УДК 519.21

Г. П. Буцан, М. Ю. Козаченко

Смешанное произведение операторных стохастических систем

В работе [1] указаны достаточные условия существования эволюционной стохастической операторной системы

$$X_s^t = \lim \prod_{k=1}^{m_n} Z_{t_{k-1}}^{t_k}, \quad \delta_n \to 0 \tag{1}$$

для произвольной стохастической операторной системы Z_s^t, где $0 \leqslant s \leqslant \leqslant t \leqslant T \leqslant \infty$, $\{s = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{m_n} = t\} = \Delta_n [s, t]$, $\delta_n = \max\limits_k (t_k - t_{k-1}) \to \to 0$ при $n \to \infty$.

В настоящей статье на основании результатов указанной работы будут приведены условия существования эволюционной стохастической операторной системы

$$X_s^t = (Z(1) \boxtimes Z(2))_s^t = \lim \prod_{k=1}^{m_n} Z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\, Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2), \quad \delta_n \to 0 \tag{2}$$

в терминах ее составляющих систем $Z_s^t(1)$ и $Z_s^t(2)$. Поэтому в ней сохранены все принятые в [1] обозначения и определения.

Для того, чтобы воспользоваться теоремой из [1], рассмотрим систему $Z_s^t = Z_s^t(1)\, Z_s^t(2)$ и будем последовательно определять условия на $Z_s^t(1)$ и $Z_s^t(2)$, которые обеспечат выполнимость условий 1 — 4 из [1] для системы Z_s^t.

В этой связи предположим, что при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ системы $Z_s^t(1)$ и $Z_s^t(2)$ из $G_2(H, \Omega)$ — σ_s^t-измеримы, независимы и удовлетворяют условию (ср. условия 2 и 4 в [1]): в $|\cdot|_4$ существует и не зависит от последовательности разбиений $\Delta_n [s, t]$ следующий предел:

$$\check{D}(Z(i))_s^t = \check{Y}_s^t(i) = \lim \sum_{k=1}^{m_n} (Z_{t_{k-1}}^{t_k}(i) - z_{t_{k-1}}^{t_k}(i)), \tag{3}$$

$$z_s^t(i) = EZ_s^t(i), \quad i = 1, 2, \quad \delta_n \to 0,$$

а также условию согласованной регулярности

$$\forall\, \tau \in [0, T] \quad Z_{\tau-}^{\tau}(1) = Z_{\tau-}^{\tau}(2) = I \vee Z_{\tau}^{\tau+}(1) = Z_{\tau}^{\tau+}(2) = I. \tag{4}$$

Нас прежде всего интересует вопрос, когда в $|\cdot|_4$ существует и не зависит от последовательности разбиений $\Delta_n [s, t]$ следующий предел:

$$\check{D}(Z)_s^t = \check{Y}_s^t = \lim \sum_{k=1}^{m_n} (Z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\, Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\, z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)), \quad \delta_n \to 0, \tag{5}$$

иными словами, когда Z_s^t удовлетворяет (3) (см. также условие 4 в [1]).

Для ответа на этот вопрос представим правую часть выражения (5) в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{m_n} (Z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\, Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\, z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)) = \sum_{k=1}^{m_n} (Z_{t_{k-1}}^{t_k}(1) - z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)) \times$$

$$\times (Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)) + \sum_{k=1}^{m_n} (z_{t_{k-1}}^{t_k}(1) - I)(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m_n}(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(1))(z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-I)+\sum_{k=1}^{m_n}(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(2))+$$
$$+\sum_{k=1}^{m_n}(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)). \tag{6}$$

Из (4) и формулы (7) в [1] вытекает следующее условие согласованной регулярности для $\check{Y}_s^t(1)$, $\check{Y}_s^t(2)$ при $\tau\in[0,T]$:

$$Z_{\tau-}^{\tau}(1)-I=\check{Y}_{\tau-}^{\tau}(1)=Z_{\tau-}^{\tau}(2)-I=\check{Y}_{\tau-}^{\tau}(2)=0\ \bigvee$$
$$\bigvee\ Z_{\tau}^{\tau+}(1)-I=\check{Y}_{\tau}^{\tau+}(1)=Z_{\tau}^{\tau+}(2)-I=\check{Y}_{\tau}^{\tau+}(2)=0. \tag{7}$$

Из следующей ниже леммы 1 теперь вытекает, что в $|\cdot|_4$ существует и не зависит от последовательности разбиений $\Delta_n[s,t]$ предел

$$(\check{Y}(1)\boxplus\check{Y}(2))_s^t=\lim\sum_{k=1}^{m_n}\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\,\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2),\quad \delta_n\to 0. \tag{8}$$

Покажем, что предел первого слагаемого в правой части выражения (6) как раз и совпадает с выражением (8). Для этого, воспользовавшись неравенством Коши — Буняковского, оценим разность

$$\Big|\sum_{k=1}^{m_n}(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(1))(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(2))-\sum_{k=1}^{m_n}\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\times$$
$$\times\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2))\Big|_4^2\leqslant 2\Big|\sum_{k=1}^{m_n}(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)-\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(1))(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(2))\Big|_4^2+$$
$$+2\Big|\sum_{k=1}^{m_n}\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(1)(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2))\Big|_4^2\leqslant 2\Big(\sum_{k=1}^{m_n}\Big|Z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)-$$
$$-z_{t_{k-1}}^{t_k}-\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\Big|_4^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{m_n}\Big|Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)\Big|_4^2\Big)+$$
$$+2\Big(\sum_{k=1}^{m_n}\Big|\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\Big|_4^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{m_n}\Big|Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2)\Big|_4^2\Big)=$$
$$=2\Big|\sum_{k=1}^{m_n}(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(1))-\check{Y}_s^t(1)\Big|_4^2\Big|\sum_{k=1}^{m_n}(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(2))\Big|_4^2+$$
$$+2|\check{Y}_s^t(1)|_4^2\Big|\sum_{k=1}^{m_n}(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2))\Big|_4^2. \tag{9}$$

Так как по определению $Z_s^t(i)$, $i=1,2$, удовлетворяют условию (3), то правая часть выражения (9) стремится к нулю при $n\to\infty$.

Пусть теперь в $|\cdot|_2$ существуют и не зависят от последовательности разбиений $\Delta_n[s,t]$ пределы

$$D(z(i))_s^t=y_s^t(i)=\lim\sum_{k=1}^{m_n}(z_{t_{k-1}}^{t_k}(i)-I),\quad \delta_n\to 0,\quad i=1,2, \tag{10}$$

которые удовлетворяют следующему условию:

$$\varepsilon_n(i)=\sum_{k=1}^{m_n}|z_{t_{k-1}}^{t_k}(i)-I-y_{t_{k-1}}^{t_k}(i)|_2^2\to 0,\quad \delta_n\to 0. \tag{11}$$

Кроме того, пусть системы $z_s^t(i)$ обладают ограниченной квадратичной вариацией

$$\omega_i(t) = \sup_{\Delta_n[0,t]} \sum_{k=1}^{m_n} | z_{t_{k-1}}^{t_k}(i) - I |_2^2 < \infty. \quad (12)$$

Из (10) — (12) легко вытекает, что и системы $y_s^t(i)$ обладают ограниченной квадратичной вариацией

$$\varkappa_i(t) = \sup_{\Delta_n[0,t]} \sum_{k=1}^{m_n} | y_{t_{k-1}}^{t_k}(i) |_2^2 < \infty. \quad (13)$$

Из (11) легко следует, что при $\tau \in [0, T]$ существуют пределы

$$y_{\tau-}^{\tau}(i) = z_{\tau-}^{\tau}(i) - I, \quad y_{\tau}^{\tau+}(i) = z_{\tau}^{\tau+}(i) - I, \quad (14)$$

для которых в силу равенств (3), (4) и (7) из [1] вытекают условия согласованной регулярности

$$y_{\tau-}^{\tau}(1) = \check{Y}_{\tau-}^{\tau}(1) = y_{\tau-}^{\tau}(2) = \check{Y}_{\tau-}^{\tau}(2) = 0 \vee$$
$$\vee\, y_{\tau}^{\tau+}(1) = \check{Y}_{\tau}^{\tau+}(1) = y_{\tau}^{\tau+}(2) = \check{Y}_{\tau}^{\tau+}(2) = 0. \quad (15)$$

На основании следующей ниже леммы 2 при $\delta_n \to 0$ в $|\cdot|_4$ существуют и не зависят от последовательности разбиений $\Delta_n[s, t]$ пределы

$$(y(1) \boxplus \check{Y}(2))_s^t = \lim \sum_{k=1}^{m_n} y_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\, \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2), \quad (16)$$

$$(\check{Y}(1) \boxplus y(2))_s^t = \lim \sum_{k=1}^{m_n} \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\, y_{t_{k-1}}^{t_k}(2). \quad (17)$$

Покажем, что они соответственно равны пределам второго и третьего слагаемых в правой части равенства (6). Поскольку доказательства этих фактов аналогичны, докажем первый из них. Для этого, воспользовавшись очевидным неравенством (см., например, [2]) $|AB|_3 \leqslant |A|_2\, |B|_3$ и неравенством Коши — Буняковского, оценим разность

$$\Big| \sum_{k=1}^{m_n} (z_{t_{k-1}}^{t_k}(1) - I)(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - I) - \sum_{k=1}^{m_n} y_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\, \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2) \Big|_4^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \Big| \sum_{k=1}^{m_n} (z_{t_{k-1}}^{t_k}(1) - I - y_{t_{k-1}}^{t_k}(1))(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)) \Big|_4^2 +$$

$$+ 2 \Big| \sum_{k=1}^{m_n} y_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\, (Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2)) \Big|_4^2 \leqslant 2 \Big(\sum_{k=1}^{m_n} | z_{t_{k-1}}^{t_k}(1) -$$

$$- I - y_{t_{k-1}}^{t_k}(1) |_2^2 \Big) \Big(\sum_{k=1}^{m_n} | Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) |_4^2 \Big) + 2 \Big(\sum_{k=1}^{m_n} | y_{t_{k-1}}^{t_k}(1) |_2^2 \Big) \times$$

$$\times \Big(\sum_{k=1}^{m_n} | Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2) |_4^2 \Big) = 2\varepsilon_n(1) \Big| \sum_{k=1}^{m_n} (Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) -$$

$$- z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)) \Big|_4^2 + 2\varkappa_1(t) \Big| \sum_{k=1}^{m_n} (Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2) \Big|_4^2 \to 0 \quad (18)$$

при $\delta_n \to 0$ в силу условий (3), (11) и (13).

Итак, условие (5) для системы Z_s^t выполнено. Для этого было достаточно, чтобы независимые системы $Z_s^t(i)$ из $G_2(H, \Omega)$ удовлетворяли условиям (3) и (4), а также (10)—(12).

Согласно [1] обозначим

$$0 = \Theta_0 \leqslant \Theta_1 \leqslant \ldots \leqslant \Theta_{p_n} = s = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{m_n} = t, \quad \delta_n = \max_k (\Theta_k -$$

$$- \Theta_{k-1}, t_k - t_{k-1}), \quad x_0^t(n) = \prod_{i=1}^{p_n} z_{\Theta_{i-1}}^{\Theta_i} \prod_{k=1}^{m_n} z_{t_{k-1}}^{t_k} = \prod_{i=1}^{p_n} z_{\Theta_{i-1}}^{\Theta_i}(1) \times$$

$$\times z_{\Theta_{i-1}}^{\Theta_i}(2) \prod_{k=1}^{m_n} z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\, z_{t_{k-1}}^{t_k}(2), \quad x_0^t(j, n) = \prod_{i=1}^{p_n} z_{\Theta_{i-1}}^{\Theta_i}(j) \prod_{k=1}^{m_n} z_{t_{k-1}}^{t_k}(j),$$

$$x_s^t(n) = \prod_{k=1}^{m_n} z_{t_{k-1}}^{t_k}, \quad x_s^t(j, n) = \prod_{k=1}^{m_n} z_{t_{k-1}}^{t_k}(j) \quad j = 1, 2.$$

Пусть системы $Z_s^t(j)$ таковы, что выполняется следующее условие равномерной сходимости в $|\cdot|_2$ (аналогичное (5) в [1]). При $\delta_n \to 0$

$$\forall\, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T \quad \exists \lim x_s^t(n) = x_s^t, \quad \gamma_n = \sup_k |x_0^{t_k} - x_0^{t_k}(n)|_2 \to 0$$

$$\forall\, \tau \in [0, T] \quad \exists (z_{\tau-}^{\tau})^{-1}, (z_{\tau}^{\tau+})^{-1}, x_{\tau-}^{\tau}, x_{\tau}^{\tau+}, (x_{\tau-}^{\tau})^{-1}, (x_{\tau}^{\tau+})^{-1} \in X(H). \quad (19)$$

Воспользовавшись теперь теоремами из [1, 3], соотношениями (9) и (18), а также леммами 1 и 2, и переходя к пределу в соотношении (6) при $\delta_n \to 0$, получаем следующую теорему.

Теорема. *Если независимые σ_s^t-измеримые системы $Z_s^t(i)$ из $G_2(H, \Omega)$ удовлетворяют условиям* (3)—(4), (10)—(12) *и* (19), *то предел* (1) *существует в* $|\cdot|_4$ *и не зависит от последовательности разбиений* $\Delta_n[s, t]$. *Кроме того, справедлива формула*

$$\check{D}(Z)_s^t = (\check{D}(Z(1) \boxplus \check{D}(Z(2))_s^t + (D(Z(1) \boxplus \check{D}(Z(2)))_s^t +$$

$$+ \check{D}(Z(1) \boxplus Z(2))_s^t + \check{D}(Z(1))_s^t + \check{D}(Z(2))_s^t = \check{D}(X)_s^t, \quad (20)$$

или в других обозначениях

$$\check{Y}_s^t = (\check{Y}(1) \boxplus \check{Y}(2))_s^t + (y(1) \boxplus \check{Y}(2))_s^t + (\check{Y}(2) \boxplus y(1))_s^t + \check{Y}_s^t(1) + \check{Y}_s^t(2). \quad (21)$$

Докажем наконец леммы 1 и 2, на которые мы опирались при доказательстве теоремы 1.

Лемма 1. *Если σ_s^t-измеримые системы $\tilde{Y}_s^t(i)$, $i = 1, 2$, из $\sigma_2(H, \Omega)$ удовлетворяют условию согласованной регулярности*

$$\forall\, \tau \in [0, T] \quad \check{Y}_{\tau-}^{\tau}(1) = \check{Y}_{\tau-}^{\tau}(2) = 0 \vee \check{Y}_{\tau}^{\tau+}(1) = \check{Y}_{\tau}^{\tau+}(2) = 0, \quad (22)$$

эволюционности

$$\forall\, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T{:}\, \check{Y}_s^{\tau}(i) + \check{Y}_{\tau}^t(i) = \check{Y}_s^t(i), \quad \check{Y}_{\tau}^{\tau}(i) = 0 \quad (23)$$

и мартингальности

$$E\check{Y}_s^t(i) = 0, \quad (24)$$

то в $|\cdot|_4$ существует и не зависит от последовательности разбиений $\Delta_n[s, t]$ предел (8), *который называется смешанной суммой систем $\check{Y}_s^t(i)$.*

Доказательство. Обозначим $\mathcal{F}_i(t) = |\check{Y}_0^t(i)|_4^2$. Легко видеть, что $\mathcal{F}_i(t)$ монотонно возрастает и удовлетворяет следующим условиям:

$$|\check{Y}_s^t(i)|_4^2 = \mathcal{F}_i(t) - \mathcal{F}_i(s), \quad \mathcal{F}_1(t) - \mathcal{F}_1(t-) = \mathcal{F}_2(t) - \mathcal{F}_2(t-) = 0 \vee$$
$$\vee\, \mathcal{F}_1(t+) - \mathcal{F}_1(t) = \mathcal{F}_2(t+) - \mathcal{F}_2(t) = 0. \tag{25}$$

Рассмотрим теперь последовательность $\check{Y}_s^t(n) = \sum_{k=1}^{m_n} \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\, \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2)$ и пусть $\Delta_r[s, t] \supset \Delta_n[s, t]$, причем $t_{k-1} = s_0^k \leqslant \ldots \leqslant s_{r_k}^k = t_k$. Аналогично [4], для сходимости последовательности $\check{Y}_s^t[n]$ в норме $|\cdot|_4$ и независимости ее предела от последовательности разбиений $\Delta_n[s, t]$ достаточно показать, что справедливо следующее соотношение:

$$\Big|\sum_{k=1}^{m_n} \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\, \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{j=1}^{r_k} \check{Y}_{s_{j-1}}^{s_j}(1)\, \check{Y}_{s_{j-1}}^{s_j}(2)\Big|_4 \to 0, \quad \delta_n \to 0, \tag{26}$$

где для упрощения записи верхние индексы у s_i^k опущены. Для этого, воспользовавшись (23)—(25), заметим, что квадрат левой части (26) не превышает величину

$$\Big|\sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i\neq j}^{r_k} \check{Y}_{s_{i-1}}^{s_i}(1)\, \check{Y}_{s_{j-1}}^{s_j}(2)\Big|_4^2 \leqslant 2\Big|\sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} \check{Y}_{t_{k-1}}^{s_{i-1}}(1)\, \check{Y}_{s_{i-1}}^{s_i}(2)\Big|_4^2 +$$
$$+ 2\Big|\sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} \check{Y}_{s_i}^{t_k}(1)\, \check{Y}_{s_{i-1}}^{s_i}(2)\Big|_4^2 = 2\sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} (\mathcal{F}_1(s_{i-1}) - \mathcal{F}_1(t_{k-1})) \times$$
$$\times (\mathcal{F}_2(s_i) - \mathcal{F}_2(s_{i-1})) + 2\sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} (\mathcal{F}_1(t_k) - \mathcal{F}_1(s_i))(\mathcal{F}_2(s_i) - \mathcal{F}_2(s_{i-1})) =$$
$$= 2\Big(\sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} \mathcal{F}_1(s_{i-1})(\mathcal{F}_2(s_i) - \mathcal{F}_2(s_{i-1}) - \sum_{k=1}^{m_n} \mathcal{F}_1(t_{k-1})(\mathcal{F}_2(t_k) -$$
$$- \mathcal{F}_2(t_{k-1})\Big) + 2\Big(\sum_{k=1}^{m_n} \mathcal{F}_1(t_k)\,(\mathcal{F}_2(t_k) - \mathcal{F}_2(t_{k-1})) -$$
$$- \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} \mathcal{F}_1(s_i)(\mathcal{F}_2(s_i) - \mathcal{F}_2(s_{i-1}))\Big).$$

Первое слагаемое в правой части этого соотношения представляет собою разность интегральных сумм для левого интеграла Стильтьеса $(l)\int_s^t \mathcal{F}_1(\tau)\, d\mathcal{F}_2(\tau)$, а второе — для правого интеграла Стильтьеса $(r)\int_s^t \mathcal{F}_1(\tau)\, d\mathcal{F}_2(\tau)$ и в силу условий (25) и работы [4] стремится к нулю при $\delta_n \to 0$.

Лемма 2. *Если σ_s^t-измеримые системы $\check{Y}_s^t(i)$ из $\sigma_2(H, \Omega)$ и детерминированные системы $y_s^t(i)$ из $\sigma_2(H)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям эволюционности* (23) *и согласованной регулярности* (15), *$\check{Y}_s^t(i)$ — условиям мартингальности* (24), *а $y_s^t(i)$ — ограниченности квадратичной вариации* (13), *то в $|\cdot|_4$ существуют и не зависят от последовательности разбиений $\Delta_n[s, t]$ пределы* (16), (17).

Доказательство. Из соображений симметрии утверждение леммы достаточно доказать для предела (16). Для этого заметим, что в силу (13), (15), (23) и (24) функции $\varkappa_1(t)$ и $F_2(t)$ удовлетворяют при любом $\tau \in$

$\in [0, T]$ условию согласованной регулярности:

$$\varkappa_1(\tau) - \varkappa_1(\tau -) = \mathcal{F}_2(\tau) - \mathcal{F}_2(\tau -) = 0 \vee \varkappa_1(\tau +) - \varkappa_1(\tau) = \\ = \mathcal{F}_2(\tau +) - \mathcal{F}_2(\tau) = 0. \quad (27)$$

Аналогично оценке (26) запишем теперь следующее неравенство:

$$\left| \sum_{k=1}^{m_n} y_{t_{k-1}}^{t_k}(1) \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{j=1}^{r_k} y_{s_{j-1}}^{s_j}(1) \check{Y}_{s_{j-1}}^{s_j}(2) \right|_4^2 \leqslant 2 \left| \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{j=1}^{r_k} y_{t_{k-1}}^{s_{j-1}}(1) \times \right. \\ \left. \times \check{Y}_{s_{j-1}}^{s_j}(2) \right|_4^2 + 2 \left| \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{j=1}^{r_k} y_{s_j}^{t_k}(1) \check{Y}_{s_{j-1}}^{s_j}(2) \right|_4^2 \leqslant 2 \left(\sum_{k=1}^{m_n} \sum_{j=1}^{r_k} \varkappa_1(s_{j-1}) \times \right. \\ \left. \times (\mathcal{F}_2(s_j) - \mathcal{F}_2(s_{j-1})) - \sum_{k=1}^{m_n} \varkappa_1(t_{k-1})(\mathcal{F}_2(t_k) - \mathcal{F}_2(t_{k-1})) \right) + 2 \left(\sum_{k=1}^{m_n} \varkappa_1(t_k) \times \right. \\ \left. \times (\mathcal{F}_2(t_k) - \mathcal{F}_2(t_{k-1})) - \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{j=1}^{r_k} \varkappa_1(s_j)(\mathcal{F}_2(s_j) - \mathcal{F}_2(s_{j-1})) \right),$$

из которого в силу (27) и результатов [4], как и выше, получаем существование предела (16) и независимость его от последовательности разбиений $\Delta_n [s, t]$.

З а м е ч а н и е. Для доказательства теоремы мы не требовали, чтобы каждая из систем $x_0^t(i, n)$ удовлетворяла условиям (19). В последующих работах приведены простые достаточные ограничения, при которых условия (19) будут частично или полностью выполняться. С их помощью будут указаны и различные усиления как настоящей теоремы, так и теоремы из работы [1].

1. *Буцан Г. П., Козаченко М. Ю.* Предельная теорема для параметрических стохастических операторных систем // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 2.— С. 153—162.
2. *Гохберг И. И., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.— М. : Наука, 1965.— 450 с.
3. *Буцан Г. П., Козаченко М. Ю.* Представление параметрических операторных стохастических систем с помощью их инфинитезимальных систем // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 4.— С. 597—601.
4. *Буцан Г. П.* Об инфинитезимальных полугруппах для одного класса стохастических полугрупп // Там же.— 1983.— **35**, № 2.— С. 221—224.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 17.04.88