УДК 517.968

А. Ю. Лучка, д-р физ.-мат. наук,
Т. Д. Маматов, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА С МАЛОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ СПЛАЙН-ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

A spline iteration method for finding the solutions of the Volterra integral equations of the second kind with a small nonlinearity is considered and justified.

Розглядається і обгрунтовується сплайн-ітераційний метод знаходження розв'язків інтегральних рівнянь Вольтерра другого рода з малою нелінійностю.

1. Введение. Построение решений интегральных уравнений проекционно-итеративным методом достаточно хорошо изучено в [1]. В настоящей работе рассматривается вопрос применения сплайн-итерационного метода для нахождения решений интегральных уравнений Вольтерра второго рода с малой нелинейностью, начало которому положено в работах [2, 3]. Получены оценки, характеризующие быстроту сходимости метода.

Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\,y(t)\,dt + \lambda \int_a^x G(x-t)\,F(t, y(t))\,dt, \tag{1}$$

где λ — малый параметр, $f(x)$ — известная, а $y(x)$ — искомая функции.

В дальнейшем предполагается, что:

1) $f(x)$ непрерывна при $x \in [a, b]$ и имеет непрерывные производные порядка r при $x \in \Delta_i$, $i = \overline{1, m}$, где $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i)$; $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$;

2) ядра $K(x,t)$ и $G(x-t)$ имеют непрерывные производные по x до порядка r включительно и

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s} G(x-t)\Big|_{x=t} = 0, \quad s = \overline{0, r-1};$$

3) функция $F(x, y)$ в области $D = \{a \le x \le b;\ -\infty < y < \infty\}$ удовлетворяет условию Липшица

$$|F(x, y) - F(x, \bar{y})| \le \mu\, |y - \bar{y}|,$$

где μ — положительная постоянная.

При соблюдении условий 1 – 3 уравнение (1) имеет единственное решение $y^*(x)$, непрерывное на отрезке $[a, b]$ и непрерывно дифференцируемое r раз при $x \in \Delta_i$, где $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i)$.

2. Суть метода. Применим к уравнению (1) один вариант сплайн-итерационного метода, согласно которому, исходя из начального приближения $y_0(x)$, имеющего свойство 1, последовательные приближения определяются формулами

$$y_k(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\,z_k(t)\,dt + \lambda \int_a^x G(x-t)\,F(t, y_{k-1}(t))\,dt, \tag{2}$$

$$z_k(x) = y_{k-1}(x) + w_k(x), \quad k \in N. \tag{3}$$

Поправку $w_k(x)$ ищем в виде полиномиального сплайна

$$w_k(x) = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{p=0}^{r} c_{\alpha p}^{k} \theta_\alpha(x) \frac{(x - x_{\alpha-1})^p}{p!}, \tag{4}$$

определяя неизвестные коэффициенты из условия

$$\left\{ \frac{d^s y_k(x)}{dx^s} - \frac{d^s z_k(x)}{dx^s} \right\}\bigg|_{x = x_{i-1}+0} = 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad s = \overline{0,r}, \tag{5}$$

где

$$\theta_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < x_\alpha, \\ 1, & x \geq x_\alpha, \ a \leq x \leq b. \end{cases}$$

Если ввести обозначения

$$a_j^k = c_{\alpha p}^k, \quad j = \alpha r - r + \alpha + p, \quad \alpha = \overline{1,m}, \quad p = \overline{0,r},$$

$$\varphi_j(x) = \theta_\alpha(x) \frac{(x - x_{\alpha-1})^p}{p!}, \quad j = \overline{1,n}, \quad n = mr + m,$$

$$\xi_j(x) = \int_a^x K(x,t)\varphi_j(t)\,dt, \quad \Phi_j(x) = \varphi_j(x) - \xi_j(x),$$

то на основании формул (2) – (5) для определения неизвестных коэффициентов $c_{\alpha p}^k$ получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\Lambda a_k = b_k, \tag{6}$$

в которой элементы β_{lj} матрицы Λ и компоненты вектора $b_k = (b_1^k, b_2^k, \ldots$ $\ldots, b_n^k)$ вычисляются соответственно формулам

$$\beta_{lj} = \frac{d^s \Phi_j(x)}{dx^s}\bigg|_{x = x_{i-1}+0}, \quad b_l^k = \frac{d^s \varepsilon_k(x)}{dx^s}\bigg|_{x = x_{i-1}+0}, \tag{7}$$

где $l = ir - r + i + s$, $j = \alpha r - r + \alpha + p$, $\alpha, i = \overline{1,m}$, $s, p = \overline{0,r}$, и

$$\varepsilon_k(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t) y_{k-1}(t)\,dt + \lambda \int_a^x G(x-t) F(t, y_{k-1}(t))\,dt - y_{k-1}(x). \tag{8}$$

Согласно [2] матрица системы (6) имеет структуру

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_{21} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \beta_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

что заметно упрощает нахождение решения системы (6).

3. Достаточные условия сходимости метода. Пусть $y^*(x)$ — решение уравнения (1), т. е.

$$y^*(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t) y^*(t)\,dt + \lambda \int_a^x G(x-t) F(t, y^*(t))\,dt. \tag{10}$$

и $y_k(x)$ — его приближение, построенное с помощью рассматриваемого метода.

Образуем функцию

$$v_k(x) = y^*(x) - y_k(x) - \beta_k(x), \tag{11}$$

где $\beta_k(x)$ — полиномиальный сплайн Эрмита функции $y^*(x) - y_k(x)$, т. е.

$$\beta_k(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j^k \varphi_j(x), \tag{12}$$

где неизвестные коэффициенты определяются из условия

$$\left.\frac{d^s v_k(x)}{dx^s}\right|_{x = x_{i-1}+0} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad s = \overline{0, r}. \tag{13}$$

Легко заметить, что справедливо соотношение

$$w_k(x) = \beta_{k-1}(x) - \beta_k(x), \tag{14}$$

вытекающее из формул (3) – (5) и (11) – (13).

На основании формул (2), (10), (11), (12) и (14) получим соотношения

$$y^*(x) - y_k(x) = \int_a^x K(x,t)\{v_{k-1}(t) + \beta_k(t)\}\, dt +$$

$$+ \lambda \int_a^x G(x-t)\{F(t, y^*(t)) - F(t, y_{k-1}(t))\}\, dt,$$

$$v_k(x) = \int_a^x K(x,t)\{v_{k-1}(t) + \beta_k(x)\}\, dt +$$

$$+ \lambda \int_a^x G(x-t)\{F(t, y^*(t)) - F(t, y_{k-1}(t))\}\, dt - \beta_k(x),$$

которые с учетом выражения (12) представим в виде

$$y^*(x) - y_k(x) = \int_a^x K(x,t) v_{k-1}(t)\, dt + \sum_{j=1}^{n} c_j^k \xi_j(x) +$$

$$+ \lambda \int_a^x G(x-t)\{F(t, y^*(t)) - F(t, y_{k-1}(t))\}\, dt, \tag{15}$$

$$v_k(x) = \int_a^x K(x,t) v_{k-1}(t)\, dt - \sum_{j=1}^{n} c_j^k \Phi_j(x) +$$

$$+ \lambda \int_a^x G(x-t)\{F(t, y^*(t)) - F(t, y_{k-1}(t))\}\, dt. \tag{16}$$

Если теперь подставить выражение (16) в условие (13) и учесть обозначения (7), то получим систему уравнений

$$\Lambda c_k = d_k, \tag{17}$$

в которой, с учетом леммы (1) работы [2] и свойства ядра $G(x-t)$, компоненты вектора d_k определяются формулами

$$d_l^k = 0, \quad l = \overline{1, r+1},$$
$$d_l^k = \int_a^{x_{i-1}} S_l(t) v_{k-1}(t)\,dt + \lambda \int_a^{x_{i-1}} G_l(t)\{F(t, y^*(t)) - F(t, y_{k-1}(t))\}\,dt, \tag{18}$$
$$l = \overline{r+2, n},$$

где

$$S_l(t) = \begin{cases} \dfrac{\partial^s}{\partial x^s} K(x,t)\Big|_{x = x_{i-1}+0}, & t_0 \le t < t_i, \\ 0, & t_i \le t \le x, \end{cases}$$
$$G_l(t) = \begin{cases} \dfrac{\partial^s}{\partial x^s} G(x-t)\Big|_{x = x_{i-1}+0}, & t_0 \le t < t_i, \\ 0, & t_i \le t \le x, \end{cases} \qquad l = ir - r + i + s. \tag{19}$$

Система уравнений (17) однозначно разрешима, так как матрица системы имеет структуру (9) и ее решение представимо в виде

$$c_j^k = 0, \quad j = \overline{1, r+1},$$
$$c_j^k = \sum_{l=r+2}^{n} \gamma_{jl} \left\{ \int_a^{x_{i-1}} S_l(t) v_{k-1}(t)\,dt + \right. \tag{20}$$
$$\left. + \lambda \int_a^{x_{i-1}} G_l(t)\{F(t, y^*(t)) - F(t, y_{k-1}(t))\}\,dt \right\},$$

где γ_{jl} — элементы матрицы Λ^{-1}.

Если подставить в формулы (15) и (16) выражения (20), то получим

$$y^*(x) - y_k(x) = \int_a^x M(x,t) v_{k-1}(t)\,dt + \lambda \int_a^x R(x,t)\{F(t, y^*(t)) - F(t, y_{k-1}(t))\}\,dt,$$
$$v_k(x) = \int_a^x L(x,t) v_{k-1}(t)\,dt + \lambda \int_a^x T(x,t)\{F(t, y^*(t)) - F(t, y_{k-1}(t))\}\,dt, \tag{21}$$

в которых

$$M(x,t) = K(x,t) + \sum_{j=r+2}^{n} \sum_{l=r+2}^{j} \xi_i(x) \gamma_{jl} S_l(t),$$
$$R(x,t) = G(x-t) + \sum_{j=r+2}^{n} \sum_{l=r+2}^{j} \xi_j(x) \gamma_{jl} G_l(t),$$
$$L(x,t) = K(x,t) - \sum_{j=r+2}^{n} \sum_{l=r+2}^{j} \Phi_j(x) \gamma_{jl} S_l(t),$$
$$T(x,t) = G(x-t) + \sum_{j=r+2}^{n} \sum_{l=r+2}^{j} \Phi_j(x) \gamma_{jl} G_l(t).$$

Теорема. *Если выполняются условия* (1) – (3), *то последовательность* $\{y_k(x)\}$, *построенная по методу* (2) – (5), *сходится равномерно к единственному решению* $y^*(x)$ *уравнения* (1).

Доказательство. Введем обозначения

$$|S_k(x)| = (|y^*(x) - y_k(x)|,\ |v_k(x)|),$$
$$|A(x,t)| = \begin{pmatrix} |M(x,t)| & \lambda\mu|R(x,t)| \\ |L(x,t)| & \lambda\mu|T(x,t)| \end{pmatrix}, \quad |A(x,t)| \le N. \tag{22}$$

Тогда для формул (21) с учетом обозначений (22) и условия Липшица для функции $F(x, y)$, выполнив несложные преобразования, получим неравенство

$$|S_k(x)| \le \int_a^x |A(x,t)|\,|S_{k-1}(t)|\,dt. \tag{23}$$

С помощью неравенства (23) известным путем легко установить справедливость формул

$$|y^*(x) - y_k(x)| \le \frac{(Nh)^k}{k!}|y^*(x) - y_0(x)|,$$

$$|v_k(x)| \le \frac{(Nh)^k}{k!}|v_0(x)|, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $v_0 \in C[a, b]$ и $h = b - a$.

1. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 264 с.
2. *Лучка А. Ю.* Сплайн-итерационный метод для линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода // Дифференц. уравнения с параметром. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 35 – 47.
3. *Криль С. А.* Решение интегро-разностных уравнений с малой нелинейностью проекционно-итеративным методом. – Киев, 1987. – 35 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.17).

Получено 27.04.93.