УДК 517.432

А. В. Горбунов, асп. (Киев. ун-т)

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ *

The construction of operator stochastic integrals suggested by Yu. M. Berezanskii, N. V. Zhernakov, and G. F. Us is generalized. The class of the integrable commutative quantum processes is extended and the properties of corresponding integrals are studied.

Узагальнюється конструкція операторних стохастичних інтегралів, запропонована Ю. М. Березанським, М. В. Жернаковим, Г. Ф. Усом. Розширено клас інтегровних комутативних квантових процесів, вивчені властивості відповідних інтегралів.

В работах [1, 2] построен и изучен операторный стохастический интеграл вида

$$B(\tau) = \int_0^\tau A(t)\,dE(t), \quad \tau \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty), \tag{1}$$

где $A = \{A(t) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ — коммутативный квантовый процесс (т. е. семейство коммутирующих нормальных операторов) в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \ni \delta \to E(\delta)$ — разложение единицы (р. е.) в H (здесь и ниже $\mathcal{B}(R)$ обозначает σ-алгебру борелевских множеств пространства R), причем A и E частично коммутируют в том смысле, что $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$, $\forall\, \delta \in \mathcal{B}((t, \infty))$ $[A(t), E(\delta)] = 0$ (т. е. р. е. оператора $A(t)$ коммутирует с $E(\delta)$), далее такой процесс A будет называться E-согласованным.

Интеграл (1) в [1, 2] строится с помощью спектральной теории коммутирующих семейств нормальных операторов (см. [3], гл. 2; [4], гл. 3) следующим образом. Пусть F — совместное р. е. процесса A, т. е. проекторнозначная мера на σ-алгебре C_σ, порожденной цилиндрическими множествами пространства $\mathbb{C}^{\mathbb{R}_+}$; тогда

$$A(t) = \int_{\mathbb{C}^{\mathbb{R}_+}} \lambda(t)\,dF(\lambda(\cdot)) \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Подставляя это выражение в (1) и переходя с помощью формального применения теоремы Фубини к интегралу по произведению мер, получаем

$$B(\tau) = \int_{[0,\tau]\times\mathbb{C}^{\mathbb{R}_+}} \lambda(t)\,d(E \times F)((t, \lambda(\cdot))), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Эти преобразования корректны, когда р. е. E и F коммутируют, чего в данном случае, вообще говоря, нет. Однако E-согласованность процесса A дает возможность определить произведение мер $E \times F$ на специальной σ-алгебре $\mathcal{P}_\sigma \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes C_\sigma$. Кроме того, подынтегральная функция в (2) $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^{\mathbb{R}_+} \ni$ $\ni (t, \lambda(\cdot)) \mapsto \eta((t, \lambda(\cdot)) = \lambda(t) \in \mathbb{C}$ становится $\mathcal{P}_\sigma$-измеримой, если потребовать определенную регулярность операторнозначной функции $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto A(t)$. Таким образом, интеграл в (2) определен корректно, и формула (2) служит

* Эта работа частично поддержана Фондом фундаментальных исследований при Государственном комитете Украины по науке и технологиям.

определением интеграла (1) для регулярного E-согласованного коммутативного квантового процесса.

Сформулируем следующее определение.

Определение 1. *Пусть* $A = \{A(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ — *коммутативный квантовый процесс в сепарабельном гильбертовом пространстве* H, $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \ni \delta \mapsto E(\delta)$ — *некоторое р. е. в* H *и* $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — *функция, удовлетворяющая условиям:* 1) $\varphi \in C(\mathbb{R}_+)$; 2) φ *монотонно не убывает*; 3) $\varphi(0) = 0$. *Процесс* A *назовем* (E, φ)*-согласованным, если:* $\forall t \to \mathbb{R}_+$ $\forall \delta \in \mathcal{B}((\varphi(t), \infty))$ $\forall \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$

$$[F_t(\Delta), E(\delta)] = 0, \tag{3}$$

где $F_t(\cdot)$ — *р. е. оператора* $A(t)$.

Заметим, что (E, φ)-согласованность процесса A при $\varphi(t) = t$ $(t \geq 0)$ совпадает с E-согласованностью, но, вообще говоря, условие (3) менее ограничительно, чем частичная коммутация A и E. Далее, если функция $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет требованиям 1 – 3 определения 1 и такова, что $\forall t \geq 0$ $\tilde{\varphi}(t) \geq \varphi(t)$, то из (E, φ)-согласованности процесса следует его $(E, \tilde{\varphi})$-согласованность.

В данной работе доказана интегрируемость по E регулярных (E, φ)-согласованных процессов, получены условия на проекторнозначную меру S, заданную на $\mathcal{B}([0, \infty])$, обеспечивающие интегрируемость таких процессов по S (тем самым расширяется класс интеграторов в (1)), изучены основные свойства соответствующего интеграла (1).

1. Пусть $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \ni \delta \mapsto E(\delta)$ — некоторое р.е. в H; $A = \{A(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ — (E, φ)-согласованный процесс и его совместное р. е. Определим интеграл (1) от процесса A по р. е. E, используя модификацию конструкции, изложенной в [1, 2].

Введем множество $\mathcal{P}^\varphi$ измеримых прямоугольников специального вида ((E, φ)-предсказуемых прямоугольников). Пусть C — алгебра цилиндрических множеств из $\mathbb{C}^{\mathbb{R}_+}$ вида:

$$\alpha = C(t_1, \ldots, t_n; \beta) = \{\lambda(\cdot) \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}_+} \mid (\lambda(t_1), \ldots, \lambda(t_n)) \in \beta\},$$

$\beta \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$; $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ попарно разные, $n \in \mathbb{N}$; C_σ — порожденная ею σ-алгебра; $\mathcal{F}_0 \in C_\sigma$ — σ-алгебра всех F-ненулевых множеств. Определим $\mathcal{P}^\varphi$ как множество всех прямоугольников из $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^{\mathbb{R}_+}$ одного из двух типов: 1-й тип: $\gamma = \delta \times \alpha = \delta \times C(t_1, \ldots, t_n; \beta)$, где $\delta \in \mathcal{B}((\max\{\varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_n)\}, \infty))$ (если $\alpha = \mathbb{C}^{\mathbb{R}_+}$, то $\forall \delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ $\delta \times \mathbb{C}^{\mathbb{R}_+} \in \mathcal{P}^\varphi$, поэтому $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^{\mathbb{R}_+} \in \mathcal{P}^\varphi$); 2-й тип: $\gamma_0 = \{0\} \times \tau$, $\tau \in \mathcal{F}_0$.

Обозначим через $\mathcal{P}_a^\varphi$ ($\mathcal{P}_\sigma^\varphi$) алгебру ($\sigma$-алгебру), порожденную $\mathcal{P}^\varphi$.

Лемма 1. $\mathcal{P}^\varphi$ *является полукольцом с единицей. Функция множеств* $\mathcal{P}^\varphi \ni \gamma = \delta \times \alpha \mapsto K(\gamma) = E(\delta) F(\alpha)$ *единственным образом продолжается до конечно-аддитивной ортогональной проекторнозначной меры на* $\mathcal{P}_a^\varphi$.

Теорема 1. *Существует единственное р. е.* $\mathcal{P}_\sigma^\varphi \ni \gamma \mapsto K(\gamma) = (E \times F)(\gamma)$ *такое, что* $\forall \gamma = \delta \times \alpha \in \mathcal{P}^\varphi$ $K(\gamma) = E(\delta) F(\alpha)$.

Доказательство этих утверждений аналогично доказательству теоремы 1 из [2]. Следует лишь отметить, что, во-первых, при проверке аксиом полукольца используется монотонность функции φ, а во-вторых, $K(\gamma)$ $(\gamma \in \mathcal{P}^{\varphi})$ является ортопроектором в силу коммутации $E(\delta)$ и $F(\alpha)$, которая следует из (E, φ)-согласованности процесса A.

Как и в [1, 2], подынтегральная функция $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^{\mathbb{R}_+} \ni (t, \lambda(\cdot)) \mapsto \eta((t, \lambda(\cdot))) = \lambda(t) \in \mathbb{C}$ в (2) не является $\mathcal{P}_\sigma^{\varphi}$-измеримой, поэтому приходится требовать определенную регулярность операторнозначной функции $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto A(t)$. А именно: предположим, что имеется квазиядерное оснащение $H_- \supseteq H \supseteq H_+ \supset D$ пространства H, стандартно связанное с A [3; 4]. Операторнозначная функция $\mathbb{R}_+ \ni t \to A(t)$ называется регулярной, если $\forall\, u \in D$ вектор-функция $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto A(t)u \in H_+$ слабо непрерывна слева на $\mathbb{R}_+$.

Согласно ([4], гл. 3) для регулярной функции A совокупность $\mathrm{LC}(\mathbb{R}_+)$ всех непрерывных слева на $\mathbb{R}_+$ функций имеет полную внешнюю F-меру (т. е. $\forall\, \alpha \in C_\sigma$, $\mathrm{LC}(\mathbb{R}_+) \subseteq \alpha$: $F(\alpha) = 1$). Тогда множество $R' = \mathbb{R}_+ \times \mathrm{LC}(\mathbb{R}_+)$ имеет полную внешнюю K-меру. Таким образом, р. е. допускает модификацию посредством R', т. е. корректно определено новое р. е. K' на σ-алгебре $(\mathcal{P}_\sigma^{\varphi})' = \{\gamma \cap R' \mid \gamma \in \mathcal{P}_\sigma^{\varphi}\}$ равенством $K'(\gamma \cap R') = K(\gamma)$ $\forall\, \gamma \in \mathcal{P}_\sigma^{\varphi}$.

Лемма 2. *Функция* $R' \ni (t, \lambda(\cdot)) \mapsto \eta((t, \lambda(\cdot))) = \lambda(t) \in \mathbb{C}$ *является* $(\mathcal{P}_\sigma^{\varphi})'$*-измеримой.*

Доказательство. Справедливо представление

$$\forall\, a \in \mathbb{R}_+ \ \gamma = \{(t, \lambda) \in R' \mid \operatorname{Re}\lambda(t) < a\} = \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} (\tilde{\varphi}(t_m), \tilde{\varphi}(t_m) + n^{-1}] \times$$

$$\times \{\lambda(\tilde{\varphi}(\cdot)) \in \mathrm{LC}(\mathbb{R}_+) \mid \operatorname{Re}\lambda(\tilde{\varphi}(t_m)) < a - p^{-1}\}, \quad p, n, m \in \mathbb{N};$$

аналогично для $\operatorname{Im}\lambda(t)$. Здесь $\{t_m,\ m \geq 1\}$ плотно в $\mathbb{R}_+$, $\tilde{\varphi}$ — некоторая непрерывная биекция из $\mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R}_+$ и $\tilde{\varphi}(0) = 0$, причем $\tilde{\varphi}(t) \geq \varphi(t)$ $(t \geq 0)$ (очевидно, она существует). 1) Если $\tilde{\varphi}(t) = t$ $(t \geq 0)$, то требуемое представление получено в ([2], п. 2); 2) в противном случае оно следует из случая 1) и того, что $\{\tilde{\varphi}(t_m),\ m \geq 1\}$ плотно в $\mathbb{R}_+$. Учитывая данное представление и то, что в силу свойств функции $\tilde{\varphi}$ $\{\lambda(\tilde{\varphi}(\cdot)) \mid \lambda \in \mathrm{LC}(\mathbb{R}_+)\} = \mathrm{LC}(\mathbb{R}_+)$, получаем $\gamma \in (\mathcal{P}_\sigma^{\tilde{\varphi}})' \subseteq (\mathcal{P}_\sigma^{\varphi})'$, откуда следует утверждение леммы.

Определим для (E, φ)-согласованного регулярного процесса A операторный стохастический интеграл формулой

$$\int_0^{\tau} A(t)\, dE(t) = \int_{R'} \chi_{[0,\tau]}(t)\, \lambda(t)\, dK'((t, \lambda(\cdot))) = B(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{4}$$

Заменяя в (4) $[0, \tau]$ на $[0, \infty]$, получаем определение интеграла $B(\infty)$. Очевидно, $\forall\, \tau \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ $B(\tau)$ является нормальным, вообще говоря, неограниченным оператором в H с областью определения

$$\mathfrak{D}(B(\tau)) = \left\{ x \in H \;\middle|\; \int_{R'} \chi_{[0,\tau]}(t)\, |\lambda(t)|^2\, d(K'((t, \lambda))\, x, x)_H < \infty \right\}. \tag{5}$$

Свойства построенного интеграла (4), (5) рассмотрим ниже.

2. Зафиксируем некоторое р. е. $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \ni \delta \mapsto E(\delta)$ в H и функцию φ, удовлетворяющую условиям определения 1. Обозначим через $\mathbb{E}_{(a}$ алгебру фон Неймана, порожденную множеством $\{E(\Delta) \mid \Delta \in \mathcal{B}((a, \infty))\}$. Пусть $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) \ni$ $\ni \Delta \mapsto S(\Delta)$ — ортогональная проекторнозначная мера в H, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Выясним, при каких условиях на S все регулярные (E, φ)-согласованные процессы A интегрируемы относительно S.

Теорема 2. *Предположим, что существует функция* $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *удовлетворяющая условиям* 1 – 3 *определения* 1 *такая, что*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\, \Delta \in \mathcal{B}((\psi(t), \infty]) \quad S(\Delta) \in \mathbb{E}''_{(\varphi(t)}, \tag{6}$$

где $\mathbb{E}''_{(\varphi(t)}$ *— бикоммутант* $\mathbb{E}_{(\varphi(t)}$. *Утверждается, что*:

1) *если* $S(\{\infty\}) = 0$, *то произвольный регулярный* (E, φ)-*согласованный процесс* A s-*интегрируем и интеграл*

$$T(\tau) = \int_0^\tau A(t)\, dS(t), \quad \tau \in \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{7}$$

определяется посредством формул (4), (5), *в которых* $K = E \times F$ *заменено на* $S \times F$;

2) *если* $S(\{\infty\}) \neq 0$, *то* S-*интегрируемым является произвольный регулярный* (E, φ)-*согласованный процесс* A *такой, что существует нормальный оператор* $A(\infty) = \lim\limits_{t \to \infty} A(t)$ (*в смысле сильной резольвентной сходимости*). *При этом для* $\tau < \infty$ *соответствующий интеграл определяется как в случае* 1, *а при* $\tau = \infty$ *— формулой:*

$$\begin{gathered} T = \int\limits_{[0,\infty]} A(t)\, dS(t) \overset{\text{def}}{=} T(\infty) + A(\infty) S(\{\infty\}), \\ \mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T(\infty)) \cap \mathfrak{D}(A(\infty) S(\{\infty\})). \end{gathered} \tag{8}$$

Для доказательства первого пункта теоремы достаточно заметить, что условие (6) обеспечивает (S, ψ)-согласованность любого (E, φ)-согласованного процесса A, поэтому утверждение следует из должным образом модифицированных рассуждений п. 1 (с очевидной заменой р. е. E на S и функции φ на ψ), в данном случае (S, ψ)-предсказуемые прямоугольники имеют вид $\delta \times C(t_1, \ldots, t_n; \beta)$, где $\delta \in \mathcal{B}\big((\max\{\psi(t_1), \ldots, \psi(t_n)\}, \infty]\big)$, и образуют полукольцо множеств из $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{C}^{\mathbb{R}_+}$. В условиях второго утверждения подынтегральная функция в (4) не определена на множестве $\{\infty\} \times \mathbb{C}^{\mathbb{R}_+}$ положительной $S \times F$-меры. Этим вызвано появление дополнительного требования на процесс A, из которого следует коммутация $A(\infty)$ и $S(\{\infty\})$.

Очевидно, $\forall\, \tau \in \overline{\mathbb{R}}_+$ операторный стохастический интеграл является нормальным оператором с соответствующей областью определения. Другие его свойства приведены в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Интеграл* (7), (8) *имеет следующие свойства:*

1) $\forall \tau \in \mathbb{R}_+ \quad T(\tau) = T(\infty) S(\tau) = S(\tau) T(\infty) = T S(\tau) = S(\tau) T$, *где* $S(\tau) = S([0, \tau])$;

2) $\forall \tau, \sigma \in \mathbb{R}_+ \ [T(\tau), T(\sigma)] = 0$, *причем* $T(\tau) T(\sigma) = T^2(\min\{\tau, \sigma\})$; $T(\tau) T = T T(\tau) = T^2(\tau)$;

3) *если процессы* A_1, A_2 *удовлетворяют условиям теоремы* 2 *и таковы, что* $\forall \tau, s \in \mathbb{R}_+ \ A_1(t)$ и $A_2(s)$ *коммутируют, то*

$$\forall \tau \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \int_0^\tau (A_1(t) + A_2(t))\, dS(t) = \int_0^\tau A_1(t)\, dS(t) + \int_0^\tau A_2(t)\, dS(t);$$

4) *пусть* $S(\{\infty\}) = 0$ *и функция* $\mathbb{C} \ni z \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ *непрерывна и такова, что процесс* $\{f(A(t)), \tau \in \mathbb{R}_+\}$ *регулярен.*

Тогда $\forall \tau \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ f(T(\tau)) = \int_0^\tau f(A(t))\, dS(t)$.

Доказательство теоремы основано на использовании свойств спектральных интегралов и подобно доказательству теоремы 2 из [2]. Отметим, что, заменяя в формулировке теоремы S на E, $T(\tau)$ на $B(\tau)$, получаем свойства операторного стохастического интеграла (4), (5).

Замечание. Очевидным примером меры S, удовлетворяющей условиям теоремы 2, является само р. е. E (в качестве ψ можно взять функцию φ). Еще одним примером является мера, сосредоточенная в точке $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}_+$, т. е. $S(\Delta) = \chi_\Delta(t_0)\, \mathbb{1}$, где $\chi_\Delta(\cdot)$ — индикатор множества Δ (сейчас можно положить $\psi(t) = t$, $t \in \mathbb{R}_+$).

Эти меры являются простейшими квантовыми марковскими моментами относительно фильтрации алгебр фон Неймана $\{\mathbb{E}''_{t]}, t \in \mathbb{R}_+\}$ (или более общо $\{\mathbb{E}'_{(t}, t \in \mathbb{R}_+\}$, здесь $\mathbb{E}'_{(t}$ — коммутант $\mathbb{E}_{(t)}$, где $\mathbb{E}_{t]}$ порождена $\{E(\Delta) \mid \Delta \in \mathcal{B}([0, t])\}$ [5; 6]. Поэтому построенный методами спектральной теории операторов интеграл (7), (8) представляет пример квантового стохастического интеграла по моменту остановки [6], удовлетворяющему дополнительному условию (6).

Детальное рассмотрение этих понятий будет изложено в другой статье.

1. *Березанский Ю. М., Жернаков Н. В., Ус Г. Ф.* Операторные стохастические интегралы // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 2. – С. 144 – 149.
2. *Berezanskii Yu. M., Zhernakov N. W., Us G. F.* A spectral approach to quantum stochastic integrals // Repts Math. Phys. – 1989. – **28**, № 3. – P. 347 – 360.
3. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – Киев: Наук. думка, 1978. – 360 с.
4. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – Киев: Наук. думка, 1988. – 680 с.
5. *Hudson R. L.* The strong Markov property for canonical Wiener process // J. Funct. Anal. – 1979. – **34**, № 2. – P. 266 – 281.
6. *Parthasarathy K. R., Sinha K. B.* Stop times in Fock space stochastic calculus // Probab Theor. Rel. Fields. – 1987. – **75**, № 3. – P. 317 – 349.

Получено 18.12.92