245 – 248.

Получено 24.06.92