УДК 517.9

С. Кохманьски, д-р физ. наук (Ин-т фундам. пробл. техники ПАН, Варшава)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА

A new method for finding the asymptotics of the coefficients of solutions to the Hill equation is presented.

Наведено один з можливих способів знаходження асимптотики коефіцієнтів розв'язку рівняння Хілла.

Введение. В различных задачах механики и физики часто встречаются линейные дифференциальные уравнения или их системы с периодическими коэффициентами [1]. Как известно, явление параметрического резонанса описывается системами линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. В задачах этого типа часто необходимо знать поведение высших гармоник в решении, которое можно представить согласно теореме Флоке в виде произведения $\exp(\mu x)$ на периодическую функцию $\varphi(x)$, где μ — характеристический показатель, а x — независимая переменная. В данной статье на примере уравнения Хилла будет показано, как с помощью одного формального приема можно оценить асимптотическое поведение коэффициентов разложения в решении уравнения Хилла.

I. Уравнение Матье. Рассмотрим сначала для примера уравнение Матье

$$y'' + (a\cos 2x + \lambda)\,y = 0 \tag{1}$$

как частный случай уравнения Хилла

$$y'' + [\Phi(x) + \lambda]\,y = 0, \tag{2}$$

где штрих означает производную по x, а λ — const, с периодической функцией $\Phi(x)$. Решение уравнения (1), существующее по теореме Флоке, представим в виде

$$y(x) = \exp(2\mu x)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \exp(i2nx), \tag{3}$$

где μ — характеристический показатель, который предполагается известным [2]. Нашей задачей является определение асимптотического поведения коэффициентов b_n разложения (3) при больших n. Подставляя (3) в (1), получаем для определения b_n бесконечную систему однородных линейных уравнений

$$(4\mu^2 + 8i\mu n - 4n^2 + \lambda)b_n + \frac{a}{2}(b_{n+1} + b_{n-1}) = 0,\ (n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Для существования нетривиального решения системы (4) необходимо, чтобы характеристический показатель μ удовлетворял условию $\operatorname{ch}(\pi\mu) = 1 + 2\Delta(0)\times$ $\times\sin^2(\pi\lambda^{1/2}/2)$, где $\Delta(0)$ — детерминант Хилла [2].

Для отыскания асимптотического поведения коэффициентов b_n при больших n воспользуемся следующим формальным приемом: применим оператор сдвига $\exp(\pm d/dn)$ к b_{n-1} и b_{n+1}, т.е. запишем

$$b_{n\pm1} = \exp(\pm d/dn)b_n. \tag{5}$$

Тогда для b_n как функции n получим уравнение

$$a \operatorname{ch}(d / dn) b_n + [4(\mu + in)^2 + \lambda] b_n = 0. \tag{6}$$

Все формальные обоснования применения этого приема к данному случаю мы для краткости опускаем. В „длинноволновом приближении" уравнение (6) примет вид

$$\frac{d^2 b}{dn^2} + \left[\frac{8}{a}(\mu + in)^2 + 2\left(\frac{\lambda}{a} + 1\right)\right] b_n = 0,$$

поскольку при больших n производные высших порядков малы, и их в принятом приближении можно опустить (мы оставляем первые неисчезающие члены в разложении $\operatorname{ch} \kappa$). Переходя к переменной $z = \mu + in$, получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2 b(z)}{dz^2} - \left[2\left(\frac{\lambda}{a} + 1\right) + \frac{8}{a} z^2\right] b(z) = 0. \tag{7}$$

Решением уравнения (7) является функция

$$b(z) = z^{-1/2} \hat{y}\left(-\frac{\lambda + a}{4\sqrt{2a}}, 1/4, 2\sqrt{2/a} z^2\right),$$

где $\hat{y}(k, m, x)$ — решение уравнения Уиттекера [3]:

$$4x^2 \hat{y}'' = (x^2 - 4kx + 4m^2 - 1) \hat{y},$$

$$\hat{y}(k, m, x) = C_1 M_{k,m}(x) + C_2 M_{k,-m}(x).$$

Здесь C_1, C_2 — постоянные, а $M_{k,\pm m}$ — введенная Уиттекером функция, причем в рассматриваемом случае $k = -(\lambda + a) / \sqrt{2a}$, $m = 1/4$. Таким образом, для $b(z)$ получаем

$$b(z) = C_1 z^{-1/2} M_{k,1/4}(\sqrt{8/a}\, z^2) + C_2 z^{-1/2} M_{k,-1/4}(\sqrt{8/a}\, z^2). \tag{8}$$

В частности, при $\lambda = -a$, $k = 0$ функция $M_{k,m}$ сводится к другой известной функции [2]:

$$M_{0,m}(x) = 4^m \exp(-2^{-1} m\pi i) \Gamma(m + 1) x^{-1/2} J_m(2^{-1} ix),$$

где $\Gamma(p)$ — гамма-функция Эйлера, J_m — функция Бесселя 1-го рода. В этом случае для $b(z)$ из (8) получаем выражение

$$b(z) = C_1 \exp(-i\pi / 8) \Gamma(5/4) (8/a)^{1/4} (2z)^{1/2} J_{1/4}(i \sqrt{2/a}\, z^2) +$$

$$+ C_2 \exp(i\pi / 8) \Gamma(3/4) (8/a)^{1/4} (z/2)^{1/2} J_{-1/4}(i \sqrt{2/a}\, z^2).$$

II. Уравнение Хилла. Рассмотрим теперь более общий случай, т. е. уравнение Хилла (2) с 2π-периодической функцией $\Phi(x)$. Пусть функция $\Phi(x)$ представлена своим рядом Фурье:

$$\Phi(x) = \sum_n{}^{*} a_n \exp(inx)$$

(звездочка означает, что $n = 0$ при суммировании пропускается). Решение, существующее по теореме Флоке, представим соответственно в виде

$$y = \exp(\mu x) \sum_n b_n \exp(i nx). \tag{9}$$

Как и выше, для определения коэффициентов данного разложения b_n получим бесконечную систему однородных линейных уравнений вида:

$$b_n(\mu^2 + 2\mu\, in - n^2 + \lambda) + \sum_m{}^* b_{n-m} a_m = 0, \quad n = (\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots).$$

Далее, вводя оператор сдвига $b_{n-m} = \exp(-m(d/dn))\, b_n$, получаем

$$b_n(\mu^2 + 2\mu in - n^2 + \lambda) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m e^{-m(d/dn)} + a_{-m} e^{m(d/dn)}\right] b_n = 0,$$

и в „длинноволновом приближении", ограничиваясь производными не выше второго порядка в разложении $\exp(m(d/dn))$, имеем уравнение для определения асимптотического поведения коэффициентов b_n:

$$\frac{d^2 b}{dz^2} + a\frac{db}{dz} + \gamma b - c^2 z^2 b = 0, \tag{10}$$

где

$$a = \frac{\sum_1^{\infty} m(a_m - a_{-m})}{\sum_1^{\infty} \frac{m^2}{2}(a_m + a_{-m})}, \quad \gamma = -\frac{\lambda + \sum_1^{\infty}(a_m + a_{-m})}{\sum_1^{\infty} \frac{m^2}{2}(a_m + a_{-m})}, \quad c^2 = \left[\sum_1^{\infty} \frac{m^2}{2}(a_m + a_{-m})\right]^{-1}, \tag{11}$$

$$z = \mu + in,$$

a_m — коэффициенты разложения функции $\Phi(x)$ в ряд Фурье. Уравнение (10) имеет решения вида

$$b(z) = z^{-1/2} e^{-az/2}\, \hat{y}\left(\frac{4\gamma - a^2}{16c}, 1/4, cz^2\right),$$

где $\hat{y}(k, m, x)$ является решением уравнения Уиттекера (8), причем $k = (4\gamma - a^2)/16c$, $m = 1/4$, где a, γ и c определяются формулами (11). В частности, значению $k = 0$, т. е. $4\gamma = a^2$, отвечает решение вида

$$b(z) = z^{-1/2} e^{-az/2}\left[C_1 M_{0,1/4}(cz^2) + C_2 M_{0,-1/4}(cz^2)\right],$$

где a и c определяются формулами (11).

Аналогичный прием можно использовать и в случае систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, где роль высших гармоник может иметь существенное значение при описании параметрического резонанса [1].

1. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Параметрический резонанс в линейных системах. – М.: Наука, 1987. – 718 с.
2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
3. *Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Х.* Курс современного анализа: В 2-х т. – М.: Гостехтеориздат, 1933. – 342 с.

Получено 04.03.92