УДК 517.53

Э. О. Аликулов, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

НОВЫЕ КРИТЕРИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

A theorem is proved which states that the existence of the asymptotic limit of $f_{\bar z}$ as $z \to z_0$ implies that the complex-valued function $f(z)$ is $\mathbb{R}$-differentiable at z_0.

Доведена теорема, в якій з існування асимптотичної границі $f_{\bar z}$ при $z \to z_0$ витікає $\mathbb{R}$-диференційовність комплексної функції $f(z)$ в z_0.

Известно, что если непрерывная функция $f(x, y)$ имеет частные производные в области и в некоторой точке они непрерывны, то $f(x, y)$ дифференцируема в этой точке. Весьма полезными являются различные обобщения и усиления этого утверждения. Например, нетрудно показать, что для липшицевой функции f (вещественной или комплекснозначной) существование пределов ее частных производных в некоторой точке по точкам дифференцируемости также приводит к дифференцируемости в такой точке; при этом наперед о существовании частных производных в ней ничего не предполагается. К сожалению, в общем случае это утверждение неверно: если взять, например, произвольную сингулярную монотонную функцию $\varphi(x)$, $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}_1$, и точку x_0, где $\varphi'(x_0) = +\infty$, положить $f(z) = f(x+iy) = \varphi(x)$, то в точках $z = x_0 + iy$ это утверждение не справедливо.

Тем не менее, в настоящей статье мы докажем усиление указанного выше утверждения, рассматривая общий случай комплексной функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ с заменой частных производных комплексными производными f_z, $f_{\bar z}$. Более того, для липшицевой функции f указанные выше пределы можно заменить асимптотическими. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(z) \in Lip\,(D)$, $D \subset C_z$ *и* $f_z \to 0$ *асимптотически при* $z \to z_0 \in D$. *Тогда* $f(z)$ *моногенна в точке* z_0.

Прежде чем перейдем к доказательству теоремы, приведем некоторые оценки. Обозначим через $Q(z_0)$ измеримое множество, имеющее точку плотности z_0. Для произвольного круга $K_r(z_0) = \{z : |z - z_0| \le r\} \subset D$ введем следующие обозначения:

$$\frac{\mathrm{Mes}\,(K_r \cap Q)}{\mathrm{Mes}\,(K_r)} = 1 - \delta(r), \qquad \frac{\mathrm{Mes}\,(K_r \setminus Q)}{\mathrm{Mes}\,(K_r)} = \delta(r), \tag{1}$$

где $\delta(r) \to 0$ при $r \to 0$. Будем предполагать, что $\delta(r) \ne 0$ при всех $r \ne 0$; в противном случае все дальнейшие выкладки упрощаются.

При выполнении условий теоремы 1 справедлива формула Грина [1]:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_r} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} - \frac{1}{\pi}\iint_{K_r} \frac{\partial f}{\partial \bar\zeta}\,\frac{d\xi\,d\eta}{\zeta - z_0} \tag{2}$$

для произвольной точки $z \in D$ и круга $K_r \in D$. Отсюда для h такого, что $z_0 + h \in K_r$, имеем

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_r} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{K_r}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\xi\,d\eta}{(\zeta-z_0-h)(\zeta-z)}.$$

Рассмотрим разность последнего выражения с контурным интегралом $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^2}$ в точке z_0:

$$\Delta_h = \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^2} =$$

$$= \frac{h}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0-h)}\frac{d\zeta}{(\zeta-z_0)^2} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{K_r}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\xi\,d\eta}{(\zeta-z_0-h)(\zeta-z_0)}. \tag{3}$$

Оценим в отдельности интегралы, входящие в равенство (3). Оценка контурного интеграла

$$|\mathcal{J}_h| = \left|\frac{h}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0-h)(\zeta-z_0)^2}\right| =$$

$$= \left|\frac{h}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_r}\frac{f(\zeta)-f(z_0+h)}{(\zeta-z_0-h)(\zeta-z_0)^2}d\zeta\right| \le$$

$$\le \frac{|h|}{2\pi}\int\limits_{\partial K_r}\frac{|f(\zeta)-f(z_0+h)|}{|\zeta-z_0-h||\zeta-z_0|^2}|d\zeta| \le \frac{L}{2\pi}\frac{|h|}{r}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi = L\frac{|h|}{r}, \tag{4}$$

где L — константа Липшица (мы воспользовались тем, что сумма вычетов функции $1/(\zeta-z_0-h)(\zeta-z_0)^2$ в точках z_0 и z_0+h равна нулю). Из этой оценки следует, что (4) верна для всех h, принадлежащих некоторой окружности $|h| = \text{const}$, а так как $\mathcal{J}_h$ является аналитической функцией от h, то (4) справедлива и для всех h, лежащих внутри этой окружности.

Оценка кратного интеграла. Сначала представим его в виде суммы двух интегралов:

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{K_r(z_0)}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\xi\,d\eta}{(\zeta-z_0-h)(\zeta-z_0)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{K_r(z_0)\cap Q(z_0)}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\xi\,d\eta}{(\zeta-z_0-h)(\zeta-z_0)} +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\iint\limits_{K_r(z_0)\setminus Q(z_0)}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\xi\,d\eta}{(\zeta-z_0-h)(\zeta-z_0)} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2.$$

При оценке интеграла $\mathcal{J}_1$ положим

$$\varepsilon(r) = \operatorname*{sup\,ess}_{K_r\cap Q}|f_{\overline{z}}|;$$

по условию теоремы $\varepsilon(r) = 0$ при $r\to 0$. Заметим, что и здесь мы будем предполагать, что $\varepsilon(r)\ne 0$ при $r\ne 0$. В противном случае легко выводится голоморфность функции $f(z)$;

$$|\mathcal{I}_1| = \left| \frac{1}{\pi} \iint\limits_{K_r(z_0)\cap Q(z_0)} \frac{\partial f}{\partial \bar\zeta} \frac{d\xi\, d\eta}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)} \right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon(r)}{\pi} \iint\limits_{K_r(z_0)\cap Q_r(z_0)} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z_0 - h\|h - z_0|} = \frac{\varepsilon(r)}{\pi} \iint\limits_{K_r(z_0)\cap Q(0)} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - h\|h|} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon(r)}{\pi} \iint\limits_{K_r(0)} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - h\|\zeta|} = \frac{\varepsilon(r)}{\pi} \iint\limits_{|\zeta|\le 2|h|} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - h\|\zeta|} +$$

$$+ \frac{\varepsilon(r)}{\pi} \iint\limits_{2|h|\le\rho\le r} \frac{d\rho\, d\varphi}{|\rho - h|} = \frac{\varepsilon(r)}{\pi} \iint\limits_{|\zeta'|\le 2} \frac{d\xi'\, d\eta'}{|\zeta' - e^{i\theta}\|\zeta'|} +$$

$$+ \frac{\varepsilon(r)}{\pi} \iint\limits_{2|h|\le\rho\le r} \frac{d\rho\, d\varphi}{|\rho - h|} = \varepsilon(r)\left(M + 2\ln\frac{r}{2|h|}\right) \le \varepsilon(r)\left(M + 2\ln\frac{r}{|h|}\right). \quad (5)$$

Теперь оценим интеграл $\mathcal{I}_2$. Рассмотрим в $K_r(z_0)$ круг κ_1 с центром в точке $z_0 + h$, радиуса $r_1 = |h|\psi(r)$, где $\psi(r) \to 0$ при $r \to 0$, выбор которой укажем в дальнейшем. Перепишем интеграл $\mathcal{I}_2$ в виде

$$\mathcal{I}_2 = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{K_r(z_0)\setminus Q(z_0)} \frac{\partial f}{\partial \bar\zeta} \frac{d\xi\, d\eta}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \iint\limits_{[K_r(z_0)\setminus Q(z_0)]\setminus \kappa_1} \frac{\partial f}{\partial \bar\zeta} \frac{d\xi\, d\eta}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \iint\limits_{[K_r(z_0)\setminus Q(z_0)]\cap \kappa_1} \frac{\partial f}{\partial \bar\zeta} \frac{d\xi\, d\eta}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)} = \mathcal{I}_{21} + \mathcal{I}_{22}$$

и оценим каждый интеграл $\mathcal{I}_{21}$, $\mathcal{I}_{22}$, имея в виду, что на $K_r(z_0)\setminus Q(z_0)$ производная $f_{\bar z}$ ограничена константой Липшица функции $f(z)$ (что легко доказывается). Воспользуемся следующим утверждением.

Утверждение. *Пусть* $\varepsilon_1 \subset \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon_2 \subset \mathbb{R}^m$ *— различные множества с численно одинаковой мерой* $\mathrm{Mes}(\varepsilon_1) = \mathrm{Mes}(\varepsilon_2)$. *Если в* ε_1 *задана функция* $g_1(x) \ge 0$ *и в* ε_2 *задана функция* $g_2(y) \ge 0$ *такая, что* $g_1(x) \le g(y)$ *для произвольных* $x \in \varepsilon_1$, $y \in \varepsilon_2$, *то справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\varepsilon_1} g_1(x)\, dx \le \int\limits_{\varepsilon_2} g_2(y)\, dy.$$

Для того чтобы применить это утверждение, выберем круг κ_0 с центром в точке z_0 такой, чтобы его мера удовлетворяла условию

$$\mathrm{Mes}(\kappa_0) = \mathrm{Mes}(K_r(z_0)\setminus Q(z_0)),$$

с радиусом $z_0 = r\sqrt{\delta(r)}$ (это следует из условия (1)), где r — радиус круга $K_r(z_0)$, содержащего κ_0 и κ_1. Итак, имеем

$$|\mathcal{I}_{21}| \le \frac{L}{\pi} \iint\limits_{[K_r(z_0)\setminus Q(z_0)]\setminus \kappa_1} \frac{d\xi\, d\eta}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)} \le$$

$$\leq \frac{L}{\pi}\frac{1}{|h|\psi(r)}\iint\limits_{K_r(z_0)\setminus Q(z_0)}\frac{d\xi\,d\eta}{|\zeta-z_0|} = \frac{L}{\pi}\frac{1}{|h|\psi(r)}\iint\limits_{\kappa_0}\frac{d\xi\,d\eta}{|\zeta-z_0|} =$$

$$= \frac{L}{\pi}\frac{1}{|h|\psi(r)}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r\sqrt{\delta(r)}} d\xi\,d\eta = \frac{2Lr\sqrt{\delta(r)}}{|h|\psi(r)}, \tag{6}$$

$$|\mathcal{I}_{22}| \leq \frac{L}{\pi}\iint\limits_{[K_r(z_0)\setminus Q(z_0)]\cap\kappa_1}\frac{d\xi\,d\eta}{(\zeta-z_0-h)(\zeta-z_0)} \leq$$

$$\leq \frac{L}{\pi}\frac{1}{|h|(1-\psi(r))}\iint\limits_{[K(z_0)\setminus Q(z_0)]\cap\kappa_1}\frac{d\xi\,d\eta}{|\zeta-z_0-h|} \leq$$

$$\leq \frac{L}{\pi}\frac{1}{|h|(1-\psi(r))}\iint\limits_{\kappa_1}\frac{d\xi\,d\eta}{|\zeta-z_0-h|} =$$

$$= \frac{L}{\pi}\frac{1}{|h|(1-\psi(r))}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{|h|\psi(r)} d\xi\,d\eta = \frac{2L\psi(r)}{|h|(1-\psi(r))}. \tag{7}$$

Суммируя оценки (5) – (7) для кратного интеграла в равенстве (3), получаем оценку

$$\varepsilon(r)\left(M + 2\ln\frac{r}{|h|}\right) + 2L\left(\frac{r}{|h|}\frac{\sqrt{\delta(r)}}{\psi(r)} + \frac{\psi(r)}{(1-\psi(r))}\right). \tag{8}$$

С помощью этих оценок, не изменяя обозначения, введенные выше, докажем сформулированную нами теорему.

***Доказательство теоремы* 1.** По условию теоремы $f_{\bar z} \to 0$ при $z \to z_0$ на $K_r(z_0)\bigcap Q(z_0)$. Введем функцию

$$\varepsilon(r) = \operatorname*{sup\,ess}_{K_r\cap Q}|f_z| : \varepsilon(r) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 0.$$

При этом если в некоторой окрестности $r=0$ функция $\varepsilon(r) = 0$, то это означает, что в некоторой окрестности $U(z_0, r)$ точки z_0 $f_{\bar z}$ почти всюду равна нулю, а тогда из (2) следует, что $f(z)$ голоморфна в $U(z_0, r)$ и утверждение теоремы очевидно. Поэтому в дальнейших рассуждениях предполагаем, что $\varepsilon(r) \neq 0$ при $r \neq 0$. По сути своей функция $\varepsilon(r)$ может быть и разрывной, что затрудняет ход доказательства.

Чтобы избежать этих затруднений, заменяем $\varepsilon(r)$ функцией $\varepsilon_0(r)$, которая удовлетворяет условиям:

а) $\varepsilon_0(r)$ непрерывна, монотонно возрастающая;

б) $\varepsilon_0(r) \geq \varepsilon(r)$;

в) $\varepsilon_0(r) \geq [\delta(r)]^{1/8}$;

и при которой сохраняются все прежние оценки.

Так как значения контурных интегралов

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial K_r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^2}$$

ограничены по модулю одним числом L — константой Липшица функции f, то всегда можно подобрать последовательность $\{r_m\}$ радиусов $r_m \to 0$, для которых значения интегралов

$$\mathcal{J}_{r_m} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{r_m}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)} \tag{9}$$

сходятся к вполне определенному пределу $\mathcal{J}_0$. Пусть (9) — такая последовательность, тогда, используя все прежние оценки интегралов, получаем

$$|\Delta_h| = \left| \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{r_m}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^2} \right| \le$$

$$\le L\frac{|h|}{r_m} + \varepsilon_0(r_m)\left(M + 2\ln\frac{r_m}{|h|}\right) + 2L\left(\frac{r_m}{|h|}\frac{\sqrt{\delta(r_m)}}{\psi(r_m)} + \frac{\psi(r_m)}{1-\psi(r_m)}\right). \tag{10}$$

Отсюда, полагая

$$r_m[\varepsilon_0(r_m)]^2 \le |h| \le r_m\varepsilon_0(r_m)$$

и выбирая функцию $\psi(r) = \sqrt[8]{\delta(r)}$, имеем

$$|\Delta_h| \le L\varepsilon_0(r_m) + \varepsilon_0(r_m)\left(M + 4\ln\frac{1}{\varepsilon_0(r_m)}\right) +$$

$$+ 2L\left(\frac{1}{\varepsilon_0(r_m)}\frac{\sqrt{\delta(r_m)}}{\sqrt[8]{\delta(r_m)}} + \frac{\sqrt{\delta(r_m)}}{1-\sqrt{\delta(r_m)}}\right) \le$$

$$\le L\varepsilon_0(r_m) + \varepsilon_0(r_m)\left(M + 4\ln\frac{1}{\varepsilon_0(r_m)}\right) + 2L\left(\sqrt[4]{\delta(r_m)} + \frac{\sqrt[8]{\delta(r_m)}}{1-\sqrt[8]{\delta(r_m)}}\right) \tag{11}$$

для всех h, меняющихся в круговых кольцах с неограниченно возрастающим модулем. Другими словами, в этом случае найдется последовательность "толстых" колец, вдоль которых разностное отношение $(f(z_0+h)-f(z_0))/h$ стремится к $\mathcal{J}_0'$.

Покажем сначала, что справедливо и обратное: все предельные значения этого разностного отношения находятся среди предельных значений интеграла (9). В самом деле, пусть для некоторой последовательности $\{h_m\}$

$$\frac{f(z_0+h_m) - f(z_0)}{h_m} \to \mathcal{J}_0' \quad \text{при} \quad h_m \to 0.$$

Для каждого h_m обозначим через r_m единственный корень уравнения $r\varepsilon(r) = h_m m$. Можем считать, что для полученной последовательности $\{r_m\}$ последовательность интегралов $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_{r_m}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^2}$ сходится; в противном случае мы можем выделить соответствующую подпоследовательность. Тогда из общей оценки (11) следует

$$\left| \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{r_m}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^2} \right| \le$$

$$\leq L\varepsilon(r_m) + \varepsilon(r_m)\left(M + 4\ln\frac{1}{\varepsilon(r_m)}\right) + 2L\left(\frac{1}{\varepsilon(r_m)}\frac{\sqrt{\delta(r_m)}}{\psi(r_m)} + \frac{\psi(r_m)}{1-\psi(r_m)}\right).$$

Так как правая часть при соответствующем выборе $\psi(r)$ стремится к нулю, то $\mathcal{J}_0$ совпадает с одним из предельных значений интеграла (9) для корней r_m уравнения $h_m = r\varepsilon(r)$.

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, следует теперь показать, что существует

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_r}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^2}. \tag{12}$$

Предположим, что это не так. Тогда найдутся две последовательности $\{r_n\}$ и $\{r_n'\}$, r_n, $r_n'\to 0$, для которых

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_{r_n}}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^2} = a,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_{r_n}}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^2} = b,$$

где $a\neq b$.

В силу доказанного выше им соответствуют две последовательности "толстых" колец $\{R_n\}$ и $\{R_n'\}$, вдоль которых разностное соотношение $(f(z_0+h)-$ $-f(z_0))/h$ стремится соответственно к пределам a и b.

Прежде всего заметим, что в условиях теоремы для произвольной регулярной последовательности $\{G_n\}$ областей $\overline{G}_n\subset D$, стягивающихся к точке z_0, будет выполняться условие

$$\frac{1}{\operatorname{Mes} G_n}\int_{\partial G_n} f(\zeta)\,d\zeta \to 0, \tag{13}$$

которое вытекает из формулы Грина

$$\int_{\partial G_n} f(\zeta)\,d\zeta = 2i\iint_{G_n}\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\,d\xi\,d\eta.$$

А именно:

$$\left|\frac{1}{\operatorname{Mes} G_n}\int_{\partial G_n} f(\zeta)\,d\zeta\right| = \left|\frac{2i}{\operatorname{Mes} G_n}\iint_{G_n}\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\,d\xi\,d\eta\right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{\operatorname{Mes} G_n}\left|\iint_{G_n\cap Q(z_0)}\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\,d\xi\,d\eta\right| + \frac{2}{\operatorname{Mes} G_n}\left|\iint_{G_n\setminus Q(z_0)}\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\,d\xi\,d\eta\right| \leq$$

$$\leq 2\,\frac{\operatorname{Mes}(G_n\cap Q(z_0))}{\operatorname{Mes} G_n}\,\varepsilon(r_n) + 2L\,\frac{\operatorname{Mes}(G_n\setminus Q)}{\operatorname{Mes} G_n'},$$

где $Q(z_0)$ — измеримое множество, имеющее точку плотности z_0,

$$\varepsilon(r_n) = \operatorname*{sup\,ess}_{G_n \cap Q(z_0)} |f_{\bar z}|, \quad r_n = \max \rho(z_0, \partial G_n),$$

стремится к нулю при стягивании областей G_n в точке z_0.

Будем считать, что каждое кольцо R_n' расположено внутри кольца R_n и они последовательно чередуются; этого можно достичь, если нужно, выбирая соответствующие подпоследовательности из $\{R_n\}$ и $\{R_n'\}$ с возможным изменением нумерации.

Ясно, что если положить $z_0 = 0$ и $f(z_0) = 0$ (при этом не нарушается общность рассуждений), то

$$f(z) = az + z\alpha(z) \text{ в кольцах } \{R_n\},$$

$$f(z) = bz + z\beta(z) \text{ в кольцах } \{R_n'\},$$

где $\alpha(z)$, $\beta(z)$ — функции, стремящиеся к нулю при $z \to 0$.

Обозначим через S_n сектор угла $0 \le \varphi \le 1$, где $\varphi = \arg z$, ограниченный дугой окружности, принадлежащей внешнему контуру кольца K_n; положим $G_n = S_n \setminus K_n'$.

Рассмотрим величину

$$\gamma_n = \frac{1}{\operatorname{Mes} G_n}\left(\int_{r_n'}^{r_n} f(x)\,dx - \int_{r_n'e^i}^{r_ne^i} f(\zeta)\,d\zeta\right) =$$

$$= \frac{2}{r_n^2 - r_n'^2}\int_{r_n'}^{r_n}\left[f(x) - f(xe^i)e^i\right]dx.$$

Можем считать, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma_0,$$

конечный или бесконечный, и предположить также, что $\gamma_0 \ne -a(e^{2i} - 1)$.

Выберем σ, $0 < \sigma < 1$, такое, чтобы

$$\sigma < \left\{\min \frac{1}{5}\left|\gamma_0 + a(e^{2i} - 1)\right|, |a - b|\right\}.$$

Найдется такое n, что для него:

1) $|\alpha(\zeta)| < \dfrac{\sigma}{5}\left(1 - \dfrac{\sigma}{|a-b|}\right)$ в R^n, $|\beta(\zeta)| < (|a-b| - \sigma)/4$ в R_n';

2) $\dfrac{r_n'}{r_n} < \left(\dfrac{\sigma}{2|a-b|}\right)^{1/2}$, r_n, r_n' — внешние радиусы соответственно колец R_n и R_n';

3) $\left|\dfrac{1}{\operatorname{Mes} G_n}\displaystyle\int_{\partial G_n} f(\zeta)\right| < \sigma$;

4) $\sigma < \dfrac{1}{5}|\gamma_n + a(e^{2i} - 1)|$, это возможно и в случае $\gamma_0 = \infty$.

Для этого n введем обозначения: $G_n = G$, $r_n = r$, $r_n' = r'$ и $\gamma_n = \gamma$. Имеем

$$\left| \frac{1}{\operatorname{Mes} G} \int\limits_{\partial G_n} f(\zeta)\,d\zeta \right| = \left| \frac{2}{r^2 - r'^2} \left(\int\limits_{r'}^{r} f(\zeta)\,d\zeta + \int\limits_{r}^{re^i} f(\zeta)\,d\zeta - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int\limits_{r'e^i}^{re^i} f(\zeta)\,d\zeta - \int\limits_{r'}^{r'e^i} f(\zeta)\,d\zeta \right) \right| = \left| \frac{2}{r^2 - r'^2} \left(\int\limits_{r'}^{r} f(x)\,dx - \right.\right.$$

$$\left. - \int\limits_{r'}^{r'} f(xe^i)e^i dx - \int\limits_{r}^{re^i} (a\zeta + \zeta\alpha(\zeta))\,d\zeta - \int\limits_{r'}^{r'e^i} (b\zeta + \zeta\beta(\zeta))\,d\zeta \right) =$$

$$= \left| \gamma + \frac{2}{r^2 - r'^2} \left(a\,\frac{r^2}{2}(e^{2i} - 1) - b\,\frac{r'}{2}(e^{2i} - 1) \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{r^2 - r'^2} \left(\int\limits_{r}^{re^i} \zeta\alpha(\zeta)\,d\zeta - \int\limits_{r'}^{r'e^i} \zeta\beta(\zeta)\,d\zeta \right) \right| =$$

$$= \left| \gamma + a(e^{2i} - 1) + (a - b)(e^{2i} - 1)\,\frac{r'^2}{r^2 - r'^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{r^2 - r'^2} \left(\int\limits_{r}^{re^i} \zeta\alpha(\zeta)\,d\zeta - \int\limits_{r'}^{r'e^i} \zeta\beta(\zeta)\,d\zeta \right) \right| \geq$$

$$\geq \left| \gamma + a(e^{2i} - 1) \right| - \left(2|a - b|\,\frac{r'^2}{r^2 - r'^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{r^2 - r'^2} \left(\frac{r^2}{2}\sigma\left(1 - \frac{\sigma}{|a - b|}\right) + \frac{r'^2}{2}(|a - b| - \sigma) \right) \right) \geq \left| \gamma + a(e^{2i} - 1) \right| -$$

$$- \frac{\sigma|a - b|}{|a - b| - \sigma} - \sigma - \sigma \geq 5\sigma - 3\sigma > 2\sigma.$$

Полученное противоречие с условием 3 доказывает существование предела (12), что и завершает доказательство теоремы.

Приведем как следствие теоремы 1 следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $f(z) \in \operatorname{Lip}(D)$, $D \subset \mathbb{C}_z$, *и в некоторой точке* $z_0 \in D$ *существует асимптотический предел производной* f_z *либо* $f_{\bar z}$. *Тогда* $f(z)$ *дифференцируема в точке* z_0, *причем соответствующий коэффициент дифференциала* $df = f_z dz + f_{\bar z}\, d\bar z$ *равен этому предельному значению.*

Доказательство. В самом деле, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \alpha$, то для функции $\varphi(z) = f(z) - \alpha\bar z$ имеем $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi_{\bar z} = 0$, т. е. $\varphi(z)$ моногенна в точке z_0, а это равносильно дифференцируемости $f(z)$ в точке z_0.

Если же $\lim\limits_{z \to z_0} f_{\bar z} = \beta$, то для функции $\psi(z) = \overline{f(z)}$ получим, что

$$\lim_{z \to z_0} \psi_z = \lim_{z \to z_0} \overline{f_{\bar z}(z)} = \beta,$$

следовательно, $\psi(z)$, а значит, и функция $f(z)$ дифференцируемы в точке z_0.

Теорема 3. *Пусть функция* $f(z) \in \mathrm{Lip}(D)$, $D \subset \mathbb{C}_z$, *и на множестве* $\mathrm{E} \subset D$ *не первой категории множества моногенности* $\mathfrak{M}_z(f)$ *нигде не плотно. Тогда* $f(z)$ *дифференцируема в* E *за исключением множества первой категории и* $\mathfrak{M}_z(f)$ *является окружностями или точками.*

Доказательство. Многозначное отображение $z \to \mathfrak{M}_z(f)$ имеет множество E' второй категории в D точек полунепрерывности сверху. Поэтому все точки E за исключением множества их первой категории являются такими точками. Пусть z_0 — произвольная точка E. Рассмотрим два возможных случая:

1) $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ не разбивает плоскость;

2) $\mathfrak{M}_{z_0}(f)$ разбивает плоскость.

В первом случае возьмем произвольную точку ζ_0 множества $\mathfrak{M}_{z_0}$. Так как в этом случае $\mathfrak{M}_{z_0}$ не разбивает плоскость, то найдется $z_n \in D$ — последовательность точек дифференцируемости, стремящихся к z_0, такая, что

$$\lim_{z_n \to z_0} \mathfrak{M}_{z_n} = \zeta_0.$$

А это означает, что радиусы окружностей $\mathfrak{M}_{z_n}(f)$ (по основной теореме о множествах моногенности $\mathfrak{M}_{z_n}$ [2] они в таких точках являются либо окружностью, либо точкой), которыми являются модули $|f_{\bar{z}}|$, стремятся к нулю при $z_n \to z_0$. Отсюда по теореме 1 и из произвольности z_0 вытекает моногенность $f(z)$ в множестве E, что равносильно дифференцируемости в E.

Во втором случае предположим, что z_0 — произвольная точка полунепрерывности сверху, и в нем $f(z)$ не дифференцируема. Это означает, что не существует предел f_z, $f_{\bar{z}}$ при $z \to z_0$; поэтому найдутся последовательности точек дифференцируемости $\{z_n\}$ и $\{z_n'\}$, стремящиеся к z_0, такие, что:

а) $f_z(z_n) \to A$, $f_{\bar{z}}(z_n) \to B \neq 0$;

б) $f_z(z_n') \to A' \neq A$, $f_{\bar{z}}(z_n') \to B'$.

В силу непрерывности $z \to \mathfrak{M}_z(f)$ найдется такая δ-окрестность точки z_0 $U(z_0, \delta)$, что, начиная с некоторго $n > N$, все $\mathfrak{M}_{z_n}$ и $\mathfrak{M}_{z_n'}$ лежат в ε-окрестности $\mathfrak{M}_{z_0}$. Возьмем внутри предельной окружности $\mathfrak{M}_{z_n}$ и вне $\mathfrak{M}_{z_n^*}$ точку C, не принадлежащую $\mathfrak{M}_{z_0}$, и введем функцию $\varphi(z) = f(z) - Cz$, которая однолистна по построению. Но такое отображение обращает ориентацию в точках z_n, а в точках z_n' сохраняет, что противоречит его однолистности. Отсюда следует, что существует $\lim\limits_{z_n \to z} f_z$, $f_{\bar{z}}$ при $z \to z_0$ вопреки принятому предположению, следовательно, по теореме 2 функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 и $\mathfrak{M}_{z_0}$ — предел $\mathfrak{M}_{z_n}$ при $z_n \to z_0$, являющийся окружностью (или точкой). Из произвольности z_0 следует утверждение теоремы.

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
2. *Трохимчук Ю. Ю.* Непрерывные отображения и условия моногенности. – М.: Физматгиз, 1963. – 211 с.

Получено 12.05.92