УДК 517.927.4

Н. И. Ронто, д-р физ.-мат. наук,
Т. В. Савина, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ТРЕХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

A modification of the numerical-analytic iteration method is suggested and used to study the problem of the existence of solutions to the systems of nonlinear ordinary differential equations with linear three-point boundary conditions of the general form and to construct approximate solutions.

Пропонується модифікація чисельно-аналітичного методу послідовних наближень для дослідження існування і наближеної побудови розв'язків систем звичайних диференціальних нелінійних рівнянь у випадку лінійних триточкових крайових умов загального вигляду.

Введение. В настоящей статье обосновывается численно-аналитический метод последовательных приближений [1] для исследования существования и приближенного построения решений нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x, f \in E_n, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

изучаемых при трехточечных краевых условиях вида

$$Ax(0) + A_1 x(t_1) + Cx(t) = d, \tag{2}$$

где x, f, d — точки n-мерного евклидова пространства E_n, а A, A_1, C — постоянные матрицы размерности $n \times n$, причем такие, что $\det(t_1 A_1 + TC)^1 \neq 0$.

1. Выбор вида и сходимость последовательных приближений. Пусть правая часть $f(t, x)$ уравнения (1) определена, непрерывна в области

$$[0, T] \times D, \tag{3}$$

где D — замкнутая, ограниченная область пространства E_n, и удовлетворяет в ней условию ограниченности вектором $M = (M_1, \ldots, M_n)$, $M_i \geq 0$, а также условию Липшица с матрицей $K = \{K_{ij} \geq 0, \ i, j = 1, 2, \ldots, n\}$:

$$|f(t, x)| \leq M, \quad |f(t, x') - f(t, x'')| \leq K|x' - x''|, \tag{4}$$

для всех $t \in [0, T]: x, x', x'' \in D$, где $|f(t, x)| = (|f_1(t, x)|, \ldots, |f_n(t, x)|)$. Неравенство между векторами понимается покомпонентно.

Среди краевых задач (1), (2) выберем класс таких, для которых параметры M, K, величины d, t_1, T, A, A_1, C, входящие в краевые условия (2) и область определения (3), удовлетворяют некоторым дополнительным условиям:

1) множество D_β точек $x_0 \in E_n$, содержащихся в области D вместе со своей β-окрестностью, где

$$\beta(x_0) = \frac{T}{2} M + \beta_1(x_0), \qquad \beta_1(x_0) = |H[d - (A + A_1 + C)x_0]| +$$

$$+ G_1 \alpha_1(t_1) M, \qquad H = \left(\frac{t_1}{T} A_1 + C\right)^{-1}, \quad G_1 = |H \cdot A_1|,$$

непусто:

$$D_\beta \neq \varnothing; \tag{5}$$

2) наибольшее собственное значение $\lambda(Q)$ матрицы $Q = T[K + G]/2$, где $G = G_1 \cdot K$, меньше единицы:

$$\lambda(Q) < 1. \tag{6}$$

При таких предположениях построим последовательность функций $x_m(t, x_0)$, удовлетворяющую краевым условиям (2) и равномерно сходящуюся к точному решению задачи (1), (2). Рассмотрим последовательность функций

$$x_m(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \left[f(t, x_{m-1}(t, x_0)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x_{m-1}(s, x_0))\, ds \right] dt + \alpha t, \tag{7}$$

$m = 1, 2, \ldots$, где $x_0(t, x_0) = x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Векторный параметр α подберем таким образом, чтобы функции вида (7) удовлетворяли краевым условиям (2) при произвольном $x_0 \in D_\beta$ и для всех $m = 1, 2, \ldots$.

Подставив приближенное решение (7) в краевые условия (2), для α получим следующее значение:

$$\alpha = \frac{1}{T} H \left\{ d - (A + A_1 + C) x_0 - A_1 \int_0^{t_1} \left[f(t, x_{m-1}(t, x_0)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x_{m-1}(s, x_0))\, ds \right] dt \right\}.$$

Следовательно, каждая функция последовательности

$$x_m(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \left[f(t, x_{m-1}(t, x_0)) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x_{m-1}(s, x_0))\, ds \right] dt + \frac{t}{T} H \left\{ d - (A + A_1 + C) x_0 - \right.$$

$$\left. - A_1 \int_0^{t_1} \left[f(t, x_{m-1}(t, x_0)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x_{m-1}(s, x_0))\, ds \right] dt \right\}, \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

удовлетворяет краевым условиям (2).

Справедливо следующее утверждение о сходимости последовательных приближений $x_m(t, x_0)$ вида (8).

Теорема 1. *Предположим, что правая часть $f(t, x)$ системы* (1) *определена, непрерывна в области* (3) *и выполнены условия* (4) – (6).

Тогда последовательность функций $x_m(t, x_0)$ вида (8), *удовлетворяющих краевым условиям* (2), *равномерно сходится при $m \to \infty$ в области $(t, x_0) \in \in [0, T] \times D_\beta$ к предельной функции $x^*(t, x_0)$. При этом функция $x^*(t, x_0)$, проходящая при $t = 0$ через точку $x^*(0, x_0) = x_0$, является решением интегрального уравнения*

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \left[f(t, x(t, x_0)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s, x_0))\, ds \right] dt +$$

$$+ \frac{t}{T} H \left\{ d - (A + A_1 + C) x_0 - A_1 \int_0^{t_1} \left[f(t, x(t, x_0)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s, x_0))\, ds \right] dt \right\}, \tag{9}$$

и, кроме того, $x^*(t, x_0)$ *удовлетворяет краевым условиям* (2), *т. е. является решением возмущенной краевой задачи*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x) + \Delta(x_0), \\ Ax(0) + A_1 x(t_1) + Cx(T) &= d, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T} H \left\{ d - (A + A_1 + C)x_0 - A_1 \int_0^{t_1} \left[f(t, x(t, x_0)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s, x_0))\, ds \right] dt \right\} - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x(t, x_0))\, dt.$$

Для отклонения $x^*(t, x_0)$ *от* $x_m(t, x_0)$ *для всех* $m = 1, 2, \ldots$ *справедлива оценка*

$$|x^*(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \le Q^m (E - Q)^{-1} \beta(x_0), \tag{11}$$

где $Q = T[K + G]/2$, $G = G_1 \cdot K = |H \cdot A_1| \cdot K$.

Доказательство. Покажем, что в пространстве непрерывных вектор-функций последовательность (8) является фундаментальной, а следовательно, и равномерно сходящейся.

Сначала установим, что если $x_0 \in D_\beta$, то все функции $x_m(t, x_0) \in D$. Действительно, с учетом леммы 3.1 [2, с. 13] из (8) следует

$$|x_1(t, x_0) - x_0| \le \left| \int_0^t \left[f(t, x_0) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x_0)\, ds \right] dt \right| +$$

$$+ \left| H\,[d - (A + A_1 + C)x_0] - A_1 \int_0^{t_1} \left[f(t, x_0) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x_0)\, ds \right] dt \right| \le$$

$$\le \alpha_1(t) M + \beta_1(x_0), \quad \alpha_1(t) \le T/2. \tag{12}$$

Поэтому $x_1(t, x_0) \in D$, как только $x_0 \in D_\beta$. Методом математической индукции можно показать, что для всех $m = 1, 2, \ldots$, $t \in [0, T]$, каждого $x_0 \in D_\beta$ все функции $x_m(t, x_0)$ также содержатся в D.

Для установления сходимости последовательности функций вида (8) используем признак сходимости Коши, оценивая при этом разность $|x_{m+j}(t, x_0) - x_m(t, x_0)|$ при любом $j \ge 1$.

Согласно (4), (8) и [1] для всех $m \ge 1$ и $t \in [0, T]$

$$|x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \le$$

$$\le K \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t |x_m(s, x_0) - x_{m-1}(s, x_0)|\, ds + \frac{t}{T} \int_t^T |x_m(s, x_0) - x_{m-1}(s, x_0)|\, ds \right] +$$

$$+ G \left[\left(1 - \frac{t_1}{T}\right) \int_0^{t_1} |x_m(s, x_0) - x_{m-1}(s, x_0)|\, ds + \frac{t_1}{T} \int_{t_1}^T |x_m(s, x_0) - x_{m-1}(s, x_0)|\, ds \right].$$

Обозначая $r_{m+1}(t) = |x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)|$, из последнего неравенства получаем

$$r_{m+1}(t) \le K\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t r_m(s)\,ds + \frac{t}{T}\int_t^T r_m(s)\,ds\right] +$$

$$+ G\left[\left(1-\frac{t_1}{T}\right)\int_0^{t_1} r_m(s)\,ds + \frac{t_1}{T}\int_{t_1}^T r_m(s)\,ds\right]. \tag{13}$$

Тогда из (12) непосредственно следует

$$r_1(t) = |x_1(t, x_0) - x_0| \le \alpha_1(t)M + \beta_1(x_0).$$

Из (13) при $m = 1$ находим

$$r_2(t) = K\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t (\alpha_1(s)M + \beta_1(x_0))\,ds + \frac{t}{T}\int_t^T (\alpha_1(s)M + \beta_1(x_0))\,ds\right] +$$

$$+ G\left[\left(1-\frac{t_1}{T}\right)\int_0^{t_1} (\alpha_1(s)M + \beta_1(x_0))\,ds + \frac{t_1}{T}\int_{t_1}^T (\alpha_1(s)M + \beta_1(x_0))\,ds\right] \le$$

$$\le K[\alpha_2(t)M + \alpha_1(t)\beta_1(x_0)] + G[\alpha_2(t_1)M + \alpha_1(t_1)\beta_1(x_0)].$$

Согласно [1] имеем

$$\alpha_2(t) \le \frac{T}{\pi}\tilde{\alpha}_1(t) = \frac{T}{\pi}\frac{\pi}{3}\alpha_1(t) = \frac{T}{3}\alpha_1(t)$$

и, следовательно,

$$\alpha_2(t_1) = \frac{T}{\pi}\frac{\pi}{3}\alpha_1(t_1) = \frac{T}{3}\alpha_1(t_1).$$

Тогда

$$r_2(t) = K\left[\frac{T}{3}M + \beta_1(x_0)\right]\alpha_1(t) + G\left[\frac{T}{3}M + \beta_1(x_0)\right]\alpha_1(t_1).$$

Из [1] следует, что $\alpha_1(t) \le T/2$ для всех $t \in [0, T]$ и $TM/3 + \beta_1(x_0) < < TM/2 + \beta_1(x_0) = \beta(x_0)$, поэтому $r_2(t) \le (T[K+G]/2)[TM/3 + \beta_1(x_0)]$ или $r_2(t) \le Q\beta(x_0)$.

Методом математической индукции можно показать, что

$$r_{m+1}(t) \le Q^m\beta(x_0). \tag{14}$$

Далее из соотношения

$$x_{m+j}(t, x_0) - x_m(t, x_0) = (x_{m+j}(t, x_0) - x_{m+j-1}(t, x_0)) + \ldots + (x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0))$$

с учетом (14) имеем

$$|x_{m+j}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \le \sum_{i=1}^{j} r_{m+j}(t) \le \sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i}\beta(x_0). \tag{15}$$

Если учесть условие (6), то

$$\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i} = Q^m\sum_{i=0}^{j-1} Q^i \le Q^m(E-Q)^{-1}, \qquad \lim_{m\to\infty} Q^m = 0. \tag{16}$$

Из соотношений (15), (16) можно заключить, что при $m \to \infty$ последовательность функций $\{x_m(t, x_0)\}$ равномерно сходится в области $(t, x_0) \in [0, T] \times \times D_\beta$ в силу критерия Коши:

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t, x_0) = x^*(t, x_0). \tag{17}$$

Поскольку все функции вида (8) удовлетворяют краевым условиям (2), то предельная функция $x^*(t, x_0)$ также удовлетворяет им. При $j \to \infty$ из (15) с учетом (16) при всех $m = 1, 2, \ldots$ для оценки отклонения точного решения $x^*(t, x_0)$ от m-го приближения $x_m(t, x_0)$ получаем неравенство (11).

Если в (8) перейти к пределу при $m \to \infty$ и учесть (17), то предельная функция $x^*(t, x_0)$ является решением интегрального уравнения (9), при $t = 0$ проходит через точку $x^*(0, x_0) = x_0$ и удовлетворяет краевым условиям (2). Очевидно, $x^*(t, x_0)$ — решение возмущенной по отношению к (1), (2) краевой задачи (10).

2. Некоторые свойства предельной функции. Установим, как с помощью специальным образом выбранного управляющего параметра всегда можно добиться такого видоизменения правой части дифференциального уравнения (1), что решение определенной задачи Коши для полученного уравнения будет также удовлетворять краевым условиям (2).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для любого значения* $x_0 \in D_\beta$ *можно указать такое единственное значение управляющего параметра* $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, *равное*

$$\mu = \frac{1}{T} H \left\{ d - (A + A_1 + C)x_0 - A_1 \int_0^{t_1} \left[f(t, x^*(t, x_0)) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s, x_0))\, ds \right] dt \right\} - \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x^*(t, x_0))\, dt, \tag{18}$$

где $x^*(t, x_0)$ — *предельная функция последовательности* (8), *что решение* $x = x(t) = x^*(t, x_0)$ *задачи Коши вида*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) + \mu, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{19}$$

будет также удовлетворять и краевым условиям (2), *т. е. являться решением краевой задачи* (10) *при* $\Delta(x_0) = \mu$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что функция $x(t) = x^*(t, x_0)$, являясь решением интегрального уравнения (9), есть одновременно и решением задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x) + \frac{1}{T} H \left\{ d - (A + A_1 + C)x_0 - A_1 \int_0^{t_1} \left[f(t, x^*(t, x_0)) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s, x_0))\, ds \right] dt \right\} - \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x^*(t, x_0))\, dt,$$
$$x(0) = x_0, \tag{20}$$

причем удовлетворяющим краевым условиям (2).

Итак, мы нашли значение параметра μ вида (18), при котором решение $x(t) = x^*(t, x_0)$, проходящее при $t = 0$ через точку x_0, является решением краевой задачи (20), (2). Остается показать, что это значение параметра μ является единственным значением.

Предположим, что существует два значения μ', μ'', $\mu' \neq \mu''$, такие, что решения $x(t, x_0\, \mu')$ и $x(t, x_0\, \mu'')$ задачи Коши (19) при $\mu = \mu'$, $\mu = \mu''$ удовлетворяют и краевым условиям (2). Тогда для разности этих решений из (9) получаем тождество

$$x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu') = \int_0^t \left[\left(f(t, x(t, x_0, \mu'')) - f(t, x(t, x_0, \mu'))\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{T}\int_0^T \left(f(s, x(s, x_0, \mu'')) - f(s, x(s, x_0, \mu'))\right) ds \right] dt + \frac{t}{T} G_1 \int_0^{t_1} \left[\left(f(t, x(t, x_0, \mu'')) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f(t, x(t, x_0, \mu'))\right) - \frac{1}{T}\int_0^T \left(f(s, x(s, x_0, \mu'')) - f(s, x(s, x_0, \mu'))\right) ds \right] dt.$$

Полагая $|x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu')| = r(t)$, из последнего соотношения с учетом условия Липшица (4), так же, как и при получении (13), имеем

$$r(t) \leq K \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t r(s)\, ds + \frac{t}{T} \int_t^T r(s)\, ds \right] +$$

$$+ G \left[\left(1 - \frac{t_1}{T}\right) \int_0^{t_1} r(s)\, ds + \frac{t_1}{T} \int_{t_1}^T r(s)\, ds \right]. \tag{21}$$

Отсюда находим, что для всех $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$r(t) \leq K\alpha_1(t) |r(t)|_0 + G\alpha_1(t_1) |r(t)|_0, \tag{22}$$

где

$$|r(t)|_0 = \left(\sup_t |r_1(t)|, \ldots, \sup_t |r_n(t)| \right).$$

В силу того, что $\alpha_1(t) \leq T/2$, для всех $t \in [0, T]$ из (22) следует $|r(t)|_0 \leq \leq T[K + G]\, |r(t)|_0 / 2$ или $|r(t)|_0 \leq Q\, |r(t)|_0$.

Так как все собственные числа матрицы Q лежат в круге единичного радиуса, то последнее неравенство возможно лишь при $|r(t)|_0 = 0$, т. е. при $\mu'' = = \mu'$. Противоречие доказывает единственность управляющего параметра μ.

Выясним, при каких необходимых и достаточных условиях предельная функция последовательности (8) будет являться решением рассматриваемой краевой задачи (1), (2).

Теорема 3. *Если справедливы условия теоремы* 2, *то для того чтобы решение* $x = x^*(t)$ *уравнения* (1), *проходящее при* $t = 0$ *через точку* $x^*(0) = = x_0$, *являлось и решением исходной краевой задачи* (1), (2), *необходимо и достаточно, чтобы определяющая функция* $\Delta(x_0)$ *в точке* x_0 *обращалась в нуль:*

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T} H \left\{ d - (A + A_1 + C)x_0 - A_1 \int_0^{t_1} \left[f(t, x^*(t, x_0)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x^*(s, x_0))\, ds \right] dt \right\} - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x^*(t, x_0))\, dt = 0, \tag{23}$$

где $x^*(t, x_0)$ *— предельная функция последовательности* (8). *В этом случае* $x^*(t) = x^*(t, x_0)$ *и для отклонения* $x^*(t)$ *от приближенного решения* $x_m(t, x_0)$ *вида* (8) *верна оценка* (11).

Доказательство. Достаточность условия (23) непосредственно следует из того, что функция $x^*(t, x_0)$, удовлетворяющая краевым условиям (2), есть решение задачи Коши (20). Очевидно, если (23) выполняется, то этого достаточно, чтобы $x^*(t, x_0)$ было решением краевой задачи (1), (2).

Необходимость выполнения условия (23) вытекает из того, что если $x = x^*(t)$ является решением краевой задачи (1), (2), проходящим через точку $x^*(0) = x_0$, $x_0 \in D_\beta$, то решение $x = x(t, x_0, \mu)$ задачи Коши (19) будет удовлетворять краевым условиям (2) именно при $\mu = \Delta(x_0) = 0$, так как в этом случае $x(t, x_0, \mu) = x^*(t)$ и такое значение параметра μ вида (18) согласно теореме 2 единственно. При этом $x^*(t) = x^*(t, x_0)$, что и ведет к неравенству (11).

3. Достаточные условия существования решений. Чтобы исследовать разрешимость краевой задачи (1), (2), наряду с точным определяющим уравнением (23) введем в рассмотрение приближенное определяющее уравнение

$$\Delta_m(x_0) = \frac{1}{T} H \left\{ d - (A + A_1 + C)x_0 - A_1 \int_0^{t_1} \left[f(t, x_m(t, x_0)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x_m(s, x_0))\, ds \right] dt \right\} - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x_m(t, x_0))\, dt = 0, \tag{24}$$

которое отличается лишь тем, что вместо $x^*(t, x_0)$ фигурирует $x_m(t, x_0)$.

Теорема 4. *Пусть выполняются все предположения теоремы* 1 *и, кроме того:*

1) *существует выпуклая замкнутая область* $D_1 \subset D_\beta$ *такая, что для некоторого фиксированного* $m \geq 1$ *приближенное определяющее уравнение* (24) *имеет в* D_1 *единственное решение* $x_0 = x_{0m}$ *ненулевого индекса;*

2) *на границе* S_1 *области* D_1 *выполнено условие*

$$\inf_{x_0 \in S_1} |\Delta_m(x_0)| > \left[\frac{G}{2} + K \right] Q^m [E - Q]^{-1} \beta(x_0). \tag{25}$$

Тогда краевая задача (1), (2) *имеет решение* $x = x^*(t)$ *с начальным значением* $x^*(0) = x_0^*$, *определенным значением* $x_0 = x_0^*$, *принадлежащим* D_1.

Доказательство. Так как по условию 1 точка $x_0 = x_{0m}$ является в области D_1 единственной особой точкой с ненулевым индексом отображения $\Delta_m(x_0)$: $D_\beta \to E_n$, порожденной (24), то согласно [4, с. 166] вращение векторного поля $\Delta_m(x_0)$ на границе S_1 отлично от нуля.

Если показать, что векторные поля $\Delta(x_0)$ и $\Delta_m(x_0)$ вида (23) и (24) являются гомотопными, то на основании свойств вращений гомотопных полей вращение векторного поля $\Delta(x_0)$ на S_1 также будет отлично от нуля. Тогда на основании свойств вращений по крайней мере в одной точке $x_0 = x_0^*$ области D векторное поле $\Delta(x_0)$ обращается в нуль. Это означает, что определяющее уравнение (23) имеет в D_1 по крайней мере одно решение $x_0 = x_0^*$. Следовательно, согласно теореме 3 решение $x = x^*(t)$ уравнения (1) с начальным условием $x^*(0) = x_0^*$ является решением краевой задачи (1), (2).

Для завершения доказательства теоремы остается установить гомотопность векторных полей $\Delta(x_0)$ и $\Delta_m(x_0)$. Для этого рассмотрим непрерывное по совокупности переменных семейство всюду непрерывных на S_1 векторных полей

$$P(\theta, x_0) = \Delta_m(x_0) + \theta\,[\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)], \tag{26}$$

соединяющее поля $P(0, x_0) = \Delta_m(x_0)$ и $P(1, x_0) = \Delta(x_0)$. Покажем, что для $0 \le \theta \le 1$, $x_0 \in S_1$ при выполнении условия (25) вектор-функция $P(\theta, x_0) \ne 0$. Действительно, при $m \ge 1$ из (23), (24) с учетом условия Липшица (4) и оценки (11) имеем

$$|\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)| \le \frac{1}{T} G_1 \left\{ \int_0^{t_1} \left[|f(t, x^*(t, x_0)) - f(t, x_m(t, x_0))| - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{T} \int_0^T |f(s, x^*(s, x_0)) - f(s, x_m(s, x_0))|\, ds \right] dt \right\} + \frac{1}{T} \int_0^T |f(t, x^*(t, x_0)) -$$

$$-f(t, x_m(t, x_0))|\, dt \le \frac{1}{T} G \left[\left(1 - \frac{t_1}{T}\right) \int_0^{t_1} |x^*(t, x_0) - x_m(t, x_0)|\, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{t_1}{T} \int_{t_1}^T |x^*(t, x_0) - x_m(t, x_0)|\, dt \right] + \frac{K}{T} \int_0^T |x^*(t, x_0) - x_m(t, x_0)|\, dt \le$$

$$\le \left[\frac{G}{2} + K \right] Q^m [E - Q]^{-1} \beta(x_0). \tag{27}$$

Следовательно, на S_1 в силу (25)–(27) всегда справедливо неравенство $|P(\theta, x_0)| \ge |\Delta_m(x_0)| - |\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)| > 0$, т. е. вектор-функция $P(\theta, x_0)$ на S_1 действительно нигде при $0 \le \theta \le 1$ не принимает нулевое значение, что означает гомотопность векторных полей $\Delta(x_0)$, $\Delta_m(x_0)$.

4. Необходимые условия существования решения. Предварительно докажем лемму, оценивающую близость предельных функций $x^*(t, x_0')$ и $x^*(t, x_0'')$ для точек $x_0', x_0'' \in D_\beta$, а также теорему о непрерывной зависимости определяющей функции вида (23) от x_0.

Лемма. *Пусть для краевой задачи* (1), (2) *выполнены условия* (4)–(6). *Тогда для любых точек* $x_0', x_0'' \in D_\beta$ *для отклонения предельных функций последовательностей* $x_m(t, x_0')$, $x_m(t, x_0'')$ *вида* (8) *справедливо неравенство*

$$|x^*(t, x_0') - x^*(t, x_0'')| \le [E + R]\,[E - Q]^{-1}\, |x_0' - x_0''|, \tag{28}$$

где $R = |H(A + A_1 + C)|$.

Доказательство. Непосредственно из (8), выполняя аналогичные преобразования, как при установлении (13), имеем

$$|x_1(t, x_0') - x_1(t, x_0'')| \le [E+R]|x_0' - x_0''| +$$

$$+ K\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t |x_0' - x_0''|\,ds + \frac{t}{T}\int_t^T |x_0' - x_0''|\,ds\right] +$$

$$+ G\left[\left(1-\frac{t_1}{T}\right)\int_0^{t_1} |x_0' - x_0''|\,ds + \frac{t_1}{T}\int_{t_1}^T |x_0' - x_0''|\,ds\right] =$$

$$= [E+R+\alpha_1(t)K+\alpha_1(t_1)G]|x_0' - x_0''| \le [E+Q+R]|x_0' - x_0''|. \qquad (29)$$

По методу математической индукции на основании (29) и аналогично (14) можно получить

$$|x_m(t, x_0') - x_m(t, x_0'')| \le [(E+Q+\ldots+Q^m) +$$

$$+ R(E+Q+\ldots+Q^{m-1})]|x_0' - x_0''|.$$

Из последнего соотношения при $m \to \infty$ с учетом неравенства (6) имеем

$$|x^*(t, x_0') - x^*(t, x_0'')| \le \left[\sum_{i=0}^{\infty} Q^i + \sum_{i=0}^{\infty} RQ^i\right]|x_0' - x_0''| =$$

$$= [E+R](E-Q)^{-1}|x_0' - x_0''|,$$

т. е. (28) выполняется.

Теорема 5. *Если краевая задача* (1), (2) *удовлетворяет условиям* (4) – (6), *то определяющая функция* $\Delta(x_0)$ *вида* (23) *определена, непрерывна в области* D_β *и для всех* x_0', $x_0'' \in D_\beta$ *справедлива оценка*

$$|\Delta(x_0') - \Delta(x_0'')| \le \left[\frac{1}{T}R + \left(\frac{G}{2} + K\right)(E+R)(E-Q)^{-1}\right]|x_0' - x_0''|. \qquad (30)$$

Доказательство. Для всех точек $x_0 \in D_\beta$ существует предел равномерно сходящейся последовательности (8), являющийся также непрерывной функцией. Поэтому при изменении x_0 в области D_β функция $\Delta(x_0)$ также непрерывна и ограничена:

$$|\Delta(x_0)| \le \frac{1}{T}|Hd - Rx_0| + \left(\frac{G_1}{2} + E\right)M.$$

Из (23) имеем

$$|\Delta(x_0') - \Delta(x_0'')| \le \frac{1}{T}R|x_0' - x_0''| + \frac{1}{T}G\left[\left(1-\frac{t_1}{T}\right)\int_0^{t_1}|x^*(t, x_0') -\right.$$

$$\left. - x^*(t, x_0'')|\,dt + \frac{t_1}{T}\int_{t_1}^T |x^*(t, x_0') - x^*(t, x_0'')|\,dt\right] + \frac{1}{T}K\int_0^T |x^*(t, x_0') - x^*(t, x_0'')|\,dt.$$

Подставляя в последнее соотношение оценку из (28), после несложных преобразований получаем (30).

Необходимые условия разрешимости краевой задачи (1), (2) вытекают из следующего утверждения.

Теорема 6. *Предположим, что краевая задача* (1), (2) *удовлетворяет условиям* (4) – (6). *Тогда для того чтобы некоторая область* $D_\alpha \subset D_\beta$ *содержала точку* $x_0 = x_0^*$, *определяющую при* $t = 0$ *начальное значение*

$$x^*(0) = x_0^* \tag{31}$$

решения этой задачи, необходимо, чтобы для всех m *и произвольного* $\bar{x}_0 \in D_\alpha$ *выполнялось неравенство*

$$|\Delta_m(\bar{x}_0)| \le \sup_{x_0 \in D_\alpha} \left[\frac{1}{T} R + \left(\frac{G}{2} + K \right)(E+R)(E-Q)^{-1} \right] |\bar{x}_0 - x_0| +$$
$$+ \left[\frac{G}{2} + K \right] Q^m [E-Q]^{-1} \beta(\bar{x}_0). \tag{32}$$

Доказательство. Пусть в точке $x_0 = x_0^*$ определяющая функция $\Delta(x_0)$ вида (23) обращается в нуль, $\Delta(x_0^*) = 0$. Следовательно, в силу теоремы 3 начальное значение решения краевой задачи (1), (2) вычисляется по (31).

Применив теорему 5 в случае, когда $x_0' = \bar{x}_0$, $x_0'' = x_0^*$, из (30) будем иметь

$$|\Delta(\bar{x}_0)| \le \left[\frac{1}{T} R + \left(\frac{G}{2} + K \right)(E+R)(E-Q)^{-1} \right] |\bar{x}_0 - x_0^*|.$$

Но на основании неравенства (27)

$$|\Delta(\bar{x}_0) - \Delta_m(\bar{x}_0)| \le \left[\frac{G}{2} + K \right] Q^m [E-Q]^{-1} \beta(\bar{x}_0),$$

т. е.

$$|\Delta_m(\bar{x}_0)| \le \Delta(\bar{x}_0) + \left[\frac{G}{2} + K \right] Q^m (E-Q)^{-1} \beta(\bar{x}_0).$$

Объединение двух последних неравенств доказывает справедливость соотношения (32):

$$|\Delta_m(\bar{x}_0)| \le \left[\frac{1}{T} R + \left(\frac{G}{2} + K \right)(E+R)(E-Q)^{-1} \right] |\bar{x}_0 - x_0^*| +$$
$$+ \left[\frac{G}{2} + K \right] Q^m [E-Q]^{-1} \beta(\bar{x}_0) \le$$
$$\le \sup_{x_0 \in D_\alpha} \left[\frac{1}{T} R + \left(\frac{G}{2} + K \right)(E+R)(E-Q)^{-1} \right] |\bar{x}_0 - x_0| +$$
$$+ \left[\frac{G}{2} + K \right] Q^m [E-Q]^{-1} \beta(\bar{x}_0).$$

5. Пример. Пусть в области

$$t \in [0, 1], \qquad D: |x_1| \le 0,42; \ |x_2| \le 0,4 \tag{33}$$

задана краевая задача

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0{,}05\,x_2 + 0{,}1 - 0{,}005\,t^2, \\ \dot{x}_2 &= 0{,}05\,x_1 - x_2^2 + 0{,}01\,t^4 + 0{,}15\,t. \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(0{,}5) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(1) = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}05 \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Легко видеть, что $\det(t_1 A_1 + TC) \neq 0$,

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta_1(x_0) = \begin{bmatrix} 0{,}225 - 2x_{01} \\ 0{,}1 - x_{01} - x_{02} \end{bmatrix}.$$

В качестве вектора M и матрицы K можно выбрать

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}125 \\ 0{,}53 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}05 \\ 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

и тогда

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}75 \\ 0{,}25 & 0{,}5 \end{bmatrix}, \quad \lambda_i(Q) < 1, \quad i = 1, 2,$$

$$\beta(x_0) = \begin{bmatrix} 0{,}0625 \\ 0{,}265 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}225 - 2x_{01} \\ 0{,}1 - x_{01} - x_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^{(1)}(x_0) \\ \beta^{(2)}(x_0) \end{bmatrix},$$

$$D_\beta : |x_1| \leq 0{,}42 - \beta^{(1)}(x_0); \quad |x_2| \leq 0{,}4 - \beta^{(2)}(x_0);$$

и D_β непусто для тех точек x_0, для которых $\beta^{(1)}(x_0) \leq 0{,}42$, $\beta^{(2)}(x_0) \leq 0{,}4$. Следовательно, в области (33) для краевой задачи правомочно применение рассматриваемого численно-аналитического метода.

По итерационной схеме (8) для задачи (34), (35) получаем первое приближение $x_1(t, x_0) = (x_{11}(t, x_0), x_{12}(t, x_0))$ вида

$$x_{11}(t, x_0) = x_{01} + (0{,}10042 - 2x_{01})t - 0{,}00167\,t^3,$$

$$x_{12}(t, x_0) = x_{02} + (0{,}023 - x_{01} - x_{02})t + 0{,}075\,t^2 + 0{,}002\,t^5.$$

Решением приближенного определяющего уравнения (24) при $m = 0$ является $x_0 = x_0^{(0)} = (-0{,}0003944;\ 0{,}0241761)$. Эта точка задает следующее приближенное начальное значение решения задачи (34), (35): $x(0) = x_0^{(0)}$.

Расчеты показывают, что значения точного решения $x = x^*(t) = (0{,}1\,t : 0{,}1\,t^2)$ достаточно хорошо аппроксимируются даже приближениями невысокого порядка.

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
2. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Вища шк., 1976. – 180 с.
3. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Модификация численно-аналитического метода последовательных приближений для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 8. – С. 1107–1116.
4. *Приближенное* решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. – М.: Наука, 1969. – 455 с.

Получено 29.12.93